ПРО НАПІВГРУПУ ОПЕРАТОРІВ ФЕЛЛЕРА, ЯКА ОПИСУЄ ПРОЦЕС ДИФУЗІЇ НА ПІВПРЯМІЙ З НЕЛОКАЛЬНОЮ ГРАНИЧНОЮ УМОВОЮ

©2007 р. *Павло КОНОНЧУК, Богдан КОПИТКО*

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, Львів 79000

Редакція отримала статтю 31 вересня 2007 р.

У статті за допомогою аналітичних методів побудовано інтегральне зображення напівгрупи операторів, яка описує такий однорідний процес дифузії на півпрямій $\mathbb{R}^+$, що його поведінка в точці $x = 0$ визначається інтегральною граничною умовою.

Нехай $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ — область на прямій $\mathbb{R}$, $\partial\mathcal{D} = \{0\}$ — межа області $\mathcal{D}$ і $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \{0\}$ — замикання $\mathcal{D}$. Припустимо, що на $\overline{\mathcal{D}}$ заданий диференціальний оператор другого порядку, що діє на множині $\mathcal{C}_K^2\left(\overline{\mathcal{D}}\right)$ всіх двічі неперервно диференційовних функцій з компактними носіями:

$$\mathcal{L}\varphi(x) = \frac{1}{2}b(x)\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + a(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}, \tag{1}$$

де $b(x)$ і $a(x)$ — обмежені неперервні функції на $\overline{\mathcal{D}}$, $b(x) \geq 0$. Припустимо також, що в точці $x = 0$ заданий інтегральний оператор наступного вигляду:

$$\mathcal{L}_0\varphi(0) = \int_{\overline{\mathcal{D}}} (\varphi(0) - \varphi(y))\, \mu(dy), \tag{2}$$

де $\mu(\cdot)$ — невід'ємна міра Бореля на $\overline{\mathcal{D}}$, $\mu(\overline{\mathcal{D}}) > 0$. Зауважимо, що оператор в (2) є лише тією частиною загального граничного оператора типу Феллера–Вентцеля [1, 6], яка відповідає за стрибки процесу після його виходу на межу області $\partial\mathcal{D}$.

Розглянемо задачу: побудувати напівгрупу операторів $\mathcal{T}_t$, $t \geq 0$, яка породжує процес Феллера на $\overline{\mathcal{D}}$, такий що в точках $\mathcal{D}$ він збігається з

УДК 519.21; MSC 2000:60J60

дифузійним процесом, керованим оператором $\mathcal{L}$, а його поведінка в точці $x = 0$ визначається крайовою умовою $\mathcal{L}_0\varphi(0) = 0$.

У даній статті шукану напівгрупу буде побудовано аналітичними методами за допомогою розв'язку відповідної початково-крайової задачі для лінійного параболічного рівняння другого порядку. Ця задача полягає в знаходженні функції $u(t, x)$ $(t > 0, x \in \overline{\mathcal{D}})$, яка задовольняє умови

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u, \quad t > 0, \quad x \in \mathcal{D}, \tag{3}$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad x \in \mathcal{D}, \tag{4}$$

$$\int_{\overline{\mathcal{D}}} (u(t, 0) - u(t, y))\, \mu(dy) = 0, \quad t > 0. \tag{5}$$

Для розв'язання задачі (3)–(5) використовуватимемо метод класичної теорії потенціалу. Такий підхід дозволяє отримати інтегральне зображення для шуканої напівгрупи. Відзначимо, що раніше подібна задача вивчалася в [5] за допомогою методів функціонального аналізу.

