МЕТОД ХОРД ПРИ УЗАГАЛЬНЕНИХ УМОВАХ ЛІПШИЦЯ ДЛЯ РОЗДІЛЕНИХ РІЗНИЦЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

©2007 р. Степан ШАХНО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів 79000

Редакція отримала статтю 22 січня 2007 р.

Досліджено збіжність методу хорд для розв'язування нелінійних операторних рівнянь у банахових просторах, якщо для розділених різниць першого порядку виконується узагальнена умова Ліпшиця. Встановлено умови та швидкість збіжності цього методу, знайдено область єдиності розв'язку задачі.

1. ВСТУП

Розглянемо рівняння

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

де $F : D \subseteq X \to Y$ — нелінійний оператор, X, Y — банахові простори.

Означення. [5] *Нехай F — нелінійний оператор, визначений на множині D лінійного простору X зі значеннями в лінійному просторі Y і x, y — дві точки з D. Лінійний оператор з X в Y, позначуваний через $F(x, y)$, який задовольняє умову*

$$F(x, y)(x - y) = F(x) - F(y). \tag{2}$$

називається розділеною різницею першого порядку для оператора F за точками x і y.

Будемо вважати, що існує похідна Фреше оператора F в D, причому $F(x, x) = F'(x)$. Відомим різницевим методом розв'язування нелінійних рівнянь є метод хорд

$$x_{n+1} = x_n - (F(x_n, x_{n-1}))^{-1} F(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

УДК 519.6; MSC 2000: 65J15, 65H10

де $F(x_n, x_{n-1})$ — розділена різниця першого порядку, x_0, x_{-1} — задані точки. Метод хорд для розв'язування нелінійних операторних рівнянь в банаховому просторі досліджено в роботах [2–6], якщо розділені різниці нелінійного оператора F задовольняють умову Ліпшиця (Гельдера) з невід'ємною сталою L. У праці [7] при дослідженні методу Ньютона запропоновано узагальнені умови Ліпшиця для оператора похідної, в яких замість константи L використано деяку додатну інтегровну функцію.

У даній праці запроваджено аналогічну узагальнену умову Ліпшиця для оператора розділеної різниці першого порядку і при виконанні цієї умови досліджено збіжність методу хорд.

Будемо говорити, що для оператора розділеної різниці на множині D виконується умова Ліпшиця зі сталою L, якщо

$$\forall\, x, y, u, v \in D \quad \|F(x,y) - F(u,v)\| \le L(\|x-u\| + \|y-v\|). \tag{4}$$

Нехай $B(x_0, r) = \{x : \|x - x_0\| < r\}$ — куля радіуса r з центром в точці x_0. Будемо говорити, що для оператора розділеної різниці виконується центральна умова Ліпшиця в кулі $B(x_0, r)$ зі сталою L, якщо

$$\forall\, x, y \in B(x_0, r) \quad \|F(x,y) - F'(x_0)\| \le L(\|x-x_0\| + \|y-x_0\|). \tag{5}$$

Крім того, в умовах Ліпшиця замість сталої L можна використовувати додатну інтегровну функцію. У цьому випадку умови (4) і (5) будуть замінені відповідно на умови

$$\forall\, x, y, u, v \in D \quad \|F(x,y) - F(u,v)\| \le \int_0^{\|x-u\|+\|y-v\|} L(u)du, \tag{6}$$

$$\forall\, x, y \in B(x_0, r) \quad \|F(x,y) - F'(x_0)\| \le \int_0^{\|x-x_0\|+\|y-x_0\|} L(u)du. \tag{7}$$

Обидві умови Ліпшиця (6) і (7) називаються узагальненими умовами Ліпшиця або такими, що містять L у середньому.

2. ЗБІЖНІСТЬ МЕТОДУ ХОРД

Використовуючи теорему Банаха [1], можна отримати такий результат.

