ЙМОВІРНІСНИЙ ПІДХІД ДО ПЕРЕТВОРЕНЬ, ЩО ЗБЕРІГАЮТЬ ФРАКТАЛЬНУ РОЗМІРНІСТЬ

©*2007 р. Григорій ТОРБІН*

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова,
вул. Пирогова, 9, Київ 01601

Редакція отримала статтю 12 вересня 2007 р.

У роботі досліджено взаємозв'язки між мультифрактальними властивостями ймовірнісних мір та збереженням розмірності Гаусдорфа–Безиковича відповідними функціями розподілу. Знайдено загальні необхідні та достатні умови належності функцій розподілу до класу перетворень, що зберігають фрактальну розмірність (DP-клас). Для сім'ї функцій розподілу випадкових величин з незалежними s-адичними цифрами знайдено критерії належності до DP-класу.

1. Перетворення F простору $\mathbb{R}^n$ (в розумінні бієктивного відображення $\mathbb{R}^n$ в себе) називається перетворенням, що зберігає розмірність Гаусдорфа–Безиковича (DP-перетворенням простору $\mathbb{R}^n$), якщо для будь-якої підмножини $E \subset \mathbb{R}^n$ розмірності Гаусдорфа–Безиковича $\alpha_0(E)$ множини E та її образу $E' = F(E)$ співпадають. Множина всіх DP-перетворень простору $\mathbb{R}^n$ відносно операції „композиція перетворень" утворює групу G, яка містить, зокрема, рухи, перетворення подібності, всі афінні перетворення і далеко не вичерпується ними.

Теоретико-груповий підхід до геометрії добре відомий з часів Ерлангенської програми Ф.Клейна. Чим є „фрактальна геометрія" з цієї точки зору? У [6] запропоновано підхід до фрактальної геометрії як до галузі математики, що вивчає інварінти групи DP-перетворень. Група G включає багато підгруп. Зокрема, G містить групу афінних перетворень (і тому афінна геометрія може розглядатись як частина фрактальної геометрії). У $[2, 6, 11, 12]$ показано, що навіть у випадку $\mathbb{R}^1$ група G має

УДК УДК 519.21; MSC 2000: 11K55, 26A30, 28A80, 60G30

дуже багату структуру. Вона містить (як дуже частковий випадок) всі бі-Ліпшицеві перетвореннння. З іншого боку, ця група містить „суттєво негладкі“ перетворення (див., зокрема, [6]) і звичайне диференціально-інтегральне числення не має адекватних інструментів для дослідження перетворень цієї групи.

Дана робота присвячена дослідженню загальних властивостей та ознак одновимірних DP-перетворень. Оскільки задача про дослідження неперервних DP-перетворень є еквівалентною до задачі про вивчення DP-властивостей строго зростаючих функцій розподілу на $[0,1]$ (див. $[2,6]$), то основна увага зосереджена на вивченні взаємозв'язків між тонкими фрактальними властивостями ймовірнісних мір та DP-властивостями відповідних функцій розподілу (розділи 2 та 3). У розділі 4 встановлено необхідні і достатні умови збереження розмірності Гаусдорфа–Безиковича функціями розподілу випадкових величин з незалежними s-адичними цифрами, що узагальнює та поглиблює відповідні результати з $[2,6,12]$.

2. Знайдемо достатні умови збереження розмірності Гаусдорфа–Безиковича підмножин відрізка $[0,1]$ строго зростаючою неперервною функцією розподілу F_μ (без будь-яких додаткових обмежень на міру μ).

Зафіксуємо довільне натуральне число $s>1$. Добре відомо, що кожне дійсне число x з одиничного відрізка може бути записане у вигляді

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i(x)}{s^i}=:\Delta^s_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots},$$

де $\alpha_i(x)\in\{0,1,\ldots,s-1\}=:N^0_{s-1}$. Відрізок

$$\Delta^s_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)}:=\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i(x)}{s^i},\frac{1}{s^k}+\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i(x)}{s^i}\right]$$

називаться s-адичним циліндром k-го рангу, що містить точку x. Позначимо через λ міру Лебега.

Теорема 1. *Нехай*

$$I_\mu=\left\{x: x\in[0,1],\ \lim_{k\to\infty}\frac{\ln\mu(\Delta^s_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})}{\ln\lambda(\Delta^s_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})}=1\right\},\quad \overline{I}_\mu=[0,1]\setminus I_\mu.$$

Якщо $\alpha_0(\overline{I}_\mu)=\alpha_0(F_\mu(\overline{I}_\mu))=0$, *то функція розподілу* F_μ *зберігає розмірність Гаусдорфа–Безиковича на* $[0,1]$.

