Математичний Вісник
Наукового Товариства
ім. Тараса Шевченка
2014. — Т.11

Mathematical Bulletin
of Taras Shevchenko
Scientific Society
2014. — V.11

ПОПЕРЕДНЯ ГРУПОВА КЛАСИФІКАЦІЯ (2+1)-ВИМІРНИХ ЛІНІЙНИХ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ КОЛМОГОРОВА–ФОККЕРА–ПЛАНКА

Василь Давидович

Інститут математики НАН України, Терещенківська 3, Київ, Україна

В. Давидович. *Попередня групова класифікація (2+1)-вимірних лінійних ультрапараболічних рівнянь Колмогорова–Фоккера–Планка* // Мат. вісн. Наук. тов. ім. Т. Шевченка. — 2014. — Т.11. — С. 51–61.

Виконано попередню групову класифікацію класу (2+1)-вимірних ультрапараболічних рівнянь, які інваріантні відносно низькорозмірних розв'язних алгебр Лі.

V. Davydovych, *Preliminary group classification of (2+1)-dimensional linear ultraparabolic Kolmogorov–Fokker–Planck equations*, Math. Bull. T. Shevchenko Sci. Soc. **11** (2014), 51–61.

Preliminary group classification of a class of (2+1)-dimensional ultraparabolic equations invariant under low-dimensional solvable Lie algebras is done.

1. Вступ

Розглянемо такий клас (2+1)-вимірних лінійних ультрапараболічних рівнянь Колмогорова–Фоккера–Планка:

$$u_t = A(t,x,y)\,u_{xx} + B(t,x,y)\,u_x + C(t,x,y)\,u_y + D(t,x,y)\,u, \tag{1}$$

де A, B, C та D — довільні гладкі функції своїх змінних в деякій області простору $\mathbb{R}^3$, $AC \neq 0$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K70, 76M60 *УДК:* 517.95

Ключові слова і фрази: Ультрапараболічне рівняння, перетворення еквівалентності, групова класифікація, максимальна алгебра інваріантності, розв'язна алгебра Лі

E-mail: davydovych@imath.kiev.ua

Рівняння з класу (1) широко використовують для опису різноманітних процесів у фізиці та при математичних розрахунках в економіці [1–5]. Зокрема, серед найвідоміших рівнянь з класу (1) варто згадати такі:
рівняння Крамерса [1]

$$u_t = -(xu)_y + (V'(y)u)_x + \gamma(xu + u_x)_x, \tag{2}$$

яке описує рух частинки у флуктуючому середовищі (функція $u = u(t, x, y)$ — густина ймовірності, функція $V(y)$ — зовнішній потенціал, γ — стала);
при обчисленні значення азійського опціону [5] використовують рівняння

$$u_t = -\frac{1}{2}\sigma^2 x^2\, u_{xx} - rx\, u_x + \log x\, u_y + r\, u, \tag{3}$$

або

$$u_t = -\frac{1}{2}\sigma^2 x^2\, u_{xx} - rx\, u_x + \frac{x}{t_0 - T}\, u_y + r\, u, \tag{4}$$

де $u(t, x, y)$ — значення азійського опціону, яке залежить від курсу акцій (змінна x) в момент часу t, y — середнє значення курсу акцій, T — термін дії контракту, t_0 — початок контракту, r — процентна ставка, σ — волатильність.

Симетрійні властивості деяких підкласів класу (1) досліджувалися в роботах [6–9]. Зокрема, у роботі [7] проведено групову класифікацію класу рівнянь (2). У статті [10] показано, що (3) та (4) зводяться відповідно до рівнянь

$$u_t = u_{xx} - xu_y \tag{5}$$

та

$$u_t = u_{xx} + e^x u_y. \tag{6}$$

Зазначимо, що фундаментальний розв'язок рівняння (5), яке було отримане Колмогоровим у 1934 р. для опису неізотропних дифузійних процесів, є відомим [2]. Окрім цього, також знайдено максимальні алгебри інваріантності (МАІ) рівнянь (5) та (6) (див., наприклад, [8, 9]).

Оскільки кожне рівняння з класу (1) є лінійним, то при фіксованих значеннях функцій A, B, C та D його МАІ є нескінченновимірною з оператором $p\,\partial_u$, де функція $p\,(t, x, y)$ — довільний гладкий розв'язок рівняння (1). Таким чином, при проведенні попередньої групової класифікації ми виключатимемо з розгляду оператори вигляду $p\,\partial_u$, тобто будемо шукати лише скінченновимірні частини МАІ рівнянь з класу (1). Зокрема, **метою роботи** є знаходження таких рівнянь вигляду (1), МАІ яких є розв'язними та мають розмірність не більше 4-х.

