АНАЛІЗ ПОВНОЇ ІНТЕГРОВНОСТІ ЧОТИРИВИМІРНОЇ РЕДУКЦІЇ НЕЛІНІЙНОЇ ІНВЕРСНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРІЗА

©2005 р. *Ольга ВОРОБЙОВА, Микола ПРИТУЛА*

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів 79602

Редакція отримала статтю 7 вересня 2005 р.

Для нелінійної інверсної динамічної системи Кортевега–де Фріза досліджено скінченновимірні локальні редукції типу Новікова–Богоявленського і їх інтегровність за Ліувіллем–Арнольдом у квадратурах.

1. ВСТУП

Однією із важливих проблем теорії нескінченновимірних динамічних систем є проблема їх редукції на скінченновимірні інваріантні функціональні підмноговиди та знаходження їх розв'язків. Дослідження у цьому напрямку, що беруть початок в основоположних працях Лі, Ліувілля, Лагранжа, Гамільтона, Пуассона та Картана, за останнє двадцятиліття широко розвинуті у працях [1, 3, 10, 12]. В останні роки спостерігається зростання інтересу до проблеми редукції, що, зокрема, зумовлено застосуванням техніки відображення момента [6, 11, 12] до дослідження інтегровності скінченновимірних нелінійних систем. Відзначимо також, що у праці [12], використовуючи методи теорії редукції, розвинуто нові геометричні та операторні методи квантування подібних систем.

Нехай нелінійна еволюційна система рівнянь задана у вигляді

$$du/dt = K[u], \tag{1}$$

де $K : J^{(k)}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) \to T(J^{(k)}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m))$ — гладке за Фреше нелінійне відображення, $[u]$ — точка топологічного джет-многовиду $J^{(k)}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, порядку $|k|$, $k \in \mathbb{Z}_+^n$, $|k| = \max\limits_{1\le i\le n} k_i$, з базою $\mathbb{R}^n$, і визначеного як топологічна сума всеможливих орбіт векторних полів d/dx_j, $j = \overline{1,n}$, t —

УДК 547.946, 517.9; MSC 2000: 35Q53

дійсний еволюційний параметр. На основі використання математичних об'єктів джет-аналізу у праці [8] викладена загальна схема скінченновимірних редукцій та встановлені основні властивості цієї схеми. Згідно з цією схемою, метод редукції векторного поля (1) до скінченновимірної задачі на многовиді $M \subset C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ полягає в існуванні або 1) додаткового векторного поля $du/d\tau = \alpha[u]$, $\alpha \in T(M)$, $[u] \in J^{(k)}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ на функціональному многовиді M як елемента дотичного простору $T(M)$ до M, що комутує з (1), або 2) певного елемента $\varphi[u] \in T^*(M)$, $[u] \in J^{(k)}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, такого, що $d\varphi/dt + K'^*\varphi = 0$, де t — еволюційний параметр. При цьому залишається інваріантним відносно (1) підмноговид $M_\alpha := \{u \in M : \alpha[u] = 0\}$, чи, відповідно, підмноговид

$$M_\varphi := \{u \in M : \varphi[u] = 0\}. \tag{2}$$

Результатом такої редукції є система звичайних нелінійних диференціальних рівнянь на M_α чи M_φ, яка і стає основним об'єктом аналізу та джерелом знаходження точних, хоча й часткових, розв'язків вихідної динамічної системи (1). Таким чином, задача скінченновимірної редукції динамічної системи (1) зводиться до аналізу умов, що гарантують існування підмноговидів M_α та M_φ та способів їх побудови. Нижче будемо розглядати випадок побудови інваріантного многовиду у формі (2).

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай на гладкому функціональному многовиді $M \subset C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z};\mathbb{R}^3)$ задано інверсну динамічну систему Кортевега–де Фріза (inv КдФ)

$$\left.\begin{array}{l} u_t = v \\ p_t = u_x + uv \\ v_t = p \end{array}\right\} = K[u,p,v], \tag{3}$$

де $K : M \to T(M)$ — гладке за Фреше векторне поле, автономне і однорідне стосовно змінних $(u,p,v)^\top \in M$, $\top$ — знак транспонування, як точок джет–многовиду $J(\mathbb{R}^1;\mathbb{R}^3)$, $t \in \mathbb{R}_+$ — еволюційний параметр. У роботі [13] встановлена інтегровність динамічної системи (3), а саме, знайдено рекурентні співвідношення для локальних функціоналів $\sigma_j[u]$, $j \in \mathbb{Z}_+$, які дозволяють визначити всю нескінченну ієрархію інваріантів, узгоджену імплектичну пару нетерових операторів та відповідне зображення типу Лакса. Застосуємо метод локальної редукції для системи (3), яка у бігамільтоновій формі має вигляд

$$w_t = K = -\vartheta grad\gamma_1 = -\eta grad\gamma_0,$$

де $w := (u,p,v)^\top \in M$, $\gamma_0, \gamma_1 \in D(M)$ — елементи нескінченної послідовності інволютивних законів збереження $\gamma_j \in D(M)$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Тут $D(M)$ — простір гладких за Фреше функціоналів на M, причому

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}(p-u^2/2)dx,\\
\gamma_1 &= \frac{1}{9}\int_0^{2\pi}(v^2/2-up+u^3/3)dx,\\
\gamma_2 &= \frac{1}{18}\int_0^{2\pi}(u^2p-p^2-u^4/4-2uv_x)dx, \qquad (4)\\
\gamma_3 &= \int_0^{2\pi}\Big(\frac{1}{18}u_x^2+\frac{1}{108}u^2v^2+\frac{1}{162}u^5+\frac{1}{27}u^2v_x+\\
&\quad +\frac{1}{27}up^2-\frac{5}{162}u^3p-\frac{1}{54}v^2p+\frac{1}{9}p_xv\Big)dx,\ldots,
\end{aligned}$$

а відображення $\vartheta, \eta : T^*(M) \to T(M)$ є узгодженою за Магрі [6, 12] парою імплектичних нетерових операторів:

$$\vartheta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1\\ 0 & \partial & -u\\ 1 & u & 0\end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 & \partial-\frac{1}{3}v & -\frac{1}{3}u\\ \partial+\frac{1}{3}v & \frac{2}{3}(\partial u+u\partial) & \frac{1}{3}(p-u^2)\\ \frac{1}{3}u & \frac{1}{3}(u^2-p) & -\partial\end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Перейдемо до дослідження диференціально–геометричних властивостей зредукованого інваріантного підмноговиду

$$M^2 := \{(u,p,v)^\top \in M : grad\,\mathcal{L}_2 = 0, \mathcal{L}_2 = -\gamma_2 + c_0\gamma_0 + c_1\gamma_1\}$$

для динамічної системи (3).

3. СИМПЛЕКТИЧНА СТРУКТУРА ІНВАРІАНТНОГО СКІНЧЕННОВИМІРНОГО ПІДМНОГОВИДУ $M^2 \subset M$

Нехай

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 = \int_0^{2\pi}\Big[&-\frac{1}{18}u^2p+\frac{1}{18}p^2+\frac{u^4}{72}+\frac{1}{9}uv_x+\\
&+c_0\left(\frac{p}{3}-\frac{u^2}{6}\right)+c_1\left(\frac{v^2}{18}-\frac{up}{9}+\frac{u^3}{27}\right)\Big]dx,
\end{aligned}$$

або в наступній еквівалентній формі

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{L}}_2 = 18\mathcal{L}_2 = \int_0^{2\pi}&[-u^2p+p^2+u^4/4+2uv_x+ \\
&+c_0(6p-3u^2)+c_1(v^2-2up+2u^3/3)]\,dx,
\end{aligned} \qquad (6)$$

де $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ — довільні сталі. Згідно з теоремою Лакса [3, 12], інваріантний скінченновимірний функціональний многовид для динамічної системи (3) задається виразом

$$M^2 := \{(u,p,v)^\top \in M : \varphi := grad\,\overline{\mathcal{L}}_2[u,p,v] = 0\}.$$