Доведення. Нехай E — довільна підмножина одиничного відрізка, $E_1=I_\mu\bigcap E$, $E_2=E\setminus E_1=\overline{I}_\mu\bigcap E$; $E'=F_\mu(E)$, $E'_1=F_\mu(E_1)$, $E'_2=$

$F_\mu(E_2)$. Оскільки $\alpha_0(\overline{I}_\mu) = \alpha_0(F_\mu(\overline{I}_\mu)) = 0$ і $E_2 \subset \overline{I}_\mu, E_2^{'} \subset F_\mu(\overline{I}_\mu)$, то $\alpha_0(E_2) = \alpha_0(E_2^{'}) = 0$. Для кожної точки x множини E_1 виконується умова

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln \mu(\Delta^s_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})}{\ln \lambda(\Delta^s_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})} = 1. \qquad (1)$$

Тому, за теоремою Біллінгслі [4,7,8] маємо: $\alpha_\lambda(E_1) = 1{\cdot}\alpha_\mu(E_1)$, де $\alpha_\lambda(\cdot)$ та $\alpha_\mu(\cdot)$ — розмірності Гаусдорфа–Біллінгслі відносно мір λ та μ відповідно (див. [4, 7, 8]). Оскільки λ — міра Лебега, то $\alpha_\lambda(E_1) = \alpha_0(E_1)$. З іншого боку, $\alpha_\mu(E_1) = \alpha_0(F_\mu(E_1)) = \alpha_0(E_1^{'})$. Отже, $\alpha_0(E) = \alpha_0(E_1 \bigcup E_2) = \alpha_0(E_1) = \alpha_0(E_1^{'}) = \alpha_0(E_1^{'} \bigcup E_2^{'}) = \alpha_0(E^{'})$.

Наслідок 1. *Якщо множина $\overline{I}_\mu$ не більш ніж як зліченна, то F_μ є DP-перетворенням одиничного відрізка.*

Теорема 2. *Нехай функція розподілу F_μ має скінченну ненульову похідну у всіх точках множини D^+_μ. Якщо $\alpha_0([0,1]\setminus D^+_\mu) = \alpha_0(F_\mu(([0,1]\setminus D^+_\mu)) = 0$, то функція розподілу F_μ зберігає розмірність Гаусдорфа–Безиковича на $[0,1]$.*

Доведення. Якщо функція F_μ — диференційовна в точці x_0, то

$$F_\mu^{'}(x_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{\Delta F_\mu(\Delta^s_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\ldots\alpha_k(x_0)})}{|\Delta^s_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\ldots\alpha_k(x_0)}|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\mu(\Delta^s_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\ldots\alpha_k(x_0)})}{\lambda(\Delta^s_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\ldots\alpha_k(x_0)})} \in$$

$\in (0, +\infty)$. Отже, $\forall x_0 \in D^+_\mu, \forall \varepsilon > 0, \exists k_0 = k_0(x_0, \varepsilon):$

$$\frac{\mu(\Delta^s_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\ldots\alpha_k(x_0)})}{\lambda(\Delta^s_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\ldots\alpha_k(x_0)})} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon), \forall k > k_0,$$

що рівносильно виконанню умови

$$1 + \frac{\ln(a+\varepsilon)}{\ln \lambda(\Delta^s_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})} < \frac{\ln \mu(\Delta^s_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})}{\ln \lambda(\Delta^s_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})} <$$

$$< 1 + \frac{\ln(a-\varepsilon)}{\ln \lambda(\Delta^s_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})}, \quad \forall k > k_0.$$

Оскільки μ та λ — неперервні міри, то для кожної точки $x_0 \in D^+_\mu$ виконується умова (1) і безпосереднє застосування теореми 1 завершує доведення.

Наслідок 2. *Якщо функція розподілу F_μ має скінченну ненульову похідну у всіх точках за винятком точок не більш ніж зліченної множини, то F_μ є DP-перетворенням одиничного відрізка.*

Зауваження 1. Теорема 2 є узагальненням результатів з [1, 2, 6], які стосуються характеризації DP-перетворень за їх диференціальними властивостями (множина $[0,1] \setminus D_\mu^+$ може бути всюди щільною і континуальною). Разом з тим, умови теореми 2 є досить обмежуючими: в [6] наведено приклад строго зростаючої абсолютно неперервної DP-функції, для якої множина $[0,1] \setminus D_\mu^+$ є всюди щільною суперфрактальною ($\alpha_0([0,1] \setminus D_\mu^+) = 1$) множиною. Цей факт показує, що звичайна похідна не є адекватним інструментом для дослідження DP-перетворень і для більш тонкої їх характеризації необхідно застосовувати (створювати) інший інструментарій досліджень. Зокрема, застосування методів багаторівневого фрактального аналізу [3] ймовірнісних мір дозволяє розв'язати задачу про знаходження загальних необхідних умов збереження розмірності Гаусдорфа–Безиковича.