При вивченні симетрійних властивостей класу (1) неможливо застосувати класичний метод Лі–Овсяннікова. Це обумовлено тим, що довільні елементи A, B, C і D досліджуваного класу залежать від змінних t, x та y. Отже, при проведенні попередньої групової класифікації будемо використовувати метод Жданова–Лагно, запропонований в роботі [11] (див., детальніше, [12]). На сьогоднішній день вказаний метод використовується при розгляді широких класів диференціальних рівнянь (див., н-д, [13–17]).

2. Перетворення еквівалентності та оператор інваріантності класу рівнянь (1)

Важливу роль в процесі дослідження симетрійних властивостей класу диференціальних рівнянь методом Жданова–Лагно відіграють перетворення еквівалентності (точкові перетворення, які зводять довільно вибране рівняння з заданого класу до деякого іншого рівняння з цього ж класу). Зокрема, метод Жданова–Лагно ефективний при вивченні таких класів диференціальних рівнянь, які допускають широку групу перетворень еквівалентності.

Теорема 2.1. *Перетворення еквівалентності класу рівнянь (1) мають вигляд*

$$\bar{t} = T(t, y),\ \bar{x} = X(t, x, y),\ \bar{y} = Y(t, y),\ v = \varphi(t, x, y)u \tag{7}$$

($T, X,\ Y$ та φ — довільні гладкі функції, $\varphi X_x(T_tY_y - T_yY_t) \neq 0$) та зводять довільно вибране рівняння з класу (1) в деяке інше рівняння вигляду

$$v_{\bar{t}} = \tilde{A}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y})v_{\bar{x}\bar{x}} + \tilde{B}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y})v_{\bar{x}} + \tilde{C}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y})v_{\bar{y}} + \tilde{D}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y})v, \tag{8}$$

де функції $\tilde{A},\ \tilde{B},\ \tilde{C}$ та $\tilde{D}$ знаходяться з таких співвідношень:

$$(T_t - CT_y)\tilde{A} = X_x^2 A, \tag{9}$$

$$(T_t - CT_y)\tilde{B} = X_yC - X_t + \Big(X_{xx} - 2\frac{\varphi_x}{\varphi}X_x\Big)A + X_xB, \tag{10}$$

$$(T_t - CT_y)\tilde{C} = Y_yC - Y_t, \tag{11}$$

$$(T_t - CT_y)\tilde{D} = D - \frac{\varphi_y}{\varphi}C + \frac{\varphi_t}{\varphi} + \Big(2\frac{\varphi_x^2}{\varphi^2} - \frac{\varphi_{xx}}{\varphi}\Big)A - \frac{\varphi_x}{\varphi}B. \tag{12}$$

Доведення теореми ґрунтується на прямому методі побудови групи перетворень еквівалентності (див., н-д, [11]).

Зауваження 2.2. Перетворення еквівалентності (7) дозволяють спростити клас (1) (н-д, покласти $B = D = 0$). Проте при проведені попередньої групової класифікації досліджуваного класу ми розглядатимемо саме рівняння вигляду (1). Це обумовлено особливостями методу, який буде використано в роботі.

Зауваження 2.3. У випадку $C_x = 0$ існує перетворення, яке зводить рівняння (1) до рівняння з функцією $C = 0$ (випливає з співвідношення (11)). Таким чином, будемо розглядати лише випадок $C_x \neq 0$.

Перед тим, як перейти до застосування методу Жданова–Лагно, знайдемо загальний вигляд оператора симетрії Лі класу рівнянь (1).