Будемо використовувати такі позначення: D_t^r і D_x^p — символи частинної похідної за змінною t порядку r та частинної похідної за змінною x порядку p відповідно, де r і p — цілі невід'ємні числа; $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ — банаховий простір всіх обмежених вимірних функцій на $\mathbb{R}$, які набувають дійсних значень, з нормою $\|\varphi\| = \sup\limits_x |\varphi(x)|$; T — фіксоване додатне число; $\mathbb{R}_T^2 \equiv (0, T) \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_\infty^2 \equiv (0, \infty) \times \mathbb{R}$; Ω — область в $\mathbb{R}_T^2$ або в $\mathbb{R}_\infty^2$; $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ $(\mathcal{C}(\Omega))$ — сукупність неперервних в $\overline{\Omega}$ (в Ω) функцій; $\mathcal{C}^{1,2}(\overline{\Omega})$ $(\mathcal{C}^{1,2}(\Omega))$ — сукупність неперервних в $\overline{\Omega}$ (в Ω) функцій, що мають неперервні в $\overline{\Omega}$ (в Ω) похідні $D_t u$, $D_x^p u$, $p = 1, 2$; $\mathcal{H}^\alpha(\mathbb{R})$, $\alpha \in (0, 1)$, так само як у [3, с. 16], означає простір Гельдера; $\mathcal{D}_\delta = \{x \in \mathcal{D} : x > \delta > 0\}$; C, c, — додатні сталі, які не залежать від (t, x), конкретні величини яких нас, здебільшого, цікавити не будуть.

Додатково припускаємо, що для коефіцієнтів оператора $\mathcal{L}$ з (1) та міри $\mu(\cdot)$ з (2) виконані умови:

а) функції $b(x)$, $a(x)$ є визначеними на $\mathbb{R}$ і $b, a \in \mathcal{H}^\alpha(\mathbb{R})$;

б) існують сталі b_0, b_1 такі, що $0 < b_0 \le b_1$ і $b_0 \le b(x) \le b_1$ для всіх $x \in \mathbb{R}$;

в) існує $\Delta > 0$ таке, що для $0 < \delta < \Delta$ і для всіх функцій $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\left| \int_{\mathcal{D}_\delta} \varphi(y)\mu(dy) \right| \le C_1 \|\varphi\|, \tag{6}$$

$$\left| \int_{\overline{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{D}_\delta} \varphi(y)\mu(dy) \right| \le C_2(\delta) \|\varphi\|, \tag{7}$$

де стала $C_1 > 0$ не залежить від δ, $C_2(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Зауваження 1. З умов а), б) випливає (див. [3]), що для рівняння (3) існує фундаментальний ров'язок (ф.р.), який позначимо через $g(t,x,y)$ $(t > 0, x, y \in \mathbb{R})$.

Зауваження 2. З умови в) випливає, що $\mu(0) = 0$ і $\mu(\overline{\mathcal{D}}) < \infty$. Не порушуючи загальності міркувань, будемо вважати, що $\mu(\overline{\mathcal{D}}) = 1$.

Відзначимо деякі відомі властивості ф.р. g (див [3, 4]), які використовуватимемо надалі в роботі:

1) функція $g(t,x,y)$ задовольняє рівняння (3) в області $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, при фіксованому y, а також співвідношення

$$\lim_{t \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^1} g(t,x,y)\varphi(y)dy = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

для довільної неперервної обмеженої функції $\varphi(x)$;

2) функція $g(t,x,y)$ — невід'ємна, неперервна за сукупністю змінних і виражається формулою

$$g(t,x,y) = g_0(t,x,y) + g_1(t,x,y), \quad t > 0, \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

де

$$g_0(t,x,y) = g_0^{(y)}(t, x-y) = (2\pi b(y)t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2b(y)t}},$$

$g_1(t,x,y)$ записується у вигляді інтегрального оператора з ядром g_0 та щільністю Φ_0, яка визначається з деякого інтегрального рівняння (g_1 має „слабкішу“ особливість, ніж g_0 при $t \searrow 0$, крім того, $g(t,x,y) \equiv 0$ при $t \leq 0$);

3) функція g_0, як функція аргументів t і x, нескінченно неперервно диференційовна для $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^1$, і

$$|D_t^r D_x^p g_0(t,x,y)| \leq Ct^{-\frac{1+2r+p}{2}} e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}}; \tag{9}$$

