ІДЕНТИФІКАЦІЯ КОЕФІЦІЄНТА ПРИ ПОХІДНІЙ ЗА ЧАСОМ У КВАЗІЛІНІЙНОМУ ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ

©*2007 р. Уляна ФЕДУСЬ*

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, Львів 79000

Редакція отримала статтю 15 серпня 2007 р.

Встановлено умови локального існування та глобальної єдиності розв'язку оберненої задачі визначення невідомого, залежного від часу, коефіцієнта у випадку одновимірного квазілінійного параболічного рівняння.

Вступ. Формулювання задачі. У цій роботі досліджується обернена задача визначення коефіцієнта $c(t) > 0$ для рівняння

$$c(t)u_t = a(x,t,u)u_{xx} + b(x,t,u,u_x), \quad (x,t) \in Q_T = (0,h) \times (0,T), \quad (1)$$

у випадку першої крайової задачі та із заданим значенням теплового потоку на одному з кінців проміжку в якості додаткової умови. Серед невеликого списку обернених задач, пов'язаних із дослідженням квазілінійних рівнянь з невідомими коефіцієнтами, можна зазначити роботи М.В.Музильова [2, 3], який встановив єдиність розв'язку задачі у випадку нелінійного рівняння

$$c(u)u_t = (k(u)u_x)_x + d(u)u_x, \quad 0 < x < 1, \quad t \in [0,T],$$

з невідомими коефіцієнтами $c(u)$, $k(u)$, $d(u)$. Обернена задача для нелінійного рівняння дифузії

$$u_t = (a(u)u_x)_x + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T = \{0 < x < h(t), 0 < t < T < \infty\},$$

УДК 517.95; MSC 2000: 35N40, 35J60

в області з невідомою межею $h(t)$ розглянута в роботі М.І.Іванчова [8]. Серед обернених квазілінійних задач відомими є роботи [10, 11], в яких досліджено умови стійкості розв'язку для рівняння

$$u_t = b(t)c(u)u_{xx}, \quad x > 0, \quad 0 < t < T,$$

та умови його коректності у випадку рівняння

$$u_t = [v(u(x,t))u_x]_x + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T.$$

з невідомими b та v відповідно.

В області $Q_T = (0,h) \times (0,T)$ розглядаємо задачу про визначення невідомого коефіцієнта $c(t) > 0$ для рівняння (1) з початковою та крайовими умовами

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,h], \tag{2}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T] \tag{3}$$

і умовою перевизначення

$$\frac{a(0,t,\mu_1(t))}{c(t)}\, u_x(0,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Існування розв'язку задачі.

Теорема 1. *При виконанні умов*

(A1) $a \in C^{1,0,1}(\overline{Q}_T \times \mathbb{R})$, $b \in C^{1,0,1,1}(\overline{Q}_T \times \mathbb{R}^2)$, $\varphi \in C^1[0,h]$, $\mu_i \in C^1[0,T], i = 1,2$, $\mu_3 \in C[0,T]$,

(A2) $a(x,t,u) \geqslant a_0 > 0$, $|a_x(x,t,u)| + |a_u(x,t,u)| \leqslant a_1$, $(x,t,u) \in \overline{Q}_T \times \mathbb{R}$, a_1, a_0 — *додатні сталі,*

(A3) $|b(x,t,u,v)| \le \nu(|u|)(1+|v|^2)$, $(x,t) \in \overline{Q}_T, u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$, $\nu(s) > 0$ — *неспадна неперервна функція на* $[0,\infty)$, $b_u(x,t,u,0) \leqslant -\nu_0 < 0$, $(x,t,u) \in \overline{Q}_T \times \mathbb{R}$, ν_0 — *додатна стала,*