3. Нагадаємо [3], що гаусдорфовою розмірністю ймовірнісної міри μ називається число $\dim_H \mu = \inf\limits_{E \in B_\mu} \{\alpha_0(E)\}$, де $B_\mu = \{E : E \in \mathcal{B}, \mu(E) = 1\}$ — множина всеможливих (не обов'язково замкнених) борелівських носіїв міри μ. Локальною гаусдорфовою розмірністю міри μ в точці x_0 називається число

$$\dim_H(\mu, x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\inf_{E \in B_\mu} \{\alpha_0(E \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))\} \right].$$

Означення 1. *Міра μ називається мірою зовнішньо-точної розмірності α_0, якщо для довільної точки x_0 зі спектру (мінімального замкненого носія) S_μ міри виконується умова:* $\dim_H(\mu, x_0) = \alpha_0 = \dim_H \mu$.

Теорема 3. *Якщо функція розподілу F_μ зберігіає розмірність Гаусдорфа-Безиковича, то відповідна ймовірнісна міра μ є мірою зовнішньо-точної розмірності* 1.

Доведення. Припустимо протилежне. Тоді існує точка $x_1 \in [0,1]$ така, що $\dim_H(\mu, x_1) = a < 1$ (оскільки $\dim_H(\mu, x_1) \le \dim_H \mu \le 1$, то нерівність $a > 1$ неможлива). Отже, існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що $\inf\limits_{E \in B_\mu} \{\alpha_0(E \cap (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon)) < \frac{a+1}{2}, \forall \varepsilon < \varepsilon_0$, звідки випливає існування носія G міри μ, для якого $\alpha_0(G \bigcap (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon)) < \frac{a+1}{2} + \frac{1-a}{10}$. Оскільки $\mu(G) = 1$, то $\alpha_0(F_\mu(G \bigcap (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon))) = 1, \forall \varepsilon > 0$, що суперечить DP-властивості функції F_μ.

Наслідок 3. *Якщо функція розподілу F_μ є DP-перетворенням одиничного відрізка, то* $\dim_H \mu = 1$.

Теорема 3 дає необхідні, але, як показує наступний приклад, не достатні умови збереження розмірності Гаусдорфа–Безиковича.

Приклад. Побудуємо ймовірнісну міру μ наступним чином.

Нехай $\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} = \left[\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{3^i}, \frac{1}{3^k} + \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{3^i}\right]$ — трійковий циліндр k-го рангу. Покладемо $\mu(\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}) = \frac{1}{4^k}$, якщо $\alpha_j \in \{0,2\}, j \in \{1,2,\ldots,k\}$, і міра μ рівномірно розподілена на відрізках Δ^3_1, $\Delta^3_{\alpha_1 1}$, $\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2 1}, \ldots, \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 1}$, $\alpha_j \in \{0,2\}, j \in \{1,2,\ldots,k\}$ з $\mu(\Delta^3_1) = \frac{1}{2}$, $\mu(\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 1}) = \frac{1}{4^k}\frac{1}{2}$. Очевидно, що F_μ лінійно зростає на всіх інтервалах, суміжних до множини Кантора і сума приростів функції на цих інтервалах дорівнює 1. Тому F_μ є строго зростаючою *абсолютно неперервною* функцією, і, отже, μ є мірою зовнішньо-точної розмірності 1. З іншого боку, F_μ-образом множини Кантора C_0 є абсолютно самоподібна множина [4, 9], яка породжується наступною системою ітерованих функцій [9]: $f_1(x) = \frac{1}{4}x$, $f_2(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$. Тому $\alpha_0(F_\mu(C_0)) = \frac{\ln 2}{\ln 4} = \frac{1}{2} \neq \frac{\ln 2}{\ln 3} = \alpha_0(C_0)$.