4) функції g_1 і g, як функції аргументів t і x, неперервно диференційовні за t, двічі неперервно диференційовні за x і

$$|D_t^r D_x^p g_1(t,x,y)| \leq Ct^{-\frac{1+2r+p-\alpha}{2}} e^{-c\frac{|x-y|^2}{2}}, \quad 2r + p \leq 2, \quad 0 < t \leq T, \tag{10}$$

$$|D_t^r D_x^p g(t,x,y)| \leq Ct^{-\frac{1+2r+p}{2}} e^{-c\frac{|x-y|^2}{2}}, \quad 2r + p \leq 2, \quad 0 < t \leq T. \tag{11}$$

Встановимо класичну розв'язність задачі (3)–(5) у просторі неперервних та обмежених (за змінною x) функцій.

Теорема 1. *Нехай для коефіцієнтів оператора* $\mathcal{L}$ *з* (1) *та міри* $\mu(\cdot)$ *з* (2) *виконані умови а)–в). Тоді для будь-якої неперервної функції* $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *з* (4) *задача* (3)–(5) *має єдиний розв'язок*

$$u \in \mathcal{C}^{1,2}\left((0,\infty) \times \mathcal{D}\right) \cap \mathcal{C}\left((0,\infty) \times \overline{\mathcal{D}}\right), \tag{12}$$

для якого правильна оцінка ($t \in (0,T]$, $x \in \overline{\mathcal{D}}$)

$$|u(t,x)| \leq C\|\varphi\|. \tag{13}$$

Цей розв'язок можна подати у вигляді

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} g(t,x,y)\varphi(y)dy + \int_0^t g(t-\tau,x,0)V(\tau,\varphi)d\tau, t>0, x \in \mathcal{D}, \tag{14}$$

де $V(t)$ ($t>0$) *— розв'язок деякого інтегрального рівняння Вольтерри другого роду.*

Доведення. Позначимо перший доданок у правій частині (14) через $u_0(t,x)$, а другий — через $u_1(t,x)$. Нагадаємо (див. [3]), що у теорії параболічних рівняннь функція $u_0(t,x)$ називається потенціалом Пуассона, а функція $u_1(t,x)$ — потенціалом простого шару. Підставляючи вираз для $u(t,x)$ в умову (5), для функції V дістаємо рівняння

$$\int_0^t \left(g(t-\tau,0,0) - \int_{\overline{\mathcal{D}}} g(t-\tau,y,0)\mu(dy)\right) V(\tau)d\tau = \Phi(t), \quad t>0, \tag{15}$$

де

$$\Phi(t) = \int_{\overline{\mathcal{D}}} \mu(dy) \int_{\mathbb{R}} \left(g(t,y,z) - g(t,0,z)\right)\varphi(z)dz.$$

Як бачимо, рівняння (15) є інтегральним рівнянням Вольтерри I роду. За допомогою прийому Гольмгрена (див. [2]) перетворимо це рівняння до еквівалентного інтегрального рівняння Вольтерри II роду. Для цього визначимо такий оператор:

$$\mathcal{E}(t)\Phi = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\Phi(s)ds, \quad t>0,$$

і подіємо ним на обидві частини рівняння (15). Враховуючи при цьому зображення для g, а також умову в), після простих перетворень отримуємо рівняння

$$V(t) = \int_0^t K(t-\tau)V(\tau)dt + \Psi(t), \quad t>0, \tag{16}$$

де

$$K(t-\tau)=\sqrt{\frac{2b(0)}{\pi}}\frac{d}{dt}\int_{\tau}^{t}(t-s)^{-\frac{1}{2}}\Bigg(\int_{\overline{\mathcal{D}}}\big(g_1(s-\tau,y,0)-$$

$$-g_1(s-\tau,0,0)\big)\mu(dy)\Bigg)ds-b(0)\int_{\overline{\mathcal{D}}}\frac{\partial g_0(t-\tau,y,0)}{\partial y}\mu(dy),$$

$$\Psi(t)=\sqrt{\frac{2b(0)}{\pi}}\frac{d}{dt}\int_{0}^{t}(t-s)^{-\frac{1}{2}}\Phi(s)ds.$$

Для першого доданка, який входить до формули для $K(t-\tau)$ (позначимо його через $K_1(t-\tau)$), та функції $\Psi(t)$ правильні оцінки

$$|K_1(t-\tau)|\le C_T(t-\tau)^{-1+\frac{\alpha}{2}}, \tag{17}$$

$$|\Psi(t)|\le K_T\|\varphi\|t^{-\frac{1}{2}}, \tag{18}$$

які виконуються в кожній з областей вигляду $0\le\tau<t\le T$ та $0<t\le T$ відповідно з деякими слалими C_T та K_T.