(A4) $\varphi'(x) > 0$, $x \in [0,h]$, $\mu_3(t) > 0, t \in [0,T]$,

(A5) $\varphi(0) = \mu_1(0), \varphi(h) = \mu_2(0)$,

можна вказати таке число t_0, $0 < t_0 \leqslant T$, *що розв'язок* $(c,u) \in C[0,t_0] \times C^{2,1}(Q_{t_0}) \bigcap C^{1,0}(\overline{Q}_{t_0}), c(t) > 0, t \in [0,t_0]$, *задачі* (1)–(4) *існує.*

Доведення. Щоб довести існування розв'язку, використовуватимемо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Для цього зведемо задачу (1) – (4) до системи інтегро-диференціальних рівнянь. Безпосередньо з умови (4) маємо

$$c(t) = \frac{a(0,t,\mu_1(t))u_x(0,t)}{\mu_3(t)}, \quad t \in [0,T]. \tag{5}$$

Зауважимо, що при умовах (A2), (A3) та при відомій функції $c(t)$ класичний розв'язок задачі (1), (2), (3) існує та єдиний [1, с. 32, 509].

Зафіксуємо довільну точку $y \in [0,h]$ і подамо рівняння (1) у наступному вигляді

$$c(t)u_t = a(y,t,u(y,t))u_{xx} + (a(x,t,u(x,t)) - a(y,t,u(y,t)))u_{xx} + \\ +b(x,t,u(x,t),u_x(x,t)), \quad (x,t) \in Q_T. \tag{6}$$

У припущенні, що функція $c(t)$ є відоммою, зведемо задачу (6), (2), (3) до нелінійного інтегро-диференціального рівняння

$$u(x,t) = \int_0^h \varphi(\xi)G_1(x,t,\xi,0;y)d\xi + \int_0^t \frac{a(y,\tau,u(y,\tau))}{c(\tau)}\mu_1(\tau)G_{1\xi}(x,t,0,\tau;y)d\tau - \\ - \int_0^t \frac{a(y,\tau,u(y,\tau))}{c(\tau)}\mu_2(\tau)G_{1\xi}(x,t,h,\tau;y)d\tau + \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h \big(a(\xi,\tau,u(\xi,\tau)) - \\ - a(y,\tau,u(y,\tau))\big)u_{\xi\xi}(\xi,\tau)G_1(x,t,\xi,\tau;y)d\xi + \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)} \times \\ \times \int_0^h b(\xi,\tau,u(\xi,\tau),u_\xi(\xi,\tau))G_1(x,t,\xi,\tau;y)d\xi, \tag{7}$$

де

$$G_i(x,t,\xi,\tau;y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t,y)-\theta(\tau,y))}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\exp\Big(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t,y)-\theta(\tau,y))}\Big) + \right. \\ \left. + (-1)^i \exp\Big(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t,y)-\theta(\tau,y))}\Big)\right), \; i=1,2, \; \theta(t,y) = \int_0^t \frac{a(y,\tau,u(y,\tau))}{c(\tau)}\,d\tau.$$

Зауважимо, що функції Гріна $G_i(x,t,\xi,\tau;y), i = 1,2$, залежать як від параметра y, бо вони є розв'язком рівняння

$$c(t)z_t = a(y,t,z(y,t))z_{xx},$$

так і від невідомих c, u, що містяться в функції $\theta(t,y)$. Для спрощення позначень, залежність від останніх не писатимемо.

Враховуючи співвідношення

$$G_{1\xi}(x,t,\xi,\tau;y)=-G_{2x}(x,t,\xi,\tau;y), \quad G_{1xx}(x,t,\xi,\tau;y)=G_{1\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;y),$$

$$G_{2xx}(x,t,\xi,\tau;y)=-\frac{c(\tau)}{a(y,\tau,u(y,\tau))}\,G_{2\tau}(x,t,\xi,\tau;y),$$