Зауваження 2. Щойно побудована міра μ є ймовірнісною мірою, що відповідає випадковій величині $\eta = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k}{3^k}$, де $\{\eta_k\}$ — послідовність *залежних* випадкових величин таких, що η_k набуває значень 0, 1 та 2 з імовірностями $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ відповідно при $|\eta_1 - 1| \cdot |\eta_2 - 1| \cdot \ldots \cdot |\eta_{k-1} - 1| = 0$; і η_k набуває значень 0, 1 та 2 з імовірностями $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ відповідно при $|\eta_1 - 1| \cdot |\eta_2 - 1| \cdot \ldots \cdot |\eta_{k-1} - 1| = 1$.

4. Нехай ξ — випадкова величина з *незалежними* s-адичними цифрами, тобто $\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{s^k}$, де $\{\xi_k\}$ — послідовність *незалежних* випадкових величин, які набувають значень $0, 1, \ldots, s-1$ з імовірностями $p_{0k}, p_{1k}, \ldots, p_{s-1,k}$ відповідно ($p_{ik} > 0$, $\sum\limits_{i=0}^{s-1} p_{ik} = 1$).

Властивості (включаючи фрактальні) відповідної ймовірнісної міри добре вивчені (див. [4, 5, 10]). У роботах [2, 6, 12] досліджувались DP-властивості функції F_μ. Відомо, зокрема, що будь-яка абсолютно неперервна функція розподілу з даного класу зберігає розмірність Гаусдорфа–Безиковича, а також існують сингулярно неперервні DP-функції розподілу. Для випадку, коли всі елементи p_{ik} стохастичної матриці відокремлені від нуля деякою додатною сталою, доведено, що функція розподілу випадкової величини з *незалежними* s-адичними цифрами має DP-властивість тоді і тільки тоді, коли гаусдорфова розмірність відповідної ймовірнісної міри μ_ξ дорівнює 1. У [2] показано, що умова відокремленості ймовірностей p_{ik} від нуля є суттєвою для правильності попереднього твердження.

Основною метою даного розділу (і статті в цілому) є знаходження *необхідних і достатніх* умов збереження розмірності Гаусдорфа–Безиковича підмножин одиничного відрізка строго зростаючою неперервною функцією розподілу F_ξ випадкової величини з *незалежними* s-адичними цифрами (без додаткових обмежень на відокремленість p_{ik} від нуля).

Нехай $p_k = \min\limits_i p_{ik}$, і $M^{(1)} = \left\{k : k \in \mathbb{N}, p_k < \frac{1}{2s}\right\}$, $M_k^{(1)} = M^{(1)} \cap \{1, 2, \ldots, k\}$. Позначимо

$$A := \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\sum\limits_{j \in M_k^{(1)}} \ln p_j}{-k \ln s}.$$

Теорема 4. *Неперервна строго зростаюча функція розподілу F_ξ випадкової величини з незалежними s-адичними цифрами зберігає розмірність Гаусдорфа–Безиковича всіх підмножин одиничного відрізка тоді і тільки тоді, коли $\dim_H \mu_\xi = 1$ і $A = 0$.*

Доведення. Відомо (див. [5]), що $\dim_H \mu_\xi = \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{h_1+h_2+\ldots+h_k}{k \ln s}$, де $h_k = -\sum\limits_{i=0}^{s-1} p_{ik} \ln p_{ik}$ — ентропія випадкової величини ξ_k, $k \in \mathbb{N}$. Як випливає з теореми 3, рівність $\dim_H \mu_\xi = 1$ є необхідною умовою належності F_ξ до DP-класу. Тому для доведення теореми досить показати, що при виконанні умови $\dim_H \mu_\xi = 1$ функція розподілу F_ξ зберігає розмірність Гаусдорфа–Безиковича тоді і тільки тоді, коли $A = 0$.

Виберемо і зафіксуємо довільне $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{7s}\right)$. Множину

$$M^-_{\varepsilon,k} = \left\{ j : j \in \mathbb{N}, j \leq k, \left| p_{ij} - \frac{1}{s} \right| > \varepsilon \text{ для деякого } i \in N^0_{s-1} \right\}$$

можна зобразити у вигляді: $M^-_{\varepsilon,k} = M_k^{(1)} \bigcup M_{\varepsilon,k}$, де множина $M_k^{(1)}$ означена вище, а $M_{\varepsilon,k} = M^-_{\varepsilon,k} \setminus M_k^{(1)} = \left\{ j : j \in \mathbb{N}, j \leq k; p_j \geq \frac{1}{7s}, \left| p_{ij} - \frac{1}{s} \right| > \varepsilon\right.$ для деякого $\left. i \in N^0_{s-1} \right\}$. З умови $\dim_H \mu_\xi = 1$ випливає, що $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{|M_k^{(1)}|}{k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{|M_{\varepsilon,k}|}{k} = 0$.