Доведемо оцінки (17), (18). Для цього розкриваючи похідні від інтегралів, які входять до виразів для $K_1(t-\tau)$ та $\Psi(t)$, знаходимо формули

$$K_1(t-\tau)=\sqrt{\frac{2b(0)}{\pi}}\Bigg(\frac{1}{2}\int_{\tau}^{t}(t-s)^{-\frac{3}{2}}ds\int_{\overline{\mathcal{D}}}(g_1(t-\tau,y,0)-$$

$$-g_1(s-\tau,y,0))-(g_1(t-\tau,0,0)-g_1(s-\tau,0,0))\mu(dy)+$$

$$+(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\int_{\overline{\mathcal{D}}}(g_1(t-\tau),y,0)-g_1(t-\tau,0,0))\mu(dy)\Bigg), \tag{19}$$

$$\Psi(t)=\sqrt{\frac{2b(0)}{\pi}}\Bigg(\frac{1}{2}\int_{0}^{t}(t-s)^{-\frac{3}{2}}\left(\Phi(t)-\Phi(s)\right)ds+t^{-\frac{1}{2}}\Phi(t)\Bigg). \tag{20}$$

Тоді, оцінюючи праву частину (19) за допомогою нерівності (10), формули скінчених приростів для різниць $g_1(t-\tau,y,0)-g_1(s-\tau,y,0)$, $g_1(t-\tau,0,0)-g_1(s-\tau,0,0)$, маємо $(0\le\tau<t\le T)$

$$|K_1(t-\tau)|\le C\Bigg(\int_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}}(t-s)^{-\frac{3}{2}}\left((t-\tau)^{-\frac{1-\alpha}{2}}+(s-\tau)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\right)ds+$$

$$+\int_{\frac{t+\tau}{2}}^{t}(t-s)^{-\frac{1}{2}}(s-t)^{-\frac{3-\alpha}{2}}ds+(t-\tau)^{-1+\frac{\alpha}{2}}\Bigg)\le C_T(t-\tau)^{-1+\frac{\alpha}{2}}.$$

Аналогічно, на підставі (20) та (11), а також формули скінчених приростів для різниці $\Phi(t) - \Phi(s)$ дістаємо оцінку (18).

Що стосується функції $K_2(t-\tau)$, яка визначає другий доданок у виразі для $K(t-\tau)$, то вона, як випливає з (9), в точці $t=\tau$ має неінтегровну особливість. Незважаючи на таку обставину, доведемо, що до рівняння (16) можна застосувати метод послідовних наближень. Це означає, що розв'язок рівняння (16) можна подати у вигляді ряду

$$V(t) = \sum_{k=0}^{\infty} V^{(k)}(t), \tag{21}$$

де

$$V^{(0)}(t) = \Psi(t), \quad V^{(k)}(t) = \int_0^t K(t-\tau) V^{(k-1)}(\tau)d\tau, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Оцінимо $V^{(1)}(t)$. Для цього використаємо рівність

$$V^{(1)}(t) = \int_0^t K_1(t-\tau)\Psi(\tau)d\tau + \int_0^t K_2(t-\tau)\Psi(\tau)d\tau = V_1^{(1)}(t) + V_2^{(1)}(t). \tag{22}$$

Враховуючи (17), (18), маємо

$$\left|V_1^{(1)}(t)\right| \le K_T\|\varphi\| C_T \int_0^t (t-\tau)^{-1+\frac{\alpha}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}} d\tau = K_T\|\varphi\| \frac{C_T \Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})} t^{\frac{\alpha-1}{2}}. \tag{23}$$