та

$$\int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h \big(a(\xi,\tau,u(\xi,\tau))-a(y,\tau,u(y,\tau))\big)u_{\xi\xi}(\xi,\tau)G_{1x}(x,t,\xi,\tau;y)d\xi=$$
$$=\int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h \big(a(\xi,\tau,u(\xi,\tau))-a(y,\tau,u(y,\tau))\big)u_{\xi}(\xi,\tau)G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;y)d\xi+$$
$$+\int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h \big(a_\xi(\xi,\tau,u(\xi,\tau))+a_u(\xi,\tau,u(\xi,\tau))u_\xi(\xi,\tau)\big)u_\xi(\xi,\tau)\times$$
$$\times\, G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau;y)d\xi,$$

обчислимо першу похідну з (7). Тоді, зафіксувавши $y=x$, отримаємо

$$u_x(x,t)=\int_0^h \varphi'(\xi)G_2(x,t,\xi,0;x)d\xi-\int_0^t \mu_1'(\tau)G_2(x,t,0,\tau;x)d\tau+\int_0^t \mu_2'(\tau)\times$$
$$\times\, G_2(x,t,h,\tau;x)d\tau+\int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h b(\xi,\tau,u(\xi,\tau),u_\xi(\xi,\tau))G_{1x}(x,t,\xi,\tau;x)d\xi+$$
$$+\int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h \big(a(\xi,\tau,u(\xi,\tau))-a(x,\tau,u(x,\tau))\big)u_\xi(\xi,\tau)G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;x)d\xi+$$
$$+\int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h \big(a_\xi(\xi,\tau,u(\xi,\tau))+a_u(\xi,\tau,u(\xi,\tau))u_\xi(\xi,\tau)\big)u_\xi(\xi,\tau)\times$$
$$\times\, G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau;x)d\xi. \tag{8}$$

З властивостей теплових потенціалів [5] та з рівності

$$u(x,t)=\mu_1(t)+\int_0^x u_\xi(\xi,\tau)d\xi,$$

можна зробити висновок, що задача (1)–(4) еквівалентна системі рівнянь (5), (8) відносно невідомих c, u_x.

Для того, щоб застосувати теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора, необхідно встановити оцінки зверху та знизу розв'язків системи (5), (8). Якщо розглянути задачу

$$c(t)u_t=a(y,t,u(y,t))u_{xx},$$
$$u(x,t)|_{t=0}=1, \quad u_x(0,t)=0, \quad u_x(h,t)=0,$$

то для довільного $y \in [0,h]$ розв'язком цієї задачі буде

$$u(x,t) = \int_0^h G_2(x,t,\xi,0;y)d\xi = 1.$$

Звідси

$$0 < C_1 = \min_{[0,h]} \varphi'(x) \leqslant \int_0^h \varphi'(\xi) G_2(x,t,\xi,0;x)\, d\xi \leqslant \max_{[0,h]} \varphi'(x) = C_2. \quad (9)$$

Серед доданків, що входять в u_x, всі, окрім першого, прямують до нуля при $t \to 0$. Тому існує такий проміжок $[0,T_0]$, $0 < T_0 \leqslant T$, на якому буде виконуватись нерівність

$$\frac{1}{2}\int_0^h \varphi'(\xi) G_2(x,t,\xi,0;x)d\xi \geqslant \int_0^t \mu_1'(\tau) G_2(x,t,0,\tau;y)d\tau - \int_0^t G_2(x,t,h,\tau;x)\times$$
$$\times \mu_2'(\tau)d\tau - \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)} \int_0^h b(\xi,\tau,u(\xi,\tau),u_\xi(\xi,\tau)) G_{1x}(x,t,\xi,\tau;x)d\xi - \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}\times$$
$$\times \int_0^h \big(a(\xi,\tau,u(\xi,\tau)) - a(x,\tau,u(x,\tau))\big) u_\xi(\xi,\tau) G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;x)d\xi - \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}\times$$
$$\times \int_0^h \big(a_\xi(\xi,\tau,u(\xi,\tau)) + a_u(\xi,\tau,u(\xi,\tau)) u_\xi(\xi,\tau)\big) u_\xi(\xi,\tau) G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau;x)d\xi,$$