Теорема 2.4. *Оператор інваріантності класу рівнянь (1) має такий вигляд:*

$$X = \tau(t,y)\,\partial_t + \xi^1(t,x,y)\,\partial_x + \xi^2(t,y)\,\partial_y + (r(t,x,y)\,u + p(t,x,y))\,\partial_u, \tag{13}$$

де τ, ξ^1, ξ^2, r та p — невідомі гладкі функції, які знаходяться з системи визначальних рівнянь (СВР)

$$A_x\,\xi^1 + A_y\,\xi^2 + A_t\,\tau + A\left(\tau_t - 2\,\xi^1_x - C\tau_y\right) = 0, \tag{14}$$

$$B_x\xi^1 + B_y\xi^2 + B_t\tau + B(\tau_t - \xi^1_x - C\tau_y) + A(2r_x - \xi^1_{xx}) - C\xi^1_y + \xi^1_t = 0, \tag{15}$$

$$C_x\,\xi^1 + C_y\,\xi^2 + C_t\,\tau + C\left(\tau_t - \xi^2_y - C\tau_y\right) + \xi^2_t = 0, \tag{16}$$

$$D_x\,\xi^1 + D_y\,\xi^2 + D_t\,\tau + D\,(\tau_t - C\tau_y) + Ar_{xx} + Br_x + Cr_y - r_t = 0, \tag{17}$$

$$p_t = Ap_{xx} + Bp_x + Cp_y + Dp. \tag{18}$$

Доведення теореми ґрунтується на застосуванні критерію інваріантності диференціальних рівнянь (див., н-д, монографії [12, 18–21]).

Врахувавши той факт, що ми виключаємо з розгляду оператори вигляду $p\,\partial_u$ (які відповідають за нескінченновимірну частину МАІ рівняння (1)), шуканий оператор симетрії Лі (13) набуває вигляду

$$X = \tau(t,y)\,\partial_t + \xi^1(t,x,y)\,\partial_x + \xi^2(t,y)\,\partial_y + r(t,x,y)u\,\partial_u. \tag{19}$$

3. Низькорозмірні розв'язні алгебри Лі класу рівнянь (1)

З СВР (14)–(17) випливає, що при довільних значеннях функцій A, B, C та D алгебра інваріантності рівняння (1) є одновимірною з базисним оператором $u\partial_u$. Оскільки вказаний оператор комутує з операторами вигляду (19) на нуль ($[u\partial_u, X] = 0$), то серед двовимірних лише абелева алгебра [22]

$$2g_1 : \; [e_1, e_2] = 0$$

може бути алгеброю Лі рівняння (1).

Для побудови всіх можливих нееквівалентних реалізацій алгебри $2g_1$, застосуємо перетворення (7) до оператора (19):

$$\begin{gathered}\bar{X} = \left(\tau T_t + \xi^2 T_y\right)\partial_{\bar{t}} + \left(\tau X_t + \xi^1 X_x + \xi^2 T_y\right)\partial_{\bar{x}} + \left(\tau Y_t + \xi^2 Y_y\right)\partial_{\bar{y}} + \\ \left(\tau\varphi_t + \xi^1\varphi_x + \xi^2\varphi_y + \varphi\, r\right) u\partial_{\bar{v}}.\end{gathered} \tag{20}$$

З (20) випливає, що у випадку $(\tau)^2 + (\xi^2)^2 \neq 0$ існують перетворення, які довільно вибраний оператор вигляду (19) зводять до оператора $\partial_{\bar{t}}$. Зокрема, вказані перетворення можна знайти, розв'язавши такі рівняння:

$$\tau T_t + \xi^2 T_y = 1,\ \tau X_t + \xi^1 X_x + \xi^2 T_y = 0,$$
$$\tau Y_t + \xi^2 Y_y = 0,\ \tau\varphi_t + \xi^1\varphi_x + \xi^2\varphi_y + \varphi\, r = 0.$$

У випадку $\tau = \xi^2 = 0,\ \xi^1 \neq 0$ отримуємо оператор $\partial_{\bar{x}}$. Якщо $\tau = \xi^2 = \xi^1 = 0$, то оператор (20) має вигляд $rv\partial_v$ і зводиться до одного з таких операторів: $\bar{x}v\partial_v\ (r_x \neq 0)$, $\bar{t}\,v\partial_v\ \left((r_t)^2 + (r_y)^2 \neq 0\right)$, $\alpha v\partial_v\ (r = \alpha = const)$. Таким чином, нами доведено теорему.

Теорема 3.1. *З точністю до перетворень (7) та сталого ненульового множника, довільно вибраний оператор вигляду (19) можна звести до одного з операторів*

$$\partial_t,\ \partial_x,\ u\partial_u,\ tu\partial_u,\ xu\partial_u. \tag{21}$$

Серед операторів (21) лише оператори $\partial_t,\ \partial_x$ та $u\partial_u$ задовольняють СВР (14)–(17). Проте оператор ∂_x приводить до умови $C_x = 0$ і виключається з розгляду. Таким чином, ми отримали одну двовимірну алгебру Лі, яку допускає рівняння (1).