Оскільки лагранжіан (6) є виродженим, даний вираз задає динамічну систему фактично на редукованому джет-многовиді $J(\mathbb{R}^1;\mathbb{R}^2)$ з координатами $\overline{w}^{(i)} := \frac{d^i\overline{w}}{dx^i}$, $i \in \mathbb{Z}_+$, $\overline{w} := (u,v)^\top$, яка вкладається інваріантним чином в $J(\mathbb{R}^1;\mathbb{R}^3)$. Згідно з теоремою Новікова–Богоявленського [1, 7], інваріантний многовид M^2 є симплектичним із симплектичною структурою $\omega^{(2)} = d\alpha^{(1)}$, де 1-форма $\alpha^{(1)} \in \Lambda^1(J^{(0)})$ визначається [12] за допомогою такого зображення Гельфанда–Дікого для диференціалу $d\overline{\mathcal{L}}_2$:

$$d\overline{\mathcal{L}}_2[u,p,v] =< grad\,\overline{\mathcal{L}}_2[u,p,v], (du,dp,dv)^\top > +d\alpha^{(1)}[u,p,v]/dx. \qquad (7)$$

Тут через $\Lambda^1(J^{(0)})$ позначено алгебру Грасмана диференціальних 1-форм [7, 12] на джет-многовиді $J^{(0)}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^3)$, причому справедливі такі співвідношення:

$$\frac{du^{(i)}}{dx} = u^{(i+1)}, \quad \frac{dp^{(i)}}{dx} = p^{(i+1)}, \quad \frac{dv^{(i)}}{dx} = v^{(i+1)}, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \qquad (8)$$

$$\overline{\mathcal{L}}_2 = \int_0^{2\pi} \Big[-\left(u^{(0)}\right)^2 p^{(0)} + \left(p^{(0)}\right)^2 + \left(u^{(0)}\right)^4/4 + 2u^{(0)}v^{(1)} + 6c_0p^{(0)} -$$
$$-3c_0\left(u^{(0)}\right)^2 + c_1\left(v^{(0)}\right)^2 - 2c_1u^{(0)}p^{(0)} + 2c_1\left(u^{(0)}\right)^3/3\Big]\,dx.$$

Обчислимо диференціал від лагранжіана $\overline{\mathcal{L}}_2[u,p,v]$ з виразу Гельфанда–Дікого (7):

$$d\overline{\mathcal{L}}_2[u,p,v] = \Big[-2u^{(0)}p^{(0)} + \left(u^{(0)}\right)^3 + 2v^{(1)} - 6c_0u^{(0)} - 2c_1p^{(0)} +$$
$$+2c_1\left(u^{(0)}\right)^2\Big]du^{(0)} + \Big[-\left(u^{(0)}\right)^2 + 2p^{(0)} - 2c_1u^{(0)} + 6c_0\Big]dp^{(0)} +$$
$$+\Big[-2u^{(1)} + 2c_1v^{(0)}\Big]dv^{(0)} + 2\frac{d}{dx}\left(u^{(0)}dv^{(0)}\right) \equiv$$
$$\equiv \Big\langle grad\,\overline{\mathcal{L}}_2[u,p,v], (du^{(0)}, dp^{(0)}, dv^{(0)})^\top \Big\rangle + d\alpha^{(1)}/dx.$$

Як результат отримуємо, що $\alpha^{(1)} = 2u^{(0)}dv^{(0)}$,

$$\left(grad\overline{\mathcal{L}}_2[u,p,v]\right)_u = -2u^{(0)}p^{(0)} + \left(u^{(0)}\right)^3 + 2v^{(1)} - 6c_0u^{(0)} - 2c_1p^{(0)} + 2c_1\left(u^{(0)}\right)^2,$$

$$\left(grad\overline{\mathcal{L}}_2[u,p,v]\right)_p = -\left(u^{(0)}\right)^2 + 2p^{(0)} - 2c_1u^{(0)} + 6c_0,$$
$$\left(grad\overline{\mathcal{L}}_2[u,p,v]\right)_v = -2u^{(1)} + 2c_1v^{(0)}.$$

Тепер можна визначити інваріантний многовид на $M^2 \subset M$ як відповідне вкладення у джет-многовид $J(\mathbb{R}^1;\mathbb{R}^3)$:

$$\begin{array}{l}\left(grad\overline{\mathcal{L}}_2[u,p,v]\right)_u = 0 \Rightarrow \\ -2u^{(0)}p^{(0)} + \left(u^{(0)}\right)^3 + 2v^{(1)} - 6c_0u^{(0)} - 2c_1p^{(0)} + 2c_1\left(u^{(0)}\right)^2 = 0; \\ \left(grad\overline{\mathcal{L}}_2[u,p,v]\right)_p = 0 \Rightarrow -\left(u^{(0)}\right)^2 + 2p^{(0)} - 2c_1u^{(0)} + 6c_0 = 0; \\ \left(grad\overline{\mathcal{L}}_2[u,p,v]\right)_v = 0 \Rightarrow -2u^{(1)} + 2c_1v^{(0)} = 0.\end{array} \tag{9}$$

Враховуючи рівності (8), запишемо співвідношення (9) у такій еквівалентній формі

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}u^{(0)} = c_1v^{(0)}, \\ \dfrac{d}{dx}v^{(0)} = u^{(0)}p^{(0)} - \dfrac{1}{2}\left(u^{(0)}\right)^3 + 3c_0u^{(0)} + c_1p^{(0)} - c_1\left(u^{(0)}\right)^2, \\ p^{(0)} = \dfrac{1}{2}\left(u^{(0)}\right)^2 + c_1u^{(0)} - 3c_0. \end{cases} \tag{10}$$

Підставляючи $p^{(0)}$ із системи (10) у друге рівняння цієї ж системи, отримаємо

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}u^{(0)} = c_1v^{(0)}, \\ \dfrac{d}{dx}v^{(0)} = -3c_0c_1 + c_1^2u^{(0)} + \dfrac{1}{2}c_1\left(u^{(0)}\right)^2. \end{cases} \tag{11}$$

Ми отримали двовимірну динамічну систему (11) на джет-підмноговиді $J^{(0)}(\mathbb{R}^1;\mathbb{R}^2) \subset J^{(0)}(\mathbb{R}^1;\mathbb{R}^3)$, тобто векторне поле d/dx, замикання орбіт якого є локально дифеоморфним до функціонального двовимірного джет-підмноговиду M^2. Оскільки інваріантний підмноговид M^2 є симплектичним, то можна ввести канонічні (Q,P)–координати на ньому, причому відповідна симплектична структура на M^2 буде мати вигляд

$$\omega^{(2)} = d\alpha^{(1)} = d(2u^{(0)}dv^{(0)}) = d(-2v^{(0)}) \wedge du^{(0)} := dP_1 \wedge dQ_1, \tag{12}$$

де вжито позначення $Q_1 = u^{(0)}$, $P_1 = -2v^{(0)}$. Оскільки симплектична структура залежить лише від змінних $(u^{(0)},v^{(0)}) \in M^2$, то лагранжіан $\overline{\mathcal{L}}_2[w]$ можна виразити лише через ці змінні:

$$\overline{\mathcal{L}}_2[w]\Big|_{p^{(0)}=\frac{1}{2}\left(u^{(0)}\right)^2+c_1u^{(0)}-3c_0} = 2u^{(0)}v^{(1)} - \tfrac{1}{3}c_1\left(u^{(0)}\right)^3 - c_1^2\left(u^{(0)}\right)^2 +$$
$$+6c_0c_1u^{(0)} + c_1\left(v^{(0)}\right)^2 - 9c_0^2 = \tfrac{1}{4}c_1P_1^2 + \tfrac{2}{3}c_1Q_1^3 + c_1^2Q_1^2 - 9c_0^2.$$

Оскільки векторне поле d/dx є гамільтоновим [12] відносно канонічної симплектичної структури (12), то мають місце рівняння

$$\frac{dQ_1}{dx} = \frac{\partial h^{(x)}}{\partial P_1}, \quad \frac{dP_1}{dx} = -\frac{\partial h^{(x)}}{\partial Q_1}, \tag{13}$$

де гамільтоніан $h^{(x)}$ визначається з наступної тотожності

$$\left\langle grad\overline{\mathcal{L}}_2[w], w_x \right\rangle\big|_{M^2} = -\frac{dh^{(x)}}{dx}.$$

Звідси отримуємо, що функція Гамільтона $h^{(x)}$ має вигляд

$$h^{(x)} = c_0\left(3\left(u^{(0)}\right)^2 - 6p^{(0)}\right) + c_1\left(2u^{(0)}p^{(0)} - \frac{2}{3}\left(u^{(0)}\right)^3 - \left(v^{(0)}\right)^2\right) -$$

$$-\frac{1}{4}\left(u^{(0)}\right)^4 - \left(p^{(0)}\right)^2 + \left(u^{(0)}\right)^2 p^{(0)},$$