звідки маємо

$$u_x(0,t) = \int_0^h \varphi'(\xi) G_2(0,t,\xi,0;0)d\xi - \Big(\int_0^t \mu_1'(\tau) G_2(0,t,0,\tau;0)d\tau - \int_0^t \mu_2'(\tau)\times$$
$$\times G_2(0,t,h,\tau;0)d\tau - \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)} \int_0^h b(\xi,\tau,u(\xi,\tau),u_\xi(\xi,\tau)) G_{1x}(0,t,\xi,\tau;0)d\xi -$$
$$- \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)} \int_0^h \big(a(\xi,\tau,u(\xi,\tau)) - a(0,\tau,\mu_1(\tau))\big) u_\xi(\xi,\tau) G_{2\xi\xi}(0,t,\xi,\tau;0)d\xi -$$
$$- \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)} \int_0^h \big(a_\xi(\xi,\tau,u(\xi,\tau)) + a_u(\xi,\tau,u(\xi,\tau)) u_\xi(\xi,\tau)\big) u_\xi(\xi,\tau)\times$$
$$\times G_{2\xi}(0,t,\xi,\tau;0)d\xi \geqslant \frac{1}{2}\int_0^h \varphi'(\xi) G_2(0,t,\xi,0;0)d\xi \geqslant \frac{1}{2}\min_{[0,h]} \varphi'(x) \quad (10)$$

або

$$u_x(0,t) \geqslant \frac{C_2}{2} > 0, \quad t \in [0,T_0].$$

Тоді з (5) та припущень (A4) отримаємо

$$c(t) \geqslant A_0 > 0, \quad t \in [0,T_0], \quad (11)$$

де константа A_0 залежить тільки від відомих величин.

Оскільки, за теоремою Лагранжа

$$b(x,t,u,u_x) = b_0(x,t,u,u_x)u_x + b_1(x,t,u)u + b(x,t,0,0)$$

де b_0, b_1 визначаються через похідні b_v, b_u, то рівняння (1) можна переписати у формі

$$c(t)u_t = a(x,t,u)u_{xx} + b_0(x,t,u,u_x)u_x + b_1(x,t,u)u + b(x,t,0,0),$$

що дає змогу, за припущення (A3), застосувати принцип максимуму [1] для оцінки розв'язку першої крайової задачі:

$$|u(x,t)| \leqslant C_3, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T. \tag{12}$$

Перейдемо до оцінки $v = u_x$. З відомих співвідношень [7, с. 12]

$$\int_0^h G_2(x,t,\xi,0;x)\,d\xi = 1,\ G_2(x,t,\xi,\tau;x) \leqslant C_4 + \frac{C_5}{\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}} \tag{13}$$

маємо

$$\left|\int_0^h \varphi'(\xi)G_2(x,t,\xi,0;x)d\xi - \int_0^t \mu_1'(\tau)G_2(x,t,0,\tau;x)d\tau + \int_0^t \mu_2'(\tau)\times\right.$$
$$\left.\times\, G_2(x,t,h,\tau;x)d\tau\right| \leqslant C_6 + C_7\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}.$$

Нехай $V(t) = \max\limits_{x\in[0,h]}|v(x,t)|$. Використовуючи умову (A3) [1], оцінку $u(x,t)$ та $\theta(t,x)$, отримаємо

$$\left|\int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h b(\xi,\tau,u(\xi,\tau),v(\xi,\tau))G_{1x}(x,t,\xi,\tau;x)d\xi\right| \leqslant C_8\times$$
$$\times\int_0^t \frac{1+V^2(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}\,d\tau \leqslant C_9 + C_{10}\int_0^t \frac{V^2(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}\,d\tau.$$

Оскільки, за теоремою Лагранжа

$$f(x)-f(y) = \int_0^1 \frac{d}{d\alpha}(f(y+\alpha(x-y)))d\alpha = (x-y)\int_0^1 f'(z)|_{z=y+\alpha(x-y)}d\alpha, \tag{14}$$