Лема 1. *Нехай F має розділені різниці $F(x,y)$ в $B(x^*, r)$, існує $F'(x^*)^{-1}$, а $F'(x^*)^{-1}F(x,y)$ задовольняє умову Ліпшиця в середньому, тобто*

$$\forall\, x, y \in B(x^*, r) \quad \|F'(x^*)^{-1}F(x,y) - I\| \le \int_0^{\varrho(x)+\varrho(y)} L(u)du,$$

де $\varrho(x) = \|x - x^*\|$, *а* L *— додатна інтегровна функція. Якщо для числа* r *виконується умова* $\int_0^{2r} L(u)du \le 1$, *то розділена різниця* $F(x, y)$ *є оборотною в кулі* $B(x^*, r)$ *і справджується оцінка*

$$\|F(x,y)^{-1}F'(x^*)\| \le \Big(1 - \int_0^{\varrho(x)+\varrho(y)} L(u)du\Big)^{-1}.$$

Доведення. Дійсно,

$$\|F(x,y)^{-1}F'(x^*)\| = \big\| [I - (I - F'(x^*)^{-1}F(x,y))]^{-1}\big\| \le$$
$$\le \Big(1 - \int_0^{\varrho(x)+\varrho(y)} L(u)du\Big)^{-1}.$$

Радіус області збіжності і порядок збіжності методу хорд описує наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай* F *— нелінійний оператор, визначений у відкритій опуклій підмножині* D *банахового простору* X *зі значеннями у банаховому просторі* Y*. Припустимо, що:*

1) рівняння $F(x) = 0$ *має розв'язок* $x^* \in B(x^*, r) \subset D$ *такий, що існує похідна Фреше* $F'(x^*)$ *і ця похідна є оборотною;*

2) F *має в* $B(x^*, r)$ *розділені різниці, які задовольняють умову Ліпшиця з усередненим* L, *тобто*

$$\forall x, y \in B(x^*, r)\ \|F'(x^*)^{-1}(F(x^*, x^*) - F(x, y))\| \le \int_0^{\varrho(x)+\varrho(y)} L(u)du, \quad (8)$$

де $\varrho(y) = \|y - x^*\|$, *а* L *— неспадна функція. Якщо* r *задовольняє нерівність*

$$\int_0^r L(u)du \left(1 - \int_0^{2r} L(u)du\right)^{-1} \le 1, \quad (9)$$

то метод хорд (3) *збігається для всіх* $x_{-1}, x_0 \in B(x^*, r)$ *і*

$$\|x_{n+1} - x_*\| \le \frac{q}{\rho(x_{_{-1}})}\|x_{n-1} - x_*\|\,\|x_n - x_*\| \le \dots$$
$$\dots \le \frac{\rho(x_{_{-1}})}{q}\Big(\frac{q}{\rho(x_{_{-1}})}\|x_0 - x_*\|\Big)^{F_n}, \quad (10)$$

де $\rho(x) = \|x - x^*\|, F_{-1} = 0, F_0 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n = 1, 2, \dots,$ *а*

$$q = \int_0^{\rho(x_{_{-1}})} L(u)du \left(1 - \int_0^{\rho(x_{_{-1}})+\rho(x_0)} L(u)du\right)^{-1} < 1. \quad (11)$$

Доведення. Виберемо довільно $x_0, x_{-1} \in B(x^*, r)$, де r задовольняє оцінку (9), тоді число q, визначене формулою (11), є меншим від 1. Дійсно, з монотонності L отримуємо

$$\Big(\frac{1}{t_2}\int_0^{t_2} - \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1}\Big)L(u)du = \Big(\frac{1}{t_2}\int_{t_1}^{t_2} + \Big(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\Big)\int_0^{t_1}\Big)L(u)du \geq$$

$$\geq L(t_1)\Big(\frac{1}{t_2}\int_{t_1}^{t_2} + \Big(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\Big)\int_0^{t_1}\Big)du = L(t_1)\Big(\frac{t_2 - t_1}{t_2} + t_1\Big(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\Big)\Big) = 0$$