а) Оскільки $A \geq 0$, то з умови $A = 0$ випливає існування границі $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\sum_{j \in M_k^{(1)}} \ln p_j}{-k \ln s} = 0$. Для довільного $x \in [0, 1]$ і для заданого $\varepsilon > 0$ маємо

$$\frac{\ln\mu(\Delta^s_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})}{\ln\lambda(\Delta^s_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})}=\frac{\sum\limits_{j\in M^+_{\varepsilon,k}}\ln p_{\alpha_j(x)j}+\sum\limits_{j\in M_{\varepsilon,k}}\ln p_{\alpha_j(x)j}+\sum\limits_{j\in M^{(1)}_k}\ln p_{\alpha_j(x)j}}{-k\ln s}.$$

Більше того,

$$\frac{\sum\limits_{j\in M^+_{\varepsilon,k}}\ln p_{\alpha_j(x)j}}{-k\ln s}\in\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{s}+\varepsilon\right)}{-\ln s}\ ,\ \frac{\ln\left(\frac{1}{s}-\varepsilon\right)}{-\ln s}\right)\ \text{для довільного } \varepsilon\in\left(0,\frac{1}{7s}\right)$$

і довільного $k\in\mathbb{N}$;

$$\frac{\sum\limits_{j\in M_{\varepsilon,k}}\ln p_{\alpha_j(x)j}}{-k\ln s}=\frac{|M_{\varepsilon,k}|}{k}\cdot\frac{\ln(b_{\varepsilon,k})}{-\ln s}\quad\text{для деякого } b_{\varepsilon,k}\in\left[\frac{1}{7s},1-\frac{1}{7s}\right].$$

Отже, $\frac{\sum\limits_{j\in M_{\varepsilon,k}}\ln p_{\alpha_j(x)j}}{-k\ln s}\to 0$ $(k\to\infty)$, оскільки $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|M_{\varepsilon,k}|}{k}=0$. Підсумовуючи, отримаємо $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\ln\mu(\Delta^s_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})}{\ln\lambda(\Delta^s_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})}=1$ для всіх $x\in[0,1]$, і, отже, за теоремою 1, $\alpha_0(E)=\alpha_0(F_\xi(E))$, $\forall E\subset[0,1]$.

b) Нехай тепер $A>0$. Для того, щоб довести, що F_ξ не зберігає розмірність Гаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку, розглянемо множину $L=\{x: x=\Delta^s_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots}; \alpha_k\in N^0_{s-1}$ при $k\notin M^{(1)}; \alpha_k=n_k$ при $\in M^{(1)}$, де $p_{n_k k}=\min\limits_i p_{ik}\}$. Очевидно, що $\lambda(L)=0$. З іншого боку, $\alpha_0(L)=1$, оскільки $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|M^{(1)}_k|}{k}=0$. З рівності $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\frac{\sum\limits_{j\in M^{(1)}_k}\ln p_j}{-k\ln s}=A$ випливає існування підпослідовності $\{k_m\}$ такої, що границя $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{\sum\limits_{j\in M^{(1)}_{k_m}}\ln p_j}{-k_m\ln s}$ існує і дорівнює A. Таким чином, для кожного $x\in L$ виконується рівність

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\ln\mu(\Delta^s_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)})}{\ln\lambda(\Delta^s_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)})}=1+A.$$

Отже, для довільного $\delta>0$ існує $m(\delta)$ таке, що для всіх $m>m(\delta)$ маємо

$$1+A-\delta\le\frac{\ln\mu(\Delta^s_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)})}{\ln\lambda(\Delta^s_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)})}\le 1+A+\delta,$$

що еквівалентно виконанню подвійної нерівності

$$\lambda(\Delta^s_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)})^{1+A+\delta} \le \mu(\Delta^s_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)}) \le \lambda(\Delta^s_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)})^{1+A-\delta}.$$

Таким чином, для довільної точки $x \in L$, для довільного $\delta > 0$ і для довільного $m > m(\delta)$ маємо

$$d(\Delta^{s\,\prime}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)})^{\frac{1}{1+A-\delta}} \le d(\Delta^s_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)}), \qquad (2)$$

де $\Delta^{s\,\prime}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)} = F_\xi(\Delta^s_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)})$ і $d(\cdot)$ означає діаметр множини. Виберемо тепер $\delta \in (0, A)$. З рівності $\lambda(L) = 0$ випливає, що передміра Гаусдорфа $H^1_\varepsilon(L) = 0$ для довільного додатного ε. Отже, для заданих $\varepsilon > 0$ і $t > 0$ існує ε-покриття $\{E_i\}$ множини L s-адичними циліндрами рангу k_m (m залежить від ε і t) такими, що $\sum\limits_i d(E_i) < t$.