то

$$|a(\xi,\tau,u(\xi,\tau))-a(x,\tau,u(x,\tau))|\leqslant C_{11}|\xi-x|+C_{12}|u(\xi,\tau)-u(x,\tau))|\leqslant$$
$$\leqslant (C_{11}+C_{12}V(\tau))|\xi-x|,$$

де сталі C_{11}, C_{12} визначаються через похідні a_x, a_u. Тоді

$$\Big|\int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h \big(a(\xi,\tau,u(\xi,\tau))-a(y,\tau,u(x,\tau))\big)v(\xi,\tau)G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;x)d\xi+$$
$$+\int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h \big(a_\xi(\xi,\tau,u(\xi,\tau))+a_u(x,\tau,u(x,\tau))v(\xi,\tau)\big)v(\xi,\tau)\times$$
$$\times G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau;x)d\xi\Big|\leqslant C_{13}\int_0^t \frac{V^2(\tau)}{c(\tau)}\,d\tau\int_0^h|\xi-x||G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;x)|d\xi+$$
$$+C_{14}\int_0^t \frac{V(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}\,d\tau+C_{15}\int_0^t \frac{V^2(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}\,d\tau.$$

Використовуючи оцінку [4]

$$\int\limits_0^h|\xi-x||G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;x)|d\xi\leqslant\frac{C_{16}}{\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}},$$

отримаємо

$$\Big|\int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h \big(a(\xi,\tau,u(\xi,\tau))-a(y,\tau,u(x,\tau))\big)v(\xi,\tau)G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;x)d\xi+$$
$$+\int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h \big(a_\xi(\xi,\tau,u(\xi,\tau))+a_u(x,\tau,u(x,\tau))v(\xi,\tau)\big)v(\xi,\tau)G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau;x)\times$$
$$\times d\xi\Big|\leqslant C_{17}\int_0^t \frac{V(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}\,d\tau+C_{18}\int_0^t \frac{V^2(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}\,d\tau.$$

Підсумовуючи оцінки всіх інтегралів з (8), приходимо до нерівності

$$V(t)\leqslant C_{19}+C_{20}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}+C_{21}\int_0^t \frac{V(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\,d\tau+$$
$$+C_{22}\int_0^t \frac{V^2(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\,d\tau,$$

де $\theta(t)=\int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}$. Оскільки з рівності (5) випливає нерівність

$$c(t)\leqslant C_{23}V(t),$$

то враховуючи оцінку $\theta(t,x)$ та виконуючи заміну $\widetilde{V}(t) = V(t)+1$, цю нерівність можна переписати у вигляді

$$\widetilde{V}(t) \leqslant C_{24} + C_{25}\int_0^t \frac{\widetilde{V}^2(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\,d\tau.$$

Підносячи до квадрату обидві частини отриманої нерівності, застосовуючи нерівність Коші, а потім Гельдера, зведемо її до такого вигляду:

$$\widetilde{V}^2(t) \leqslant C_{26} + C_{27}\int_0^t \frac{\widetilde{V}^4(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\,d\tau.$$

Покладемо в цій нерівності $t=\sigma$, домножимо на $\dfrac{1}{c(\sigma)\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}}$ та проінтегруємо від 0 до t. Використовуючи рівність

$$\int_0^t \frac{d\sigma}{c(\sigma)\sqrt{(\theta(t)-\theta(\sigma))(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}} = \pi$$

та оцінку $c(t)$ знизу, приходимо до нерівності

$$\widetilde{V}^2(t) \leqslant C_{28} + C_{29}\int_0^t \widetilde{V}^4(\tau)d\tau.$$