для $0 < t_1 < t_2$. Отже, функція $\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t L(u)du$ є неспадною за t. Таким чином,

$$q = \frac{\displaystyle\int_0^{\rho(x_{-1})} L(u)du\rho(x_{-1})}{\rho(x_{-1})\Big(1 - \displaystyle\int_0^{\rho(x_{-1})+\rho(x_0)} L(u)du\Big)} \leq$$

$$\leq \frac{\displaystyle\int_0^{r} L(u)du\rho(x_{-1})}{r\Big(1 - \displaystyle\int_0^{\rho(x_{-1})+\rho(x_0)} L(u)du\Big)} \leq \frac{\|x^* - x_{-1}\|}{r} < 1.$$

Якщо $x_k \in B(x^*, r)$, то згідно з рівністю (3) дістаємо

$$x_{k+1} - x^* = x_k - x^* - F(x_k, x_{k-1})^{-1}F(x_k) = -F(x_k, x_{k-1})^{-1}F(x^*, x^*)\times$$
$$\times F(x^*, x^*)^{-1}[F(x_k, x^*) - F(x_k, x_{k-1})](x_k - x^*).$$

Тоді згідно з лемою 1 та умовою (8) отримуємо

$$\|x_{k+1} - x^*\| = \|x_k - x^* - F(x_k, x_{k-1})^{-1}F(x_k)\| \leq$$
$$\leq \|F(x_k, x_{k-1})^{-1}F(x^*, x^*)\| \cdot \|F(x^*, x^*)^{-1}[F(x_k, x^*) - F(x_k, x_{k-1})]\times$$
$$\times (x_k - x^*)\| \leq \frac{\int_0^{\rho(x_{k-1})} L(u)du}{1 - \int_0^{\rho(x_k)+\rho(x_{k-1})} L(u)du}\rho(x_k).$$

Покладаючи $k = 0$, отримуємо $\|x_1 - x^*\| \leq q\|x_0 - x^*\| < \|x_0 - x^*\|$. Отже, $x_1 \in B(x^*, r)$. Це доводить, що ітерацію (3) можна повторити як завгодно багато разів. Використовуючи метод математичної індукції, можна встановити, що $x_k \in B(x^*, r)$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, а також, що послідовність $\rho(x_k) = \|x_k - x^*\|$ монотонно спадає. Далі, для всіх $k = 0, 1, \dots$, маємо

$$\|x_{k+1} - x^*\| \le \frac{\displaystyle\int_0^{\rho(x_{k-1})} L(u)du\rho(x_{k-1})\rho(x_k)}{\rho(x_{k-1})\Big(1 - \displaystyle\int_0^{\rho(x_k)+\rho(x_{k-1})} L(u)du\Big)} \le$$

$$\le \frac{\displaystyle\int_0^{\rho(x_{-1})} L(u)du}{\rho(x_{-1})\Big(1 - \displaystyle\int_0^{\rho(x_0)+\rho(x_{-1})} L(u)du\Big)}\rho(x_{k-1})\rho(x_k) =$$

$$= \frac{q}{\rho(x_{-1})}\|x_{k-1} - x^*\|\|x_k - x^*\| \le \ldots \le \frac{\rho(x_{_{-1}})}{q}\Big(\frac{q}{\rho(x_{_{-1}})}\|x_0 - x_*\|\Big)^{F_k}.$$

Таким чином, отримуємо оцінку (10). Зауважимо, що з нерівності (10) випливає, що порядок збіжності методу хорд дорівнює $(1 + \sqrt{5})/2$.