або в симплектичних координатах

$$h^{(x)} = \frac{1}{3}c_1 Q_1^3 + c_1^2 Q_1^2 - 6c_1c_0Q_1 - \frac{1}{4}c_1P_1^2 + 9c_0^2.$$

Система рівнянь Гамільтона (13) набуде тепер вигляду

$$\frac{dQ_1}{dx} = -\frac{1}{2}c_1P_1, \quad \frac{dP_1}{dx} = -c_1\left(Q_1\right)^2 - 2c_1^2Q_1 + 6c_1c_0. \tag{14}$$

Система (14) має дві стаціонарні точки $(Q_1, P_1) = \left(-c_1 \pm \sqrt{c_1^2 + 6c_0}, 0\right)$. При спеціальних значеннях параметрів $c_0 = 0, c_1 = 1$ точка $(0, 0)$ є стаціонарною точкою гіперболічного типу, а $(-2, 0)$ — стаціонарною точкою еліптичного типу. Фазовий портрет системи (14) зображено на рис. 1. В середині гомоклінічних сепаратрис траєкторії є періодичними за $x \in \mathbb{R}$ і можуть бути використані як початкові умови для інверсної динамічної системи Кортевега–де Фріза (3). Точний розв'язок системи (14) можна отримати простим інтегруванням.

Відповідно, векторне поле d/dt на $J(\mathbb{R}^1; \mathbb{R}^2)$ також залишає джет-підмноговид $J^{(0)}(\mathbb{R}^1; \mathbb{R}^2)$ інваріантним і є гамільтоновим відносно цієї ж симплектичної структури (12), тобто

$$\frac{dQ_1}{dt} = \frac{\partial h^{(t)}}{\partial P_1}, \quad \frac{dP_1}{dt} = -\frac{\partial h^{(t)}}{\partial Q_1}, \tag{15}$$

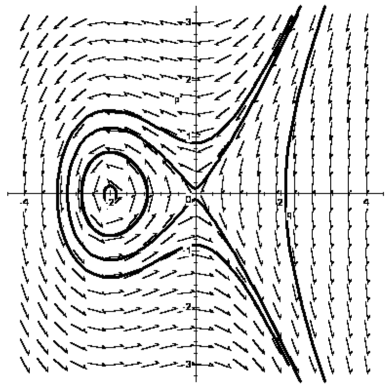

Рис. 1.

де гамільтоніан $h^{(t)}$ визначається з наступної тотожності:

$$\left\langle grad\overline{\mathcal{L}}_2[w], w_t \right\rangle\Big|_{M^2} = -\frac{dh^{(t)}}{dx}$$

і в явній формі має вигляд

$$h^{(t)} = \frac{1}{3}{Q_1}^3 + c_1 Q_1^2 - 6c_0 Q_1 - \frac{1}{4}{P_1}^2.$$

Відповідна система Гамільтона (15) матиме тепер вигляд

$$\frac{dQ_1}{dt} = -\frac{1}{2}P_1, \quad \frac{dP_1}{dt} = -Q_1^2 - 2c_1 Q_1 + 6c_0. \tag{16}$$

Точний частковий розв'язок системи (3) отримуємо шляхом накладання векторних полів d/dx (14) та d/dt (16). Для цього у кожній точці $x = x_0 \in \mathbb{R}$ інтегруємо векторне поле d/dt із початковими умовами $Q_1|_{t=0} = Q_1(x_0)$ та $P_1|_{t=0} = P_1(x_0)$, де $Q_1(x_0), P_1(x_0)$ — значення розв'язку системи (14) у точці $x_0 \in \mathbb{R}$. На рис. 2 зображено розв'язок системи (3), отриманий шляхом накладання векторних полів d/dx (14) та d/dt (16), причому початкові умови для системи (14) вибрано так, щоб забезпечити періодичність розв'язку, а саме, $Q_1|_{x=0} = -2,1, P_1|_{x=0} = 0,1$. Системи (14) та (16) проінтегровано також чисельним методом Рунге–Кутта 4-го порядку із кроком $h = 0,01$ на проміжках $x \in [0,10]$ та $t \in [0,10]$ відповідно.

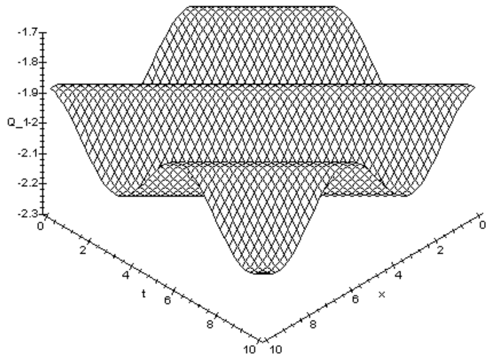

Рис. 2.

4. ПОБУДОВА ІНВАРІАНТНОГО СКІНЧЕННОВИМІРНОГО ПІДМНОГОВИДУ $M^4 \subset M$

Для побудови інваріантного підмноговиду M^4, заданого у вигляді (2), виберемо лагранжіан $\mathcal{L}_3[u,p,v]$ у вигляді

$$\mathcal{L}_3 = -\gamma_3 + c_0\gamma_0 + c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 = \int_0^{2\pi} \left[c_0 \left(\frac{p}{3} - \frac{u^2}{6} \right) + \right.$$

$$+c_1 \left(\frac{v^2}{18} - \frac{up}{9} + \frac{u^3}{27} \right) + c_2 \left(\frac{1}{18}u^2p - \frac{1}{18}p^2 - \frac{u^4}{72} - \frac{1}{9}uv_x \right) - \frac{1}{18}u_x^2 -$$

$$\left. -\frac{1}{108}u^2v^2 - \frac{1}{162}u^5 - \frac{1}{27}u^2v_x - \frac{1}{27}up^2 + \frac{5}{162}u^3p + \frac{1}{54}v^2p - \frac{1}{9}p_xv \right] dx,$$

або в наступній формі

$$\overline{\mathcal{L}}_3 = 648\mathcal{L}_3 = \int_0^{2\pi} [c_0(216p - 108u^2) + c_1(36v^2 - 72up + 24u^3) +$$

$$+c_2(36u^2p - 36p^2 - 9u^4 - 72uv_x) - 36u_x^2 - 6u^2v^2 -$$

$$-4u^5 - 24u^2v_x - 24up^2 + 20u^3p + 12v^2p - 72p_xv]dx,$$

де $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ — довільні сталі. Скінченновимірний інваріантний функціональний підмноговид, згідно з теоремою Лакса [12], для динамічної системи (3) задамо виразом

$$M^4 := \{(u,p,v)^\top \in M : grad\overline{\mathcal{L}}_3[u,p,v] = 0\}.$$

Даний вираз задає вироджену чотиривимірну інваріантну динамічну систему на джет-многовиді $J(\mathbb{R}^1;\mathbb{R}^3)$ з координатами $w^{(i)} := \frac{d^iw}{dx^i}, i \in \mathbb{Z}_+$,

$w := (u, p, v)^\top \in M$. Згідно з теоремою Новікова–Богоявленського [1, 12] інтегральний многовид M^4 є симплектичним із симплектичною структурою $\omega^{(2)} = d\alpha^{(1)}$, де 1-форма $\alpha^{(1)} \in \Lambda^1(J^{(1)})$ визначається з виразу (7). Використовуючи співвідношення (7), (8), отримаємо наступну тотожність:

$$d\overline{\mathcal{L}}_3[u,p,v] = [72u^{(2)} - 12u^{(0)}\left(v^{(0)}\right)^2 - 20\left(u^{(0)}\right)^4 - 24\left(p^{(0)}\right)^2 -$$

$$-48u^{(0)}v^{(1)} + 60\left(u^{(0)}\right)^2 p^{(0)} + 72c_2u^{(0)}p^{(0)} - 36c_2\left(u^{(0)}\right)^3 -$$

$$-72c_2v^{(1)} - 72c_1p^{(0)} + 72c_1\left(u^{(0)}\right)^2 - 216c_0u^{(0)}]du^{(0)} +$$

$$-\frac{d}{dx}\left(72u^{(1)}du^{(0)}\right) + [-48u^{(0)}p^{(0)} + 72v^{(1)} + 20\left(u^{(0)}\right)^3 + 12\left(v^{(0)}\right)^2 +$$

$$+36c_2\left(u^{(0)}\right)^2 - 72c_2p^{(0)} - 72c_1u^{(0)} + 216c_0]dp^{(0)} - \frac{d}{dx}\left(72v^{(0)}dp^{(0)}\right) +$$

$$+[48u^{(0)}u^{(1)} - 12\left(u^{(0)}\right)^2 v^{(0)} - 72p^{(1)} + 24v^{(0)}p^{(0)} + 72c_2u^{(1)} +$$

$$+72c_1v^{(0)}]dv^{(0)} + \frac{d}{dx}(-72c_2u^{(0)} - 24(u^{(0)})^2dv^{(0)}) \equiv$$

$$\equiv \left\langle grad\overline{\mathcal{L}}_3[u,p,v], (du^{(0)}, dp^{(0)}, dv^{(0)})^\top \right\rangle + \frac{d}{dx}\alpha^{(1)}.$$