Теорема 3.2. *З точністю до перетворень еквівалентності (7) існує єдиний клас рівнянь вигляду (1)*

$$u_t = A(x,y)u_{xx} + B(x,y)u_x + C(x,y)u_y + D(x,y)u, \tag{22}$$

який допускає двовимірну алгебру Лі операторів симетрії вигляду (19), а саме:

$$2{g_1}^1 = \langle \partial_t,\ u\partial_u \rangle.$$

При довільних значеннях функцій A, B, C та D ця алгебра є МАІ класу рівнянь (22).

При побудові тривимірних розв'язних алгебр інваріантності класу рівнянь (1) достатньо до операторів алгебри $2g_1^1$ додати один оператор вигляду (19) і знайти всі можливі нееквівалентні реалізації, що задовольняють відповідні комутаційні співвідношення та СВР (14)–(17). При цьому будемо використовувати перетворення

$$\bar{t} = t + T(y),\ \bar{x} = X(x,y),\ \bar{y} = Y(y),\ v = \varphi(x,y)u, \tag{23}$$

які не змінюють вигляд оператора ∂_t.

Згідно з класифікацією Мубаракзянова [22] існує 7 неізоморфних тривимірних розв'язних алгебр Лі. Проте нам необхідно розглянути лише ті з них, які можуть містити оператор $u\partial_u$, а саме:

$$3g_1 :\ [e_i, e_j] = 0\ (i,j \in \{1,2,3\});\quad g_2 \oplus g_1 :\ [e_1, e_2] = e_2;\quad g_{3.1} :\ [e_2, e_3] = e_1.$$

Оскільки процес побудови реалізацій для кожної з зазначених алгебр є практично аналогічним, то розглянемо лише алгебру $3g_1$ з базисними операторами: $e_1 = \partial_t$, $e_2 = u\partial_u$, $e_3 = X$, де X — довільний оператор вигляду (19). З умови $[\partial_t, X] = 0$ отримуємо:

$$X = \tau(y)\,\partial_t + \xi^1(x,y)\,\partial_x + \xi^2(y)\,\partial_y + r(x,y)u\,\partial_u.$$

Застосувавши перетворення (23) до оператора X, маємо

$$\bar{X} = (\tau + \xi^2 T_y)\partial_{\bar{t}} + (\xi^1 X_x + \xi^2 T_y)\partial_{\bar{x}} + \xi^2 Y_y\,\partial_{\bar{y}} + (\xi^1\varphi_x + \xi^2\varphi_y + \varphi\, r)u\partial_{\bar{v}}. \quad (24)$$

Провівши аналогічні до наведених в теоремі 3.1 обчислення, отримуємо оператори:

$$\partial_x,\ \partial_y,\ y\partial_t,\ y\partial_t + \partial_x,\ xu\partial_u,\ yu\partial_u,\ y\partial_t + xu\partial_u,\ y\partial_t + r(y)u\partial_u\ (r' \neq 0). \quad (25)$$

Підставивши кожен з операторів (25) у СВР (14)–(17) (з функціями A, B, C і D, які залежать лише від змінних x та y), встановили, що лише дві реалізації тривимірної розв'язної алгебри $3g_1$ задовольняють умову задачі, а саме:

$$\begin{aligned} &3{g_1}^1 = \langle \partial_t,\ u\partial_u,\ \partial_y\rangle, && u_t = A(x)u_{xx} + B(x)u_x + C(x)u_y + D(x)u;\\ &3{g_1}^2 = \langle \partial_t,\ u\partial_u,\ y\partial_t + \partial_x\rangle, && u_t = x^{-1}\big(A(y)u_{xx} + B(y)u_x - u_y + D(y)u\big). \end{aligned}$$

При розгляді алгебри $g_2 \oplus g_1$ ми отримали такі чотири нееквівалентні (з точністю до перетворень (23)) реалізації:

$$\begin{aligned} &g_2 \oplus {g_1}^1 = \langle \partial_t,\ e^t\partial_y,\ u\partial_u,\rangle, && g_2 \oplus {g_1}^2 = \langle -t\partial_t + \partial_x,\ \partial_t,\ u\partial_u\rangle,\\ &g_2 \oplus {g_1}^3 = \langle -t\partial_t + \partial_y,\ \partial_t,\ u\partial_u\rangle, && g_2 \oplus {g_1}^4 = \langle \partial_t,\ e^t(y\partial_t + \partial_x),\ u\partial_u\rangle, \end{aligned}$$

які задовольняють умову задачі.