Для функції $V_2^{(1)}(t)$ запишемо формулу

$$V_2^{(1)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b(0)}} \int_{\overline{\mathcal{D}}} \mu(dy) \int_0^t \frac{y}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{y^2}{2b(0)(t-\tau)}} \Psi(\tau)dt.$$

Тоді, використовуючи (18), отримуємо

$$\left|V_2^{(1)}(t)\right| \le K_T\|\varphi\| \frac{1}{\sqrt{2\pi b(0)}} \int_{\overline{\mathcal{D}}} \mu(dy) \int_0^t \frac{y}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}} \tau^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{y^2}{2b(0)(t-\tau)}} d\tau.$$

Оскільки

$$\int_0^t \frac{y}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}} \tau^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{y^2}{2b(0)(t-\tau)}} d\tau = \sqrt{\frac{2\pi b(0)}{t}} e^{-\frac{y^2}{2b(0)t}},$$

то

$$\left|V_2^{(1)}(t)\right| \le K_T\|\varphi\| t^{-\frac{1}{2}} \int_{\overline{\mathcal{D}}} e^{-\frac{y^2}{2b(0)t}} \mu(dy). \tag{24}$$

З (22)–(24) випливає оцінка

$$\left|V^{(1)}(t)\right| \leq K_T\|\varphi\|t^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{C_T\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})}t^{\frac{\alpha}{2}} + \int_{\overline{\mathcal{D}}} e^{-\frac{y^2}{2b(0)t}}\mu(dy)\right), \quad t \in (0,T]. \tag{25}$$

У правій частині (25) введемо наступні позначення:

$$a_t = \frac{C_T\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma\frac{1+\alpha}{2}}t^{\frac{\alpha}{2}}, \quad b_t = \int_{\overline{\mathcal{D}}} e^{-\frac{y^2}{2b(0)t}}\mu(dy), \quad t \in (0,T].$$

Зауважимо, що умова в) (див. також зауваження 2) гарантує виконання для b_t нерівності $b_t \leq b_T < 1$, $t \in (0,T]$. Далі за допомогою індукції по k для $V^{(k)}(t)$ встановлюємо оцінку ($t \in (0,T]$)

$$\left|V^{(k)}(t)\right| \leq K_T\|\varphi\|t^{-\frac{1}{2}}\sum_{m=0}^{k} C_k^m a_t^{(k-m)} b_t^m, \quad k = 0,1,2\ldots, \tag{26}$$

де

$$C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!}, \quad a_t^{(k)} = \frac{\left(C_T\Gamma(\frac{\alpha}{2})\right)^k\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1+k\alpha}{2})}t^{k\frac{\alpha}{2}}.$$

Тут C_T та K_T — сталі з нерівностей (17) та (18) відповідно. Враховуючи оцінку (26), маємо:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|V^{(k)}(t)\right| \leq K_T\|\varphi\|t^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k} C_k^m a_t^{(k-m)} b_t^m =$$

$$= K_T\|\varphi\|t^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty} a_t^{(k)}\sum_{m=0}^{\infty} C_{k+m}^m b_t^m = K_T\|\varphi\|t^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_t^{(k)}}{(1-b_t)^{k+1}} \leq \tag{27}$$

$$\leq K_T\|\varphi\|t^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(C_T\Gamma(\frac{\alpha}{2})\right)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1+k\alpha}{2})(1-b_T)^{k+1}}t^{k\frac{\alpha}{2}}.$$

Нерівність (27) забезпечує збіжність ряду (21) для $t \in (0,T]$ і дає для V оцінку

$$|V(t)| \leq C\|\varphi\|t^{-\frac{1}{2}}, \quad t \in (0,T]. \tag{28}$$

Відзначимо ще одну властивість розв'язку рівняння (16), яку буде використано нижче. Якщо $\varphi_n(x)$ — така послідовність обмежених вимірних функцій на $\mathbb{R}$ з дійсними значеннями, що $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ для кожного $x \in \mathbb{R}$, коли $n \to \infty$, і $\sup_{n,x}|\varphi_n(x)| < \infty$, то $\lim_{n\to\infty} V(t,\varphi_n) = V(t,\varphi)$ для довільного $t > 0$. Для доведення треба зауважити, що в ряді (21), який зображає функцію $V(t, \varphi_n)$ (тобто функцію $V(t)$ з початковою функцією φ_n), можна перейти до границі почленно.