З отриманої тотожності знаходимо, що

$$\alpha^{(1)} = -72u^{(1)}du^{(0)} - 72v^{(0)}dp^{(0)} + (-72c_2u^{(0)} - 24(u^{(0)})^2)dv^{(0)},$$

$$\left(grad\overline{\mathcal{L}}_3[u,p,v]\right)_u = 72u^{(2)} - 12u^{(0)}\left(v^{(0)}\right)^2 - 20\left(u^{(0)}\right)^4 - 24\left(p^{(0)}\right)^2 -$$

$$-48u^{(0)}v^{(1)} + 60\left(u^{(0)}\right)^2 p^{(0)} + 72c_2u^{(0)}p^{(0)} - 36c_2\left(u^{(0)}\right)^3 -$$

$$-72c_2v^{(1)} - 72c_1p^{(0)} + 72c_1\left(u^{(0)}\right)^2 - 216c_0u^{(0)},$$

$$\left(grad\overline{\mathcal{L}}_3[u,p,v]\right)_p = -48u^{(0)}p^{(0)} + 72v^{(1)} + 20\left(u^{(0)}\right)^3 + 12\left(v^{(0)}\right)^2 +$$

$$+36c_2\left(u^{(0)}\right)^2 - 72c_2p^{(0)} - 72c_1u^{(0)} + 216c_0,$$

$$\left(grad\overline{\mathcal{L}}_3[u,p,v]\right)_v = 48u^{(0)}u^{(1)} - 12\left(u^{(0)}\right)^2 v^{(0)} - 72p^{(1)} + 24v^{(0)}p^{(0)} +$$

$$+72c_2u^{(1)} + 72c_1v^{(0)}.$$

Розглянемо тепер інтегральний многовид M^4 як такий, що гладко вкладений у джет-многовид $J(\mathbb{R}^1;\mathbb{R}^3)$, тобто виконується умова :

$$grad\,\overline{\mathcal{L}}_3[u,p,v]=0,$$

або

$$\begin{gathered}
72u^{(2)}-12u^{(0)}\left(v^{(0)}\right)^2-20\left(u^{(0)}\right)^4-24\left(p^{(0)}\right)^2-\\
-48u^{(0)}v^{(1)}+60\left(u^{(0)}\right)^2p^{(0)}+72c_2u^{(0)}p^{(0)}-36c_2\left(u^{(0)}\right)^3-\\
-72c_2v^{(1)}-72c_1p^{(0)}+72c_1\left(u^{(0)}\right)^2-216c_0u^{(0)}=0,\\
-48u^{(0)}p^{(0)}+72v^{(1)}+20\left(u^{(0)}\right)^3+12\left(v^{(0)}\right)^2+\\
+36c_2\left(u^{(0)}\right)^2-72c_2p^{(0)}-72c_1u^{(0)}+216c_0=0,\\
48u^{(0)}u^{(1)}-12\left(u^{(0)}\right)^2v^{(0)}-72p^{(1)}+\\
+24v^{(0)}p^{(0)}+72c_2u^{(1)}+72c_1v^{(0)}=0.
\end{gathered}\tag{17}$$

Враховуючи співвідношення типу (8), запишемо рівності (17) у такій еквівалентній формі:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}u^{(0)}=u^{(1)},\\
&\frac{d}{dx}u^{(1)}=\tfrac{1}{6}u^{(0)}\left(v^{(0)}\right)^2+\tfrac{5}{18}\left(u^{(0)}\right)^4+\tfrac{1}{3}\left(p^{(0)}\right)^2+\tfrac{2}{3}u^{(0)}v^{(1)}-\\
&\qquad-\tfrac{5}{6}\left(u^{(0)}\right)^2p^{(0)}-c_2u^{(0)}p^{(0)}+\tfrac{1}{2}c_2\left(u^{(0)}\right)^3+c_2v^{(1)}+\\
&\qquad+c_1p^{(0)}-c_1\left(u^{(0)}\right)^2+3c_0u^{(0)},\\
&\frac{d}{dx}v^{(0)}=\tfrac{2}{3}u^{(0)}p^{(0)}-\tfrac{5}{18}\left(u^{(0)}\right)^3-\tfrac{1}{6}\left(v^{(0)}\right)^2-\tfrac{1}{2}c_2\left(u^{(0)}\right)^2+\\
&\qquad+c_2p^{(0)}+c_1u^{(0)}-3c_0,\\
&\frac{d}{dx}p^{(0)}=\tfrac{2}{3}u^{(0)}u^{(1)}-\tfrac{1}{6}\left(u^{(0)}\right)^2v^{(0)}+\tfrac{1}{3}v^{(0)}p^{(0)}+c_2u^{(1)}+c_1v^{(0)}.
\end{aligned}\right.\tag{18}$$

Ми отримали динамічну систему (18) на інваріантному джет-многовиді $J^{(1)}(\mathbb{R}^1;\mathbb{R}^3)\subset J(\mathbb{R}^1;\mathbb{R}^3)$, тобто векторне поле d/dx відносно чотирьох фазових змінних $(u^{(0)},u^{(1)},p^{(0)},v^{(0)})\in M^4$, замикання орбіт якого є дифеоморфним до функціонального підмноговиду M^4. Оскільки інваріантний підмноговид M^4 є симплектичним, то на ньому можна ввести канонічні (Q, P)-координати, причому симплектична структура на M^4 буде невиродженою і матиме вигляд:

$$\omega^{(2)} = d\alpha^{(1)} = d(-72u^{(1)}du^{(0)} - 72v^{(0)}dp^{(0)} - 72c_2u^{(0)} - \\ -24(u^{(0)})^2dv^{(0)}) = d(72c_2v^{(0)} - 72u^{(1)}) \wedge du^{(0)} + \\ +d(-24(u^{(0)})^2 + 72p^{(0)}) \wedge dv^{(0)} = dP_1 \wedge dQ_1 + dP_2 \wedge dQ_2, \tag{19}$$

де позначено

$$Q_1 = u^{(0)}, \;\; P_1 = 72c_2v^{(0)} - 72u^{(1)}, \;\; Q_2 = v^{(0)}, \;\; P_2 = -24(u^{(0)})^2 + 72p^{(0)}.$$

Векторне поле d/dx є гамільтоновим стосовно канонічної симплектичної структури (19), а тому правильними є рівняння

$$\frac{dQ_1}{dx} = \frac{\partial h^{(x)}}{\partial P_1}, \quad \frac{dP_1}{dx} = -\frac{\partial h^{(x)}}{\partial Q_1}, \\ \frac{dQ_2}{dx} = \frac{\partial h^{(x)}}{\partial P_2}, \quad \frac{dP_2}{dx} = -\frac{\partial h^{(x)}}{\partial Q_2}. \tag{20}$$

де, як і раніше, гамільтоніан $h^{(x)}$ визначається з наступної тотожності

$$\left\langle grad\overline{\mathcal{L}}_3[w], w_x \right\rangle\Big|_{M_4} = -\frac{dh^{(x)}}{dx}.$$

З цієї тотожності отримуємо, що функція $h^{(x)}$ має вигляд

$$h^{(x)} = -216c_0p^{(0)} + 108c_0\left(u^{(0)}\right)^2 - 24c_1\left(u^{(0)}\right)^3 + 72c_1u^{(0)}p^{(0)} - \\ -36c_1\left(v^{(0)}\right)^2 + 9c_2\left(u^{(0)}\right)^4 - 36c_2\left(u^{(0)}\right)^2p^{(0)} + 36c_2\left(p^{(0)}\right)^2 - \\ -20\left(u^{(0)}\right)^3p^{(0)} + 24u^{(0)}\left(p^{(0)}\right)^2 + 6\left(u^{(0)}\right)^2\left(v^{(0)}\right)^2 + \\ +4\left(u^{(0)}\right)^5 - 12\left(v^{(0)}\right)^2p^{(0)} - 36\left(u^{(1)}\right)^2,$$