Сім'я множин $\{E_i^{'}\} = \{F_\xi(E_i)\}$ утворює $\varepsilon^{'}$-покриття множини $L^{'} = F_\xi(L)$. Очевидно, що $\varepsilon^{'} \to 0 \Leftrightarrow \varepsilon \to 0$, оскільки функція F_ξ є рівномірно неперервною на одиничному відрізку.

Без втрати загальності подальших міркувань можна розглядати лише ті E_i, які мають непорожній перетин з L. Отже, з (2) випливає, що

$$\sum_i \left[d(E_i^{'})\right]^{\frac{1}{1+A-\delta}} \le \sum_i d(E_i) < t.$$

Оскільки δ можна вибрати як завгодно малим, то $H^{\frac{1}{1+A-\delta}}_{\varepsilon^{'}}(L') = 0$ для всіх $\varepsilon^{'} > 0$. Тому міра Гаусдорфа $H^{\frac{1}{1+A-\delta}}(L') = 0$, і, отже, $\alpha_0(L') \le \frac{1}{1+A-\delta} < 1$. Таким чином, з нерівності $A > 0$ випливає, що F_ξ не належить до DP-класу.

Подяка. Дослідження частково виконані за сприяння математичного Інституту імені Фелікса Гаусдорфа (Bonn), фонду Олександра Гумбольдта та DFG (проект DFG 436 UKR 113/78,80). Автор висолює глибоку вдячність професорам Ювалу Пересу (University of California, Berkeley) та Миколі Працьовитому (НПУ імені Драгоманова, Київ) за обговорення проблем, пов'язаних з DP-перетвореннями.

[1] *Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Аналітичне (символьне) представлення неперервних перетворень R^1, що зберігають розмірність Хаусдорфа–Безиковича // Наукові Записки НПУ. Математика, **4**(2003). – С. 207–215.

[2] *Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Фрактальна геометрія та перетворення, що зберігають розмірність Хаусдорфа–Безиковича // Праці першого українського математичного конгресу (Динамічні системи), (2003). – С. 77–93.

[3] *Торбін Г.М.* Мультифрактальний аналіз сингулярно неперервних ймовірнісних мір // Укр. мат. журн., **57** (2005), № 5. – С. 837–857.

[4] *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – Наукова думка, Київ, 1992.

[5] *Albeverio S., Torbin G.* Fractal properties of singularly continuous probability distributions with independent Q*-digits // Bull. Sci. Math., **129** (2005), no. 4. – P. 356–367.

[6] *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension // Ergodic Theory and Dynamical Systems, **24** (2004). – P. 1–16.

[7] *Billingsley P.* Ergodic theory and information. – John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1965.

[8] *Billingsley P.* Hausdorff dimension in probability theory II // Ill. J. Math., **5** (1961). – P. 291–198.

[9] *Falconer K.J.* Fractal geometry. – John Wiley & Sons, 1990.

[10] *Marsaglia G.* Random variables with independent binary digits // Ann. Math. Statist., **42** (1971). – P. 1922–1929.

[11] *Sauer T.D., Yorke J.A.* Are the dimensions of a set and its image equal under typical smooth functions? // Ergodic Theory Dynam. Systems, **17** (1997). – P. 941–956.

[12] *Torbin G.* Probability distributions with independent Q-symbols and transformations preserving the Hausdorff dimension // Theory of Stochastic Processes, **12** (28) (2006), No. 3–4. – P. 73–84.

PROBABILISTIC APPROACH TO TRANSFORMATIONS PRESERVING THE FRACTAL DIMENSION

Grygoriy TORBIN

Dragomanov National Pedagogical University,
9 Pyrogova Str., Kyiv 01601, Ukraine

We study relations between multifractal properties of probability measures and the Hausdorff–Besicovitch dimension preservation under the corresponding probability distribution functions. General sufficient resp. necessary conditions for distribution functions to belong to the class of transformations preserving the fractal dimension (DP-class) are found. We have also proven necessary and sufficient conditions for probability distribution functions of random variables with independent s-adic digits to be in DP-class.