Позначимо $V_1(t) = C_{28} + C_{29}\displaystyle\int_0^t \widetilde{V}^4(\tau)d\tau$ і застосуємо метод доведення нерівності Ґронуола: $V_1'(t) = C_{29}\widetilde{V}^4(t) \leqslant C_{29}V_1^2(t)$, або, інтегруючи,

$$\frac{1}{3C_{28}^3} - \frac{1}{3V_1^3(t)} \leqslant C_{29}t.$$

Звідси, в припущенні, що $1-3C_{29}C_{28}^3 t > 0$ при $t\in[0,T_1]$, $0<T_1\leqslant T$, маємо оцінку

$$V_1(t) \leqslant C_{30}, \quad t\in[0,T_1],$$

а, отже, і оцінку $V(t)$ та $c(t)$:

$$V(t) \leqslant C_{31}, \quad t\in[0,T_1], \quad c(t)\leqslant A_1<\infty, \quad t\in[0,T_0]. \tag{15}$$

Зауважимо, що нерівність

$$\Bigl|\int_0^t \mu_1'(\tau)G_2(0,t,0,\tau;0)d\tau - \int_0^t \mu_2'(\tau)G_2(0,t,h,\tau;0)d\tau - \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}\times$$

$$\times\int_0^h b(\xi,\tau,u(\xi,\tau),v(\xi,\tau))G_{1x}(0,t,\xi,\tau;0)d\xi-\int_0^t\frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h\big(a_\xi(\xi,\tau,u(\xi,\tau))+$$

$$+a_u(\xi,\tau,u(\xi,\tau))u_\xi(\xi,\tau)\big)u_\xi(\xi,\tau)G_{2\xi}(0,t,\xi,\tau;0)d\xi-\int_0^t\frac{d\tau}{c(\tau)}\times$$

$$\times\int_0^h\big(a(\xi,\tau,u(\xi,\tau))-a(0,\tau,u(0,\tau))\big)u_\xi(\xi,\tau)G_{2\xi\xi}(0,t,\xi,\tau;0)d\xi\Bigg|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\min_{x\in[0,h]}\varphi'(x)$$

виконується на $[0,T_0]$ і, маючи оцінки c та v, T_0 визначається лише через вихідні дані. Вибираючи $t_0=\min\{T_0,T_1\}$, маємо оцінки c та v на проміжку $[0,t_0]$.

У встановлених оцінках $C_i(i=\overline{1,31}), A_0, A_1$ — відомі величини. Отже, оцінки розв'язків системи (5), (8) встановлені, що дає змогу застосувати теорему Шаудера до цієї системи. Нехай $\mathcal{N}=\{(c,v)\in C[0,t_0]\times(C^{1,1}(Q_{t_0}\cap C(\overline{Q}_{t_0})):0<A_0\leqslant c(t)\leqslant A_1,|v(x,t)|\leqslant C_{30}\}$. Тоді, якщо записати систему (5), (8) у операторному вигляді

$$\omega=P\omega,$$

то оператор P, який визначається правими частинами даної системи, переводить множину $\mathcal{N}$ в себе. Компактність оператора вигляду P встановлена у [7, с.27]. Застосовуючи теорему Шаудера до оператора P, отримуємо існування неперервного розв'язку системи рівнянь (5), (8), а, отже, й існування розв'язку задачі (1)–(4).

Єдиність розв'язку задачі. Встановимо єдиність розв'язку задачі для рівняння

$$c(t)u_t=a(x,t,u,u_x)u_{xx}+b(x,t,u,u_x),\quad (x,t)\in Q_T, \tag{16}$$

з умовами (2), (3) та

$$\frac{a(0,t,\mu_1(t),u_x(0,t))}{c(t)}u_x(0,t)=\mu_3(t),\quad t\in[0,T]. \tag{17}$$

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*
1) $a,a_u,a_v,b,b_u,b_v\in C(\overline{Q}_T\times\mathbb{R}^2)$, *і ці функції задовольняють умову Гельдера з деяким показником* $\gamma, 0<\gamma<1$ *за змінними* x,u *та* v;
2) $\mu_3(t)\neq 0,\ t\in[0,T]$.