3. ОБЛАСТЬ ЄДИНОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ

Теорема 2. *Нехай $F(x^*) = 0$, F має розділені різниці $F(x, x^*)$ в $B(x^*, r)$, існує $F'(x^*)^{-1}$, а $F'(x^*)^{-1}F(x, x^*)$ задовольняє радіальну умову Ліпшиця з L у середньому*

$$\|F'(x^*)^{-1}F(x, x^*) - I\| \le \int_0^{\rho(x)} L(u)du \quad \forall x \in B(x^*, r),$$

де $\rho(x) = \|x - x^*\|$, L — додатна інтегровна функція. Якщо r задовольняє нерівність

$$\int_0^r L(u)du \le 1,$$

то рівняння $F(x) = 0$ має в $B(x^*, r)$ єдиний розв'язок x^*.

Доведення. Виберемо довільне $x_0 \in B(x^*, r)$ і розглянемо ітерацію

$$x_{n+1} = x_n - F'(x^*)^{-1}F(x_n), \quad n = 0, 1, \dots . \tag{12}$$

Отримаємо

$$x_1 - x^* = -F'(x^*)^{-1}[F(x_0) - F(x^*) - F'(x^*)(x_0 - x^*)] =$$
$$= -F'(x^*)^{-1}[F(x_0, x^*) - F(x^*, x^*)](x_0 - x^*) =$$
$$= -[F'(x^*)^{-1}F(x_0, x^*) - I](x_0 - x^*).$$

Тоді
$$\|x_1 - x^*\| \le \int_0^{\rho(x_0)} L(u)du \cdot \|x_0 - x^*\| = q_0\|x_0 - x^*\|,$$
де $q_0 = \int_0^{\rho(x_0)} L(u)du < \int_0^r L(u)du \le 1$. Отже, ітерацію (12) можна виконати як завгодно багато разів, і
$$\|x_n - x^*\| \le q_0^n\|x_0 - x^*\|, \quad n = 1, 2, \dots .$$
Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$. Однак якщо для x_0 справджується рівність $F(x_0) = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Таким чином, звідси випливає, що $x_0 = x^*$.

4. НАСЛІДКИ

При вивченні методу хорд традиційними є припущення, що розділені різниці першого порядку є неперервні за Ліпшицем. Вважаючи, що в теоремах 1, 2 функція L є константою, отримуємо наступні наслідки.

Наслідок 1. *Припустимо, що $F(x^*) = 0$, F має розділені різниці $F(x,y)$ в $B(x^*,r)$, існує $F'(x^*)^{-1}$, а $F'(x^*)^{-1}F(x,y)$ задовольняє умову Ліпшиця*
$$\forall\, x, y \in B(x^*, r) \quad \|F'(x^*)^{-1}(F(x^*, x^*) - F(x, y))\| \le L(\|x - x^*\| + \|y - x^*\|),$$
де L — додатне число і $r = \dfrac{1}{3L}$. Тоді метод хорд (3) *збігається для всіх $x_{-1}, x_0 \in B(x^*, r)$, і для числа*
$$q = \frac{L\|x_{-1} - x^*\|}{1 - L(\|x_{-1} - x^*\| + \|x_0 - x^*\|)}$$
виконується оцінка (10).

Зауважимо, що отримане r збігається зі значенням, наведеним у [3,5].

Наслідок 2. *Припустимо, що $F(x^*) = 0$, F має розділені різниці $F(x,x^*)$ в $B(x^*,r)$, існує $F'(x^*)^{-1}$, а $F'(x^*)^{-1}F(x,x^*)$ задовольняє радіальну умову Ліпшиця*
$$\forall\, x \in B(x^*, r) \quad \|F'(x^*)^{-1}F(x, x^*) - I\| \le L\|x - x^*\|,$$
де L — додатне число і $r = \dfrac{1}{L}$. Тоді рівняння $F(x) = 0$ має у відкритій кулі $B(x^*, r)$ єдиний розв'язок x^*. Крім того, дане r залежить тільки від L і не залежить від F.

Нехай γ — деяке додатне число. Вибираючи функцію L у вигляді [7]

$$L(u) = \frac{2\gamma}{(1-\gamma u)^3},$$

отримуємо такі наслідки.