Проте серед вказаних реалізацій є еквівалентні з точністю до перетворень (7). Дійсно, заміни $\bar{t} = y,\ \bar{y} = te^y$ і $\bar{t} = -y^{-1}e^{-t},\ \bar{x} = t - xy$ зводять відповідно $g_2 \oplus {g_1}^3$ в $g_2 \oplus {g_1}^1$ та $g_2 \oplus {g_1}^4$ в $g_2 \oplus {g_1}^2$.

Таким чином, отримуємо дві нееквівалентні (з точністю до перетворень (7)) реалізації алгебри $g_2 \oplus g_1$ та відповідні їм класи рівнянь

$$\begin{aligned} &g_2 \oplus {g_1}^1 = \langle \partial_t, e^t\partial_y, u\partial_u,\rangle, && u_t = A(x)u_{xx} + B(x)u_x + (C(x) - y)u_y + D(x)u;\\ &g_2 \oplus {g_1}^2 = \langle -t\partial_t + \partial_x, \partial_t, u\partial_u\rangle, && u_t = e^x(A(y)u_{xx} + B(y)u_x + C(y)u_y + D(y)u). \end{aligned}$$

При розгляді алгебри $g_{3.1}$ ми також отримали дві нееквівалентні (з точністю до перетворень (7)) реалізації та відповідні їм класи рівнянь

$$\begin{aligned} &{g_{3.1}}^1 = \langle u\partial_u, \partial_t, \partial_y + tu\partial_u\rangle, && u_t = A(x)u_{xx} + B(x)u_x + C(x)u_y + (D(x) + y)u;\\ &{g_{3.1}}^2 = \langle u\partial_u, \partial_t, y\partial_t + \partial_x + tu\partial_u\rangle, && u_t = x^{-1}\big(A(y)u_{xx} + B(y)u_x - u_y + (D(y) + \tfrac{x^2}{2})u\big). \end{aligned}$$

Об'єднавши отримані результати, сформулюємо теорему.

Теорема 3.3. *З точністю до перетворень еквівалентності (7) існує шість класів рівнянь вигляду (1), які допускають тривимірні розв'язні алгебри Лі операторів симетрії вигляду (19), а саме:*

$$3g_1{}^1 = \langle \partial_t, u\partial_u, \partial_y\rangle,\ u_t = A(x)u_{xx} + B(x)u_x + C(x)u_y + D(x)u; \tag{26}$$

$$3g_1{}^2 = \langle \partial_t, u\partial_u, y\partial_t + \partial_x\rangle,\ u_t = x^{-1}(A(y)u_{xx} + B(y)u_x - u_y + D(y)u); \tag{27}$$

$$g_2 \oplus g_1{}^1 = \langle \partial_t, e^t\partial_y, u\partial_u\rangle,\ u_t = A(x)u_{xx} + B(x)u_x + (C(x)-y)u_y + D(x)u; \tag{28}$$

$$g_2 \oplus g_1{}^2 = \langle -t\partial_t + \partial_x, \partial_t, u\partial_u\rangle,\ u_t = e^x(A(y)u_{xx} + B(y)u_x + C(y)u_y + D(y)u); \tag{29}$$

$$g_{3.1}{}^1 = \langle u\partial_u, \partial_t, \partial_y + tu\partial_u\rangle,\ u_t = A(x)u_{xx} + B(x)u_x + C(x)u_y + (D(x)+y)u; \tag{30}$$

$$g_{3.1}{}^2 = \langle u\partial_u, \partial_t, y\partial_t + \partial_x + tu\partial_u\rangle,\ u_t = x^{-1}\big(A(y)u_{xx} + B(y)u_x - u_y + (D(y) + \tfrac{x^2}{2})u\big). \tag{31}$$

При довільних значеннях функцій A, B, C та D кожна з отриманих алгебр є МАІ відповідного їй класу рівнянь.