Отже, ми побудували розв'язок інтегрального рівняння (16) і встановили для нього оцінку (28). Ця оцінка разом з оцінкою (11), в якій треба покласти $r = p = 0$, забезпечують існування функції u_1 з (14) і виконання для неї нерівності (13). Очевидно така ж нерівність правильна для функції u_0 з (14), а, отже, і для функції u. Це означає, що існування розв'язку задачі (3)–(5) доведено.

Зауваження 3. Якщо до припущень теореми 1 долучити умову узгодження
$$L_0\varphi(0) = 0, \tag{29}$$
то знайдений розв'язок задачі (3)–(5) належить до $\mathcal{C}\left([0,\infty) \times \overline{\mathcal{D}}\right)$.

Доведемо тепер, що побудований нами розв'язок задачі (3)–(5) — єдиний. Припустимо, що існують два різних розв'язки задачі (3)-(5) з класу (12). Позначимо їх через $u^{(1)}(t,x)$ та $u^{(2)}(t,x)$. Тоді функція $u(t,x) = u^{(1)}(t,x) - u^{(2)}(t,x)$ задовольняє в області $t > 0$, $x \in \mathcal{D}$ рівняння (3), початкову умову

$$u(0,x) = 0, \quad x \in \mathcal{D}, \tag{30}$$

крайову умову
$$u(t,0) = v(t), \quad t > 0, \tag{31}$$

де
$$v(t) = \int_{\overline{\mathcal{D}}} \left(u^{(1)}(t,x) - u^{(2)}(t,x)\right) \mu(dy),$$
а також умову узгодження
$$v(0) = 0. \tag{32}$$

Рівності (3), (30), (31) можна розглядати як першу параболічну крайову задачу для функції $u = u^{(1)} - u^{(2)}$. Відомо (див. [3]), що у випадку, коли $v \in C([0,\infty))$, то при виконанні умови узгодження (32) існує єдиний розв'язок цієї задачі з класу $\mathcal{C}([0,\infty) \times \overline{\mathcal{D}}) \cap \mathcal{C}^{1,2}((0,\infty) \times \mathcal{D})$, який можна зобразити у вигляді

$$u(t,x) = \int_0^t g(t-\tau, x, 0) V(\tau) d\tau,$$

де функція V однозначно визначається з умови (31). У нашому випадку умова (31) приводить до інтегрального рівняння (16), в якому $\Psi(t) \equiv 0$.

Розв'язуючи це рівняння методом послідовних наближень, маємо, що $V(t) \equiv 0$, а, отже, $u \equiv 0$ і $u^{(1)} \equiv u^{(2)}$. Отримане протиріччя вказує на те, що наше припущення про існування двох різних розв'язків задачі (3)–(5) є суперечливим.

Теорему 1 доведено.

З теореми 1 випливає, що за допомогою розв'язку задачі (3)–(5) можна визначити сім'ю операторів $(\mathcal{T}_t)_{t>0}$, які діють в просторі $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Для $t > 0$, $x \in \overline{\mathcal{D}}$ та $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ покладемо

$$\mathcal{T}_t\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} g(t,x,y)\varphi(y)dy + \int_0^t g(t-\tau,x,0)V(\tau,\varphi)dt, \qquad (33)$$

де $V(t,\varphi) \equiv V(t)$ — розв'язок інтегрального рівняння (16).