Наслідок 3. *Припустимо, що $F(x^*) = 0$, F має розділені різниці $F(x,y)$ в $B(x^*,r)$, існує $F'(x^*)^{-1}$, а $F'(x^*)^{-1}F(x,y)$ для всіх $x,y \in B(x^*,r)$ задовольняє умову*

$$\|F'(x^*)^{-1}(F(x^*,x^*) - F(x,y))\| \le \frac{1}{(1-\gamma(\|x-x^*\| + \|y-x^*\|))^2} - 1,$$

де γ — додатне число і $r \approx 0.0878/\gamma$. Тоді метод хорд (3) *збігається для всіх $x_{-1}, x_0 \in B(x^*,r)$ і для числа*

$$q = \frac{(1-\gamma r)^{-2} - 1}{2 - (1-2\gamma r)^{-2}}$$

виконується нерівність (10)*. Крім того, дане r залежить тільки від L і не залежить від F.*

Зауваження. Для методу Ньютона $r = \dfrac{5-\sqrt{17}}{4\gamma} \approx 0.219/\gamma$, що в $1,25$ разів більше за відповідне r для методу хорд.

Наслідок 4. *Припустимо, що $F(x^*) = 0$, F має розділені різниці $F(x,x^*)$ в $B(x^*,r)$, існує $F'(x^*)^{-1}$, а $F'(x^*)^{-1}F(x,x^*)$ для всіх $x,y \in B(x^*,r)$ задовольняє умову*

$$\|F'(x^*)^{-1}(F(x,x^*) - I)\| \le \frac{1}{(1-\gamma(\|x-x^*\|)^2} - 1,$$

де γ — додатне число і $r = (\sqrt{2}-1)/(\sqrt{2}\gamma) \approx 0.293/\gamma$. Тоді рівняння $F(x) = 0$ має у відкритій кулі $B(x^*,r)$ единий розв'язок x^*. Крім того, дане r залежить тільки від L і не залежить від F.

ВИСНОВКИ

У роботах [3, 5, 6] досліджено локальну збіжність методу хорд, якщо для розділених різниць першого порядку виконуються умови Ліпшиця, що містять деякі сталі Ліпшиця. У даній роботі досліджено локальну збіжність цього методу при загальніших умовах Ліпшиця, в яких замість сталої Ліпшиця використовується деяка додатна інтегровна функція. Отримані нами результати містять відомі як частинні випадки.

[1] *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: – Наука, 1984. – 752 с.

[2] *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: – Мир, 1975. – 558 с.

[3] *Шахно С.М.* Застосування нелінійних мажорант для дослідження методу хорд розв'язування нелінійних рівнянь // Математичні студії. – 2004, – **22**, №1. – С. 79–86.

[4] *Шахно С., Макух О.* Локальна збіжність ітераційно-різницевих методів розв'язування нелінійних операторних рівнянь // Вісник Львів. нац. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2003. – Вип. 7. – С. 124–131.

[5] *Argyros I.K.* On an algorithm for solving nonlinear operator equation // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. – 1991. – Vol. 10, № 1. – P. 83–92.

[6] *Hernandez M.A., Rubio M.J.* The secant method and divided differences Hölder continuous // Applied Mathematics and Computation. – 2001. – Vol. 124. – P. 139–149.

[7] *Wang X.* Convergence of Newton's method and uniqueness of the solution of equations in Banach space // IMA Journal of Numerical Analysis. – 2000. – Vol. 20. – P. 123–134.

SECANT METHOD UNDER THE GENERALIZED LIPSCHITZ CONDITIONS FOR THE FIRST-ORDER DIVIDED DIFFERENCES

Stepan SHAKHNO

Ivan Franko Lviv National University,
1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine

The convergence of Secant method for the solving nonlinear operator equations in the Banach spaces under the generalized Lipschitz condition for the first-order divided differences is investigated. The conditions and speed of convergence of this method are found, the uniqueness ball for the solution of operator equations is determined.