і отриманий вираз у симплектичних координатах можна подати у вигляді

$$h^{(x)} = c_0(-3P_2 + 36Q_1^2) + c_1(Q_1P_2 - 36Q_2^2) - 36c_2^2Q_2^2 + \\ +c_2(Q_1^4 + \tfrac{1}{144}P_2^2 + Q_2P_1 - \tfrac{1}{6}Q_1^2P_2) - \tfrac{1}{6}Q_2^2P_2 + \\ +\tfrac{1}{144}P_1^2 + \tfrac{1}{216}Q_1P_2^2 + 2Q_1^2Q_2^2 - \tfrac{1}{18}Q_1^3P_2. \tag{21}$$

Система Гамільтона (20), відповідно, матиме явний вигляд

$$
\begin{aligned}
\frac{dQ_1}{dx} &= c_2Q_2 - \tfrac{1}{72}P_1,\\
\frac{dP_1}{dx} &= -72c_0Q_1 - c_1P_2 - c_2(4Q_1^3 - \tfrac{1}{3}Q_1P_2) - \tfrac{1}{216}P_2^2 - 4Q_1Q_2^2 + \tfrac{1}{6}Q_1^2P_2,\\
\frac{dQ_2}{dx} &= -3c_0 + c_1Q_1 + c_2(\tfrac{1}{72}P_2 - \tfrac{1}{6}Q_1^2) - \tfrac{1}{6}Q_2^2 + \tfrac{1}{108}Q_1P_2 - \tfrac{1}{18}Q_1^3,\\
\frac{dP_2}{dx} &= 72c_1Q_2 + 72c_2^2Q_2 - c_2P_1 + \tfrac{1}{3}Q_2P_2 - 4Q_1^2Q_2.
\end{aligned}
$$

Векторне поле d/dt на $J(\mathbb{R}^1;\mathbb{R}^3)$ залишає джет-підмноговид $J^{(1)}(\mathbb{R}^1;\mathbb{R}^3)$ також інваріантним і є гамільтоновим стосовно симплектичної структури (19), тобто

$$
\begin{aligned}
\frac{dQ_1}{dt} = \frac{\partial h^{(t)}}{\partial P_1}, \quad \frac{dP_1}{dt} = -\frac{\partial h^{(t)}}{\partial Q_1},\\
\frac{dQ_2}{dt} = \frac{\partial h^{(t)}}{\partial P_2}, \quad \frac{dP_2}{dt} = -\frac{\partial h^{(t)}}{\partial Q_2},
\end{aligned}
\tag{22}
$$

де гамільтоніан $h^{(t)}$ визначається з наступної тотожності:

$$
\left\langle grad\overline{\mathcal{L}}_3[w], w_t \right\rangle\Big|_{M_4} = -\frac{dh^{(t)}}{dx},
$$

що дає в явній формі вираз

$$
h^{(t)} = -216c_0u^{(0)} + 36c_1(u^{(0)})^2 - 12c_2(u^{(0)})^3 + 36c_2(v^{(0)})^2 +
$$

$$
+36(p^{(0)})^2 - 72u^{(1)}v^{(0)} - 12u^{(0)}(v^{(0)})^2 - 5(u^{(0)})^4,
$$

або в симплектичних координатах

$$
\begin{aligned}
h^{(t)} = -216c_0Q_1 + 36c_1Q_1^2 - c_2\left(12Q_1^3 + 36Q_2^2\right) - Q_1^4 -\\
-\tfrac{1}{144}P_2^2 + Q_2P_1 - 12Q_1Q_2^2 + \tfrac{1}{3}Q_1^2P_2.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Система Гамільтона (22) матиме явний вигляд

$$
\begin{aligned}
\frac{dQ_1}{dt} = Q_2, \quad \frac{dP_1}{dt} = 216c_0 - 72c_1Q_1 + 36c_2Q_1^2 + 4Q_1^3 + 12Q_2^2 - \frac{2}{3}Q_1P_2,\\
\frac{dQ_2}{dt} = \frac{1}{3}Q_1^2 + \frac{1}{72}P_2, \quad \frac{dP_2}{dt} = 72c_2Q_2 - P_1 + 24Q_1Q_2.
\end{aligned}
$$

5. ІНТЕГРУВАННЯ ГАМІЛЬТОНА–ЯКОБІ НА ПІДМНОГОВИДІ M^4: СПЕКТРАЛЬНІ ПАРАМЕТРИ ТА ВІДОБРАЖЕННЯ ВКЛАДЕННЯ ТОРОЇДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПІДМНОГОВИДУ $M_h^2 \subset M^4$

Розглянемо відповідну узагальнену 2π-періодичну спектральну задачу для оператора типу Лакса

$$Tf = 0, \quad f_t = p(l)f, \tag{24}$$

де $f \in L_\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}^2) \bigcap C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}^2)$,

$$T := \mathbf{1} \cdot \frac{d}{dx} - \ell[x;\lambda], \tag{25}$$

$$\begin{gathered} \ell(x;\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}v & -\frac{1}{6}p + \frac{1}{18}u^2 + \frac{1}{3}\lambda u - 4\lambda^2 \\ & \\ -(4\lambda + \frac{1}{3}u) & -\frac{1}{6}v \end{pmatrix}, \\ p(\ell) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda - \frac{1}{6}u \\ & \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{26}$$

де $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральний параметр. Для розв'язків (24) відповідна регуляризована матриця монодромії $S(x_0;\lambda)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, для всіх $\lambda \in \mathbb{C}$, на період 2π задовольняє відомі рівняння Новікова–Марченка

$$\frac{dS}{dx_0} = [\ell, S], \quad \frac{dS}{dt} = [p(\ell), S], \tag{27}$$

де компоненти s_{ij}, $i,j = \overline{1,2}$, матриці

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{22} & s_{22} \end{pmatrix} \tag{28}$$

є 2π-періодичними функціями змінної $x_0 \in \mathbb{R}$ і аналітичними стосовно спектрального параметра $\lambda \in \mathbb{C}$. Будемо надалі вважати, що відповідний спектр $\sigma(T)$ періодичної та антиперіодичної задачі (24) є дійсним та скінченнозонним [3, 5]. Тоді, як відомо з [3, 5], матричне рівняння (27) має поліноміальний розв'язок

$$S_N(x_0;\lambda) = \sum_{j=0}^{N} S^{(j)}(x_0)\lambda^{(N-j)},$$

де $x_0 \in \mathbb{R}$ і число $N \in \mathbb{Z}_+$ визначається кількістю зон стійкості Флоке в спектрі $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Якщо ж розглянути асоційовану періодичну спектральну задачу

$$Tf = 0, \quad f = (f_1, f_2)^\top,$$

де, за означенням, $f_1(x_0;\lambda) = 0 = f_1(x_0 + 2\pi;\lambda)$ для довільної точки $x_0 \in \mathbb{R}$ при $\lambda \in \mathbb{C}$, то відповідний спектр $\sigma_{2\pi}(T;x_0) \subset \mathbb{R}$ буде параметрично залежним від точки $x_0 \in \mathbb{R}$, що можна використати [3, 5] для розв'язку відповідної оберненої спектральної задачі для оператора (25) та знаходження явних виразів для коефіцієнтів матриці $\ell[x_0;\lambda]$, для всіх $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, заданої виразом (26).

З метою вивчення спектру $\sigma_{2\pi}(T;x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, розглянемо згідно з [4, 5] варіаційні властивості інваріантного сліду $\Delta(\lambda) := \frac{1}{2} trS(x_0;\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, матриці монодромії (28). Справедлива наступна теорема.

Теорема 1. [3, 4, 5]. *Для матричного елемента $s_{21}(x_0;\lambda)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, кожне вироджене власне значення $\lambda_j(x_0) \in \sigma_{2\pi}(T;x_0)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, задовольняє рівність*

$$s_{21}(x_0;\lambda)|_{\lambda=\lambda_j(x_0)} = 0.$$

Для ефективного використання теореми 1 встановимо властивості комплексифікованого градієнта сліду матриці монодромії $grad\Delta(\lambda) := \varphi(x_0;\lambda) \in T^*(M) \otimes \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. А саме, справедливе наступне твердження.