Тоді розв'язок задачі (2), (3), (16), (17) *єдиний.*

Доведення. Припустимо, що існують два розв'язки (c_1,u_1) і (c_2,u_2) з класу $C[0,T]\times C^{2,1}(Q_T)\bigcap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, задачі (2), (3), (16), (17). Покладемо $c=c_1-c_2$, $u=u_1-u_2$. Запишемо задачу для (c,u):

$$c_1(t)u_t=a(x,t,u_1,u_{1x})u_{xx}+(a(x,t,u_1,u_{1x})-a(x,t,u_2,u_{2x}))u_{2xx}+$$
$$+b(x,t,u_1,u_{1x})-b(x,t,u_2,u_{2x})-c(t)u_{2t}, \tag{18}$$
$$u(x,0)=0,\quad u(0,t)=u(h,t)=0, \tag{19}$$
$$\frac{a(0,t,\mu_1(t),u_{1x}(0,t))}{c_1(t)}u_{1x}(0,t)-\frac{a(0,t,\mu_1(t),u_{2x}(0,t))}{c_2(t)}u_{2x}(0,t)=0. \tag{20}$$

Перетворимо праву частину у (18), застосувавши формулу (14) до різниць $b(x,t,u_1,u_{1x})-b(x,t,u_2,u_{2x})$ та $a(x,t,u_1,u_{1x})-a(x,t,u_2,u_{2x})$. Оскільки u_1,u_2 — відомі функції від (x,t), то отримане після перетворення рівняння (18) запишемо у вигляді

$$c_1(t)u_t=a_1(x,t)u_{xx}+a_2(x,t)u_x+a_3(x,t)u-c(t)u_{2t}, \tag{21}$$

де коефіцієнти $a_i, i=1,2,3$, визначаються через a,a_u,a_v,b_u,b_v. Перетворимо ліву частину умови (20):

$$a(0,t,\mu_1(t),u_{1x}(0,t))c_2(t)u_{1x}(0,t)-a(0,t,\mu_1(t),u_{2x}(0,t))c_1(t)u_{2x}(0,t)=$$
$$=a(0,t,\mu_1(t),u_{1x}(0,t))c_2(t)u_x(0,t)-a(0,t,\mu_1(t),u_{1x}(0,t))c(t)u_{2x}(0,t)+$$
$$+\left(a(0,t,\mu_1(t),u_{1x}(0,t))-a(0,t,\mu_1(t),u_{2x}(0,t))\right)c_1(t)u_{2x}(0,t).$$

Використовуючи формулу (14) та умову (17), отримаємо умову (20) у вигляді

$$\frac{a(0,t,\mu_1(t),u_{1x}(0,t))\mu_3(t)c_2(t)}{a(0,t,\mu_1(t),u_{2x}(0,t))}c(t)-c_2(t)\Bigg(a(0,t,\mu_1(t),u_{1x}(0,t))+$$
$$+\frac{c_1(t)\mu_3(t)\int_0^1 a_z(0,t,\mu_1(t),z)|_{z=u_{2x}(0,t)+\alpha(u_{1x}(0,t)-u_{2x}(0,t))}d\alpha}{a(0,t,\mu_1(t),u_{2x}(0,t))}\Bigg)u_x(0,t)=0$$

або

$$a(0,t,\mu_1(t),u_{1x}(0,t))\mu_3(t)c_2(t)c(t)-c_2(t)\Bigg(a(0,t,\mu_1(t),u_{1x}(0,t))\times$$
$$a(0,t,\mu_1(t),u_{2x}(0,t))+\int_0^1 a_z(0,t,\mu_1(t),z)|_{z=u_{2x}(0,t)+\alpha(u_{1x}(0,t)-u_{2x}(0,t))}d\alpha\times$$
$$\times c_1(t)\mu_3(t)\Bigg)u_x(0,t)=0. \tag{22}$$