Покажемо, що оператори $\mathcal{T}_t$, $t > 0$, задовольняють такі умови:

i) якщо $\varphi_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $n = 1,2,\ldots$, $\sup\|\varphi_n\| < \infty$ і для всіх $x \in \mathbb{R}$ маємо $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = \varphi(x)$, то для всіх $t > 0$, $x \in \overline{\mathcal{D}}$ виконується співвідношення $\lim_{n\to\infty}\mathcal{T}_t\varphi_n(x) = \mathcal{T}_t\varphi(x)$;

ii) для всіх $t_1 > 0$, $t_2 > 0$ виконується співвідношення $\mathcal{T}_{t_1+t_2} = \mathcal{T}_{t_1}\mathcal{T}_{t2}$;

iii) $\mathcal{T}_t\varphi(x) \geq 0$ для всіх $t > 0$, $x \in \overline{\mathcal{D}}$, якщо функція $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ є такою, що $\varphi(x) \geq 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$;

iv)$\|\mathcal{T}_t\| \leq 1$ для всіх $t > 0$.

Умови i)–iv) легко перевірити. Зокрема, властивість i) є наслідком властивостей розв'язку рівняння (16) і теореми Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла. Властивість ii) називається напівгруповою властивістю. Її легко обгрунтувати на підставі твердження про єдиність розв'язку задачі (3)–(5). Властивість iii) є наслідком принципу максимуму для параболічних рівнянь. Нарешті, властивість iv) означає, що для кожного $t > 0$ оператор $\mathcal{T}_t$ є оператором стиску. Якщо взяти до уваги iii), то для доведення властивості iv) досить зауважити, що $\mathcal{T}_t\varphi_0(x) \equiv 1$ для всіх $t > 0$, $x \in \overline{\mathcal{D}}$, якщо $\varphi_0(x) \equiv 1$. Додатково зауважимо, що у випадку, коли $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ задовольняє умову (29), то $T_0 = I$, де I — це одиничний оператор, і властивості i)–iv) будуть виконані також при $t = 0$. Звідси робимо висновок (див. [4]), що побудована напівгрупа операторів $\mathcal{T}_t$ визначає деякий однорідний феллерівський процес на $\overline{\mathcal{D}}$. Позначимо його ймовірність переходу через $P(t,x,dy)$, так що $\mathcal{T}_t\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} P(t,x,dy)\varphi(y)$. Отже, доведено наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай для коефіцієнтів оператора $\mathcal{L}$ з формули* (1) *та міри $\mu(\cdot)$ з формули* (2) *виконані умови а)–в). Тоді розв'язок задачі* (3)–(5) *однозначно визначає напівгрупу операторів $\mathcal{T}_t$, $t \geq 0$, яка описує* *однорідний феллерівський процес на $\overline{\mathcal{D}}$, такий, що його частина у внутрішніх точках області $\mathcal{D}$ збігається з дифузійним процесом, керованим оператором $\mathcal{L}$, а його поведінка на межі області визначаєтьсякрайовою умовою* (29).

[1] *Вентцель А.Д.* О ганичных условиях для многомерных диффузионных процессов // Теория вероятностей и ее применения, 1959. – 4, № 2. – С. 172–185.

[2] *Камынин Л.И.* О существовании решения краевых задач для параболического уравнения с разрывными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1964. – Т. 28, № 4. – С. 721–744.

[3] *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

[4] *Портенко М.І.* Процеси дифузії в середовищах з мембранами. – Київ: Інститут математики НАН України, 1995. – 199 с.

[5] *Скубачевский А.Л.* О полугруппах Феллера для многомерных диффузионных процессов // Доклады РАН. – 1995. – 341, № 2. – С. 173–176.

[6] *Feller W.* Generalized second-order differential operators and their lateral conditions // Illinois J. Math. – 1957. – V. 1. – P. 495–504.

ABOUT FELLER SEMIGROUP THAT DESCRIBES A DIFFUSION PROCESS ON A HALF-LINE WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS

Pavlo KONONCHUK, Bohdan KOPYTKO

Ivan Franko Lviv National University
1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine

Using analytical methods it was constructed an integral representation of a semigroup that describes homogeneous diffusion process on half-line $\mathbb{R}^+$ and its behaviour on a boundary $x = 0$ defines by integral boundary condition.