Лема 1. [5] *Величина $\varphi(x;\lambda) \in T^*(M) \otimes \mathbb{C}$ для всіх $x \in \mathbb{R}$ та $\lambda \in \mathbb{C}$ задовольняє градієнтне співвідношення типу Магрі* [10]:

$$-4\lambda\ \vartheta\ \varphi(x;\lambda) = \eta\ \varphi(x;\lambda), \tag{29}$$

де ϑ, η задані виразами (5) *і є відповідними узгодженими імплектичними операторами на функціональному многовиді M.*

Вважаючи тепер, що $\varphi(x;\lambda) := \varphi_N(x;\lambda) = \frac{1}{2} grad\ trS_N(x_0;\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, при фіксованому $N \in \mathbb{Z}_+$ з (29) легко отримуємо, що

$$\varphi_N(x;\lambda) = \sum_{j=0}^{N-1} grad\gamma_j \frac{(-\lambda)^{N-1}}{(-4\lambda)^j}, \tag{30}$$

де γ_j, $j = \overline{0,3}$, мають вигляд (4). З умови (29) та виразу (30) при $N = 3$ отримуємо, що для довільних фіксованих сталих $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\vartheta\ grad\gamma_0 = 0, \quad \eta\ grad\gamma_2 = \vartheta\ (c_0 grad\gamma_0 + c_1 grad\gamma_1 + c_2 grad\gamma_2). \tag{31}$$

Перша рівність у формулі (31) є тотожністю, друга ж — нетривіальна і визначає на функціональному многовиді M деякий інваріантний підмноговид $M^4 \subset M$. Дійсно, з (31) знаходимо, що виконується градієнтна умова типу Магрі

$$\vartheta\ grad\gamma_3 = \eta\ grad\gamma_2,$$

яка дає можливість визначити функціональний підмноговид

$$M^4 := \{w \in M : grad\gamma_3 = c_0 grad\gamma_0 + c_1 grad\gamma_1 + c_2 grad\gamma_2\}.$$

Оскільки, з іншого боку, для всіх $\lambda \in \mathbb{C}$ виконується рівність (30), то легко обчислити, що для всіх $N \in \mathbb{Z}_+$

$$\varphi_N(x;\lambda) = \Big(-\frac{s_{12}}{6} + \frac{s_{21}}{6}(\lambda + u/3), -\frac{s_{21}}{12}, \frac{s}{6}\Big)^{\top}, \tag{32}$$

де $s := (s_{11} - s_{22})/2$. Прирівнюючи тепер вирази (30) і (32), легко бачити, що існує поліноміальний розв'язок рівняння (27) у формі

$$\begin{gathered} s_{12}(x;\lambda) = \sum_{j=0}^{N} s_{12}^{(j)}(x)\lambda^{N-j}, \quad s_{21}(x;\lambda) = \sum_{j=1}^{N} s_{21}^{(j)}(x)\lambda^{N-j}, \\ s(x;\lambda) = \sum_{j=2}^{N} s^{(j)}(x)\lambda^{N-j}, \end{gathered} \tag{33}$$

де $N \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ — довільний параметр. Окрім цього, з першого рівняння (27) легко отримуємо такі диференціальні співвідношення:

$$\begin{aligned} &ds/dx = (u^2/18 + u\lambda/3 - p/6 - 4\lambda^2)s_{21} + (4\lambda + u/3)s_{12}, \\ &ds_{12}/dx = (v/3)s_{12} - (u^2/9 - p/3 + 2u\lambda/3 - 8\lambda^2)s, \\ &ds_{21}/dx = -(8\lambda + 2u/3)s - s_{21}v/3, \quad d(s_{11} + s_{21})/dx = 0. \end{aligned} \tag{34}$$

З (34) і (32) отримуємо додатково, що для всіх $\lambda \in \mathbb{C}$ виконується співвідношення вигляду (29):

$$-4\lambda\vartheta\varphi_N(x;\lambda) = \eta\varphi_N(x;\lambda).$$

Щоб ввести нові канонічні змінні на інваріантному підмноговиді $M^4 \subset M$, необхідно знайти так звані сепарабельні координати Гамільтона–Якобі [2, 9] на інтегральному підмноговиді $M_h^2 \subset M^4$, де, за означенням,

$$M_h^2 := \{(Q,P)^{\top} \in M^4 : h^{(x)}(Q,P) = \overline{h}^{(x)}, h^{(t)}(Q,P) = \overline{h}^{(t)}\},$$

а числа $\overline{h}^{(x)}$, $\overline{h}^{(t)} \in \mathbb{R}$ вибрані такими, що підмноговид $M_h^2 \subset M^4$ є компактним. З цією метою, згідно з розвиненням (30), покладемо в (33) $N = 3$ і зауважимо, що величини $det\ S_N$ і $tr\ S_N$, $N \in \mathbb{Z}_+$, є інваріантами, тобто

$$\frac{d}{dx}det\ S_N = 0 = \frac{d}{dt}det\ S_N, \quad \frac{d}{dx}tr\ S_N = 0 = \frac{d}{dt}tr\ S_N.$$

Тоді отримуємо, що при $N = 3$ величина

$$s^2(x;\lambda) + s_{12}(x;\lambda)s_{21}(x;\lambda) = 16R_5(\lambda)$$

є інваріантом для всіх $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$, де

$$R_5(\lambda) = \lambda^5 + \sum_{j=0}^{4} \rho_j \lambda^{4-j}, \quad \rho_j \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{0,4}.$$

При цьому для розвинень (33) отримуємо поліноміальні вирази

$$s(x;\lambda) = s^{(2)}\lambda + s^{(3)},\ s_{21}(x;\lambda) = -4\lambda^2 + s_{21}^{(2)}\lambda + s_{21}^{(3)},$$

$$s_{12}(x;\lambda) = -4\lambda^3 + s_{12}^{(1)}\lambda^2 + s_{12}^{(2)}\lambda + s_{12}^{(3)},$$

для яких виконуються наступні рівності:

$$\begin{gathered} s_{21}^{(1)} := \overline{s}_{21}^{(1)} = 4, \quad s_{21}^{(2)} = 4u/3, \quad s_{21}^{(3)} = 2(2p - u^2)/3, \\ s^{(2)} = 2v/9, \quad s_{12}^{(1)} = 2u, \quad s_{12}^{(0)} := \overline{s}_{12}^{(0)} = -4. \end{gathered} \tag{35}$$

Тепер можна, з огляду на вигляд симплектичної структури (20), перейти до побудови сепарабельних координат Гамільтона – Якобі на компактному інтегральному підмноговиді $M_h^2 \subset M^4$, дифеоморфному тору $\mathbb{T}_h^2 \simeq M_h^2$. А саме, покладемо

$$s_{21}(x;\lambda) = -4(\lambda - \mu_1(x))(\lambda - \mu_2(x)), \tag{36}$$

де точки $\mu_j \in \mathbb{S}^1$, $j = \overline{1,2}$, як встановимо нижче, відповідають координатам на торі $\mathbb{T}_h^2 \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. При цьому з (35), (36) легко отримуємо, що

$$u = -12(\mu_1 + \mu_2),\ \ p = -48\mu_1\mu_2 + 72\,(\mu_1 + \mu_2)^2 = 96\mu_1\mu_2 + 72(\mu_1^2 + \mu_2^2).$$

Згідно з означенням симплектичної структури (20) на інваріантному підмноговиді $M^4 \subset M$, отримуємо відображення вкладення $\pi_h : M_h^2 \to M^4$

інтегрального підмноговиду $M_h^2 \simeq \mathbb{T}_h^2$, перша половина якого задається такими виразами:

$$\begin{aligned} \pi_{h,Q}^{(1)}(\mu_1, \mu_2) &= Q_1 = -12(\mu_1 + \mu_2), \\ \pi_{h,Q}^{(2)}(\mu_1, \mu_2) &= Q_2 = 96\mu_1\mu_2 + 72(\mu_1^2 + \mu_2^2). \end{aligned} \tag{37}$$

Щодо другої частини відображення вкладення $\pi_h : M_h^2 \to M^4$ у вигляді

$$\pi_{h,P}^{(1)}(\mu_1, \mu_2) = P_1, \quad \pi_{h,P}^{(2)}(\mu_1, \mu_2) = P_2, \tag{38}$$

то нам необхідно побудувати канонічне перетворення для симплектичної структури (20), що відповідає сепарабельним змінним Гамільтона–Якобі $(\mu, w) \in M^4$. А саме, покладемо за означенням, що

$$\langle P, dQ\rangle + \langle \tau, dh\rangle = \langle w, d\mu\rangle + \langle \tau, dh\rangle = dS_h(\mu) \tag{39}$$