За допомогою функції Гріна $\widetilde{G}_1(x,t,\xi,\tau)$ рівняння (21) запишемо розв'язок задачі (19), (21):

$$u(x,t) = -\int_0^t \frac{c(\tau)}{c_1(\tau)}\, d\tau \int_0^h u_{2\tau}(\xi,\tau)\widetilde{G}_1(x,t,\xi,\tau)d\xi. \tag{23}$$

Зауважимо, що за умови належності коефіцієнтів $a_i, i = 1,2,3$, рівняння (21) до класу Гельдера за змінною x, функція Гріна $\widetilde{G}_1(x,t,\xi,\tau)$ існує. Диференціюючи (23) за x і підставляючи в умову перевизначення (22), прийдемо до рівності

$$a(0,t,\mu_1(t),u_{1x}(0,t))\mu_3(t)c_2(t)c(t)+c_2(t)\Bigg(a(0,t,\mu_1(t),u_{1x}(0,t))\times$$
$$a(0,t,\mu_1(t),u_{2x}(0,t))+\int_0^1 a_z(0,t,\mu_1(t),z)|_{z=u_{2x}(0,t)+\alpha(u_{1x}(0,t)-u_{2x}(0,t))}d\alpha\times$$
$$\times\, c_1(t)\mu_3(t)\Bigg)\int_0^t \frac{c(\tau)}{c_1(\tau)}\, d\tau\int_0^h u_{2\tau}(\xi,\tau)\widetilde{G}_{1x}(0,t,\xi,\tau)d\xi=0.$$

Згідно з припущенням теореми, отримане рівняння — інтегральне рівняння Вольтерра другого роду з інтегровним ядром [1, 5], яке має єдиний розв'язок $c(t) = 0$, тоді однорідна задача (18), (19) має розв'язок $u(x,t) = 0$. Теорему доведено.

[1] *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

[2] *Музылев Н.В.* Теоремы единственности для некоторых обратных задач теплопроводности // Журнал вычисл. матем и мат. физики, 1980. – Т. 20, № 2. – С. 388–400.

[3] *Музылев Н.В.* О единственности решения одной обратной задачи нелинейной теплопроводности // Журнал вычисл. матем и мат. физики, 1985. – Т. 25, № 9. – С. 1346–1352.

[4] *Федусь У.М.* Обернена задача для параболічного рівняння загального вигляду з невідомим коефіцієнтом теплоємності // Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2006. – Т. 49, № 4. – С. 40–48.

[5] *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1967.

[6] *Ivanchov M.I.* On the determination of time-dependent major coefficient in a parabolic equation // Siberian Math. J., 1998. – 39, No 3. – P. 539-550.

[7] *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. – VNTL Publishers (2003).

[8] *Ivanchov M.I.* Free boundary problem for nonlinear diffusion equation // Мат. студії, 2003. – Т. 19, № 2. – С. 156–164.

[9] *Lin Y.* An inverse problem for a class of quasilinear parabolic equations // SIAM J. Math. Anal., 22, No. 1 (1991). – P. 146–156.

[10] *Lorenzi A.* Determination of a time-dependent coefficient in a quasilinear parabolic equation // Ricerche Mat., 1983. – 32, No. 2. – P. 263–284.

[11] *Lorenzi A.* Identification of the thermal conductivity in the nonlinear heat equation // Inverse Problems, 1987. – No. 3. – P. 437–451.

[12] *Lorenzi A., Lunardi A.* An identification problem in the theory of heat conduction // Differential and integral equations, 1990. – 3, No. 5. – P. 237–252.

IDENTIFICATION OF THE COEFFICIENT NEAR THE TIME DERIVATIVE IN QUASILINEAR PARABOLIC EQUATION

Ulyana FEDUS

Ivan Franko Lviv National University,
1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine

We establish conditions of local existence and global uniqueness of the solution to inverse problem of identifying unknown time-dependent coefficient in the case of onedimensional quasilinear parabolic equation.