для деякої породжуючої функції $S_h : \mathbb{T}_h^2 \to \mathbb{R}$, параметрично залежної від вектора значень функцій Гамільтона $h = (\overline{h}^{(x)}, \overline{h}^{(t)})^\top \in \mathbb{R}^2$. Функцію $S_h : \mathbb{T}_h^2 \to \mathbb{R}$ можна отримати, інтегруючи диференціальну форму $\langle P, dQ\rangle$ вздовж деякого кусково-гладкого шляху на інтегральному многовиді $M_h^2 \subset M^4$, тобто

$$S_h(\mu) = \int_{Q^{(0)}}^{Q(\mu)} \langle P, dQ\rangle,$$

де конфігураційне відображення $Q : \mathbb{T}_h^2 \to M_h^2 \subset M^4$ задається виразами (37), тобто $\pi_{h,Q}(\mu) \equiv Q$ на торі $M_h^2 \simeq \mathbb{T}_h^2$. Тепер з виразу (39) легко отримати, що вектор спряжених канонічних змінних зображається рівністю:

$$w = \pi_{h,Q}^{',*} \cdot P. \tag{40}$$

Оскільки відображення $\pi_{h,Q}^{',*} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ є оборотним, то з (37) та (40) легко отримаємо, що відповідна пара відображень (38) задається такими алгебричними виразами:

$$\pi_{h,P}^{(1)}(\mu_1, \mu_2) = P_1 = \frac{w_1(\mu_1)}{\mu_1 - \mu_2}\left(\frac{\mu_1}{6} + \frac{\mu_2}{4}\right) + \frac{w_2(\mu_2)}{\mu_2 - \mu_1}\left(\frac{\mu_2}{6} + \frac{\mu_1}{4}\right), \tag{41}$$

$$\pi_{h,P}^{(2)}(\mu_1, \mu_2) = P_2 = \frac{w_1(\mu_1)}{48(\mu_1 - \mu_2)} + \frac{w_2(\mu_2)}{48(\mu_2 - \mu_1)},$$

причому спряжені функції $w_j(\mu_j)$, $j=\overline{1,2}$, за означенням, є сепарабельними стосовно змінних $\mu \in \mathbb{T}_h^2$ і повинні бути отримані з відповідного рівняння Гамільтона–Якобі. З метою їх визначення знайдемо попередньо відповідні рівняння Дубровіна на координати $\mu \in \mathbb{T}_h^2$, використавши третє рівняння системи (34),

$$\frac{d\mu_j}{dx} = \frac{-8\sqrt{R_5(\mu_j)}\sum\limits_{k\neq j}^{2}\mu_k}{\prod\limits_{k\neq j}^{2}(\mu_j-\mu_k)}, \quad j=\overline{1,2}. \tag{42}$$

Рівняння вигляду (42), як відомо [3], належать до класу повністю інтегровних, що випливає з аналізу їх як рівнянь на рімановій поверхні Γ_h^2 алгебричної кривої $w^2 - R_5(\lambda) = 0,\ (\lambda, w) \in \Gamma_h^2$, та аналізу асоційованого з ними так званого відображення Якобі.

Оскільки рівняння (42), розглядувані як відповідні рівняння на торі $\mathbb{T}_h^2 \simeq M_h^2$, є цілком інтегровними, то цілком інтегровними повинні бути гамільтонові системи (21) та (24). Щоб встановити вказану інтегровність Гамільтона–Якобі, необхідно перш за все виразити функції Гамільтона $h^{(x)}, h^{(t)} : M^4 \to \mathbb{R}$ в термінах нових канонічних змінних $(\mu, w) \in M^4$, асоційованих із природною фоліацією $\bigcup\limits_{h\in\mathbb{R}^2} \mathbb{T}_h \simeq M^4$. З цією метою підставимо вирази (37), (41) у формули (21), (23). У результаті отримуємо, що з точністю до сталого множника

$$\begin{aligned} h^{(t)} &= \sum_{j=1}^{2} \frac{\mu_j(w_j^2 - 2\mu_j^3 + a_1\mu_j^2 + a_2\mu_j + a_3)}{\prod\limits_{k\neq j}(\mu_j-\mu_k)}, \\ h^{(x)} &= -\sum_{j=1}^{2} \frac{\mu_1\mu_2(w_j^2 - 2\mu_j^3 + a_1\mu_j^2 + a_2\mu_j + a_3)}{\prod\limits_{k\neq j}(\mu_j-\mu_k)}, \end{aligned} \tag{43}$$

де $a_j = a_j(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}$, $j=\overline{1,3}$, — сталі числа, які задаються алгебричними виразами своїх аргументів. Оскільки на будь-якому фіксованому торі $\mathbb{T}_h^2 \simeq M_h^2$ функції (43) набувають конкретних числових значень $\overline{h}^{(x)} := h^{(x)}|_{\mathbb{T}_h^2}$, $\overline{h}^{(t)} := h^{(t)}|_{\mathbb{T}_h^2}$, то, враховуючи очевидні тотожності

$$\overline{h}^{(t)} = \overline{h}^{(t)} \sum_{j=1}^{2} \frac{\mu_j}{\prod\limits_{k\neq j}(\mu_j-\mu_k)}, \quad \overline{h}^{(x)} = -\overline{h}^{(x)} \sum_{j=1}^{2} \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_j\prod\limits_{k\neq j}(\mu_j-\mu_k)},$$

запишемо рівності (43) у такому канонічному вигляді

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{2} \frac{\mu_j}{\prod\limits_{k\neq j}(\mu_j-\mu_k)} \left(w_j^2 - 2\mu_j^3 + a_1\mu_j^2 + a_2\mu_j + a_3 + \overline{h}^{(t)} + \frac{\overline{h}^{(x)}}{\mu_j} \right) = 0,\\
&\sum_{j=1}^{2} \frac{\mu_1\mu_2}{\prod\limits_{k\neq j}(\mu_j-\mu_k)} \left(w_j^2 - 2\mu_j^3 + a_1\mu_j^2 + a_2\mu_j + a_3 + \overline{h}^{(t)} + \frac{\overline{h}^{(x)}}{\mu_j} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{44}$$

Оскільки рівності (44) виконуються для всіх значень $\overline{h}^{(x)}, \overline{h}^{(t)} \in \mathbb{R}^2$, то на торі $\mathbb{T}_h^2$ повинні виконуватися такі співвідношення:

$$w_j^2 - 2\mu_j^3 + a_1\mu_j^2 + a_2\mu_j + a_3 + \overline{h}^{(t)} + \overline{h}^{(x)}/\mu_j = 0, \quad j = \overline{1,2}.$$

Це означає, що на торі $\mathbb{T}_h^2 \simeq M_h^2$ канонічні змінні $w_j = w_j(\mu_j, h)$, $j = \overline{1,2}$, є сепарабельними за Гамільтоном–Якобі.

Повертаючись до вихідних канонічних перетворень (39), отримуємо відповідну породжуючу функцію $S_h : \mathbb{T}_h \to \mathbb{R}$ у такому сепарабельному вигляді:

$$S_h(\mu_1, \mu_2) := \sum_{j=1}^{2} \int_{\mu_j^{(0)}}^{\mu_j} w_j(\lambda; h) d\lambda = \sum_{j=1}^{2} \int_{\mu_j^{(0)}}^{\mu_j} \sqrt{Q_+(\lambda; h)} d\lambda, \tag{45}$$

де $\lambda \in \mathbb{C}$ — комплексний параметр,

$$Q_+(\lambda; h) := 2\lambda^3 - a_1\lambda^2 - a_2\lambda - (a_3 + \overline{h}^{(t)}) - \overline{h}^{(x)}/\lambda.$$

Оскільки, згідно з (39), вектор $\tau := (x, t)^\top \in \mathbb{R}^2$ еволюційних параметрів на торі $\mathbb{T}_h^2 \simeq M_h^2$ задається формулами

$$x = \frac{\partial S_h(\mu_1, \mu_2)}{\partial \overline{h}^{(x)}}, \quad t = \frac{\partial S_h(\mu_1, \mu_2)}{\partial \overline{h}^{(t)}}, \tag{46}$$

то з (45), (46) отримуємо, що

$$x = -\sum_{j=1}^{2} \int_{\mu_j^{(0)}}^{\mu_j} \frac{d\lambda}{2\sqrt{Q_+(\lambda; h)\lambda^2}} = -\sum_{j=1}^{2} \int_{\mu_j^{(0)}}^{\mu_j} \frac{d\lambda}{2\sqrt{Q(\lambda; h)}}\,,$$

$$t = -\sum_{j=1}^{2} \int_{\mu_j^{(0)}}^{\mu_j} \frac{d\lambda}{2\sqrt{Q_+(\lambda; h)}} = -\sum_{j=1}^{2} \int_{\mu_j^{(0)}}^{\mu_j} \frac{\lambda^2 d\lambda}{2\sqrt{Q(\lambda; h)}}\,,$$

тобто явні гіпереліптичні вирази [3] для еволюції параметрів $\mu_j = \mu_j(x,t)$, $j = \overline{1,2}$, на торі $\mathbb{T}_h^2$ при довільних $(x,t)^\top \in \mathbb{R}^2$, причому

$$Q(\lambda;h) := 2\lambda^5 - a_1\lambda^4 - a_2\lambda^3 - (a_3 + \overline{h}^{(t)})\lambda^2 - \overline{h}^{(x)}\lambda.$$

Розглянемо детальніше еволюцію нашої динамічної системи на торі $\mathbb{T}_h^2$ за змінною $x \in \mathbb{R}$. Легко зауважити, що вираз (45) дає можливість отримати відповідні нові канонічні змінні „дії" згідно з формулами

$$\xi_j = \frac{1}{2\pi} \oint_{\sigma_j} \sqrt{Q_+(\lambda;h)}d\lambda, \tag{47}$$

де $\sigma_j \in H_1(\Gamma_h^2;\mathbb{Z})$, $j = \overline{1,2}$, — базис одновимірної групи голономій (тобто циклів) ріманової поверхні Γ_h^2 алгебричної функції $z = \sqrt{Q_+(\lambda;h)}$, де $(\lambda, z) \in \Gamma_h^2$. Оскільки набір функцій (47) є дійсним і функціонально незалежним як функцій від $h \in \mathbb{R}^2$, то легко отримати породжуючу функцію (45) як функцію нових канонічних змінних (ξ,ψ) „дія-кут" на інваріантному підмноговиді M^4, причому, за означенням, повинна виконуватись умова

$$\langle \psi, d\xi \rangle = \langle \tau, dh \rangle = dS_h(\mu(\psi)), \tag{48}$$

де ψ — кутовий вектор на торі $\mathbb{T}_h^2$. Тоді з (48), (47) отримуємо, що

$$\psi = \frac{\partial S_h}{d\xi} = \frac{\partial S_h}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial \xi} := \Omega^\top \cdot \tau,$$

де матриця

$$\Omega := \frac{\partial h}{\partial \xi} := \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix} \tag{49}$$

називається матрицею частот нашої динамічної системи на торі $\mathbb{T}_h^2$.

Щоб описати тепер динаміку нашої гамільтонової системи на торі $\mathbb{T}_h^2 \simeq M_h^2$ за змінною $x \in \mathbb{R}$, зауважимо, що кутові змінні на торі $\mathbb{T}_h^2$ задовольняють канонічним рівнянням Гамільтона

$$\frac{d\psi_1}{dx} = \frac{\partial \overline{h}^{(x)}}{\partial \xi_1} := \Omega_{11}, \quad \frac{d\psi_2}{dx} = \frac{\partial \overline{h}^{(x)}}{\partial \xi_2} := \Omega_{12},$$

які однозначно визначають відповідні частоти Ω_{11}, Ω_{12} еволюції за змінною $x \in \mathbb{R}$ на торі $\mathbb{T}_h^2$. Як наслідок, стверджуємо, що рух динамічної системи за змінними $x, t \in \mathbb{R}$ на торі $\mathbb{T}_h^2$ буде квазіперіодичним з набором частот (49). Для їх визначення досить обчислити вирази (47) як функції параметра $h \in \mathbb{R}^2$, які залежать від вибору базису $\sigma_j \in H_1(\Gamma_h^2;\mathbb{Z})$,

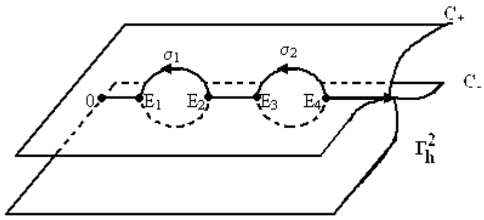

Рис. 3.

$j = \overline{1,2}$, на гіпереліптичній рімановій поверхні Γ_h^2, також фіксованим набором параметрів $a_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,3}$. Останні для практичних обчислень можна вибирати, виходячи, наприклад, із додаткових умов симетрії ріманової поверхні Γ_h^2. З цією метою покладемо

$$Q_+ = (\lambda; h) = 2\lambda^{-1} \prod_{j=1}^{4} (\lambda - E_j),$$

де E_j, $j = \overline{1,4}$, — деякі дійсні числа, причому, очевидно

$$\overline{h}^{(x)} = 2 \prod_{j=1}^{4} E_j, \quad \overline{h}^{(t)} = -2 \prod_{i<j}^{4} E_i E_j \, .$$

Як показано на рис. 3, поверхня Рімана Γ_h^2 має досить просту геометричну форму. Вона складається з двох листів $\mathbb{C}_+$ та $\mathbb{C}_-$ комплексної площини $\mathbb{C}$ із розрізами вздовж дійсної осі від точки $0 \in \mathbb{R}_+$ до $E_1 > 0$, від точки E_3 до $E_2 > E_1$ і далі від точки $E_4 > E_3$ до нескінченності.

[1] *Богоявленский О.Н., Новиков С.П.* О связи гамильтонових формализмов стационарных и нестационарных задач // Функцион. анализ и его приложения. – 1976. – **10**, №1. – С. 9–13.

[2] *Гентош О.Є., Притула М.М., Прикарпатський А.К.* Диференціально-геометричні та Лі-алгебраїчні основи дослідження інтегровних нелінійних динамічних систем на функціональних многовидах. – Львів: Видавничий центр Львів. нац. ун-ту імені Івана Франка, 2005. – 404 с.

[3] *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов: Метод обратной задачи. – М.: Наука, 1980. – 319 с.

[4] *Марченко В.А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1977. – 331 с.

[5] *Митропольский Ю.А., Боголюбов Н.Н., Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г.* Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. – К.: Наук. думка, 1987. – 295 с.

[6] *Мозер Ю.* Некоторые аспекты интегрируемости гамильтоновых систем // Успехи мат. наук. 1981. – **36**, № 5. С. 109–151.

[7] *Прикарпатський А. К., Філь Б.М.* Категорія топологічних джет-многовидів та деякі застосування в теорії нескінченновимірних динамічних систем // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 9. – С. 1242–1256.

[8] *Прикарпатський А., Бігун О.* Про одну конструкцію скінченновимірних редукцій на функціональних многовидах // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, № 3. – С. 7–15.

[9] *Самойленко А.М., Прикарпатський Я.А.* Алгебро-аналітичні та спектральні аспекти цілком інтегровних динамічних систем та їх збурень. – Київ: Інститут математики НАН України, 2002. – Т. 41. – 237 с.

[10] *Magri F.* A simple model of the integrable Hamiltonian equation // J. Math. Phys. – 1978. – **19**, № 3. – P. 1156–1162.

[11] *Marsden J., Weinstein A.* Reduction of symplectic manifolds with symmetry // Rept. Math. Phys. – 1974. – V. 5, № 1. – P. 121–130.

[12] *Prykarpatsky A.K., Mykytiuk I.V.* Algebraic integrability of nonlinear dynamical systems on manifolds: quantum and classical aspecty. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. 1998. – 588 p.

[13] *Prytula M., Samoylenko V., Suyarov V.* The complete integrability analysis of the inverse Korteveg – de Vries (invKdV) // Nonlinear Vibration Problems (Warszawa). – 1993. – **25**. – P. 411–422.

THE COMPLETE INTEGRABILITY ANALYSIS OF A FOUR-DIMENSIONAL REDUCTION OF THE INVERSE KORTEWEG-DE VRIES DYNAMICAL SYSTEM

Ol'ha VOROBYOVA, Mykola PRYTULA

Ivan Franko Lviv National University,
1 Universytetska Str., Lviv 79602, Ukraine

The local finite–dimensional Novikov–Bogoyavlensky type reductions of the inverse Korteveg–de Vries nonlinear dynamical system and their Liouville–Arnold integrability by quadratures are investigated.