4. 4-вимірні розв'язні алгебри Лі операторів симетрії вигляду (19) рівняння (1)

Перед тим, як перейти до побудови 4-вимірних розв'язних алгебр Лі класу рівнянь (1), зауважимо, що при *довільних фіксованих* значеннях функцій A, B та D рівняння (27) і (31) допускають алгебру Лі розмірності 5 і вище. Таким чином, ми виключаємо вказані рівняння з подальшого розгляду. Зазначимо також, що для класу рівнянь (29) ефективнішим є застосування прямого методу побудови МАІ замість методу Жданова–Лагно. Зокрема, застосувавши до (29) перетворення

$$\bar{t} = -\int \frac{\exp\left(-\int \frac{B}{C}dy\right)}{C}dy,\quad \bar{y} = -t,\quad \bar{x} = -x + \int \frac{B}{C}dy,\quad v = \exp\Big(\int \frac{D}{C}dy\Big)u$$

отримуємо

$$u_t = A(t)u_{xx} + e^x u_y. \tag{32}$$

Теорема 4.1. *При довільному значенні функції $A(t)$ клас рівнянь (32) допускає 3-вимірну МАІ операторів симетрії вигляду (19):*

$$\langle \partial_y,\ \partial_x + y\partial_y,\ u\partial_u\rangle. \tag{33}$$

З точністю до перетворень еквівалентності (7) клас рівнянь (32) допускає розширення алгебри Лі (33) лише у таких двох випадках:

$$1)\ \left(\tfrac{A'}{A^2}\right)' = aA:\ \langle \tfrac{1}{A}\,\partial_t + \tfrac{A'}{A^2}\,\partial_x - t\tfrac{a}{2}\,xu\partial_u,\ \partial_y,\ \partial_x + y\partial_y,\ u\partial_u\rangle, \tag{34}$$

де $a \neq 0$ — довільна стала;

$$2)\ A(t) = 1:\ \langle \partial_t,\ \partial_y,\ \partial_x + y\partial_y,\ u\partial_u,\ 2y\partial_x + y^2\partial_y + (e^x - y)\,\partial_u\rangle.$$

Зауваження 4.2. Рівняння (32) з функцією $A(t)$, яка є розв'язком рівняння (34), перетворенням $\bar{t} = \frac{a}{2}\int A dt$, $\bar{x} = x - \ln A$, $\bar{y} = \frac{a}{2}y$, $\bar{a} = \frac{2}{a}$, $v = \exp\left(\frac{A'}{2A^2}x - \frac{a}{2}\int A\ln A dt - \frac{1}{4}\int\frac{(A')^2}{A^3}dt\right)u$ зводиться до рівняння

$$u_t = au_{xx} + e^x u_y + xu$$

з MAI вигляду

$$\langle \partial_t,\ \partial_y,\ \partial_x + y\partial_y + tu\partial_u,\ u\partial_u\rangle.$$

Таким чином, при дослідженні симетрійних властивостей класу рівнянь (32) ми отримали лише одне рівняння з 4-вимірною MAI.

Перейдемо до побудови 4-вимірних розв'язних алгебр Лі для класів рівнянь (26), (28) та (30). Зокрема, згідно з класифікацією Мубаракзянова і умовою задачі, нам необхідно розглянути такі алгебри:

$$\begin{aligned}
&4g_1:\ [e_i, e_j] = 0\ (i,j = 1,2,3,4);\\
&g_2 \oplus 2g_1:\ [e_1, e_2] = e_2;\\
&g_{3.1} \oplus g_1:\ [e_2, e_3] = e_1;\\
&g_{3.2} \oplus g_1:\ [e_1, e_3] = e_1,\ [e_2, e_3] = e_1 + e_2;\\
&g_{3.3} \oplus g_1:\ [e_1, e_3] = e_1,\ [e_2, e_3] = e_2;\\
&g_{3.4} \oplus g_1:\ [e_1, e_3] = e_1,\ [e_2, e_3] = he_2,\ -1 \le h < 1,\ h \ne 0;\\
&g_{3.5} \oplus g_1:\ [e_1, e_3] = pe_1 - e_2,\ [e_2, e_3] = e_1 + pe_2,\ p \ge 0;\\
&g_{4.1}:\ [e_2, e_4] = e_1,\ [e_3, e_4] = e_2;\\
&g_{4.3}:\ [e_1, e_4] = e_1,\ [e_3, e_4] = e_2.
\end{aligned}$$

В результаті обчислень ми отримали такі нееквівалентні (з точністю до перетворень (7)) 4-вимірні реалізації розв'язних алгебр Лі та відповідні їм рівняння:

$$g_2 \oplus 2{g_1}^1 = \langle \partial_t,\ e^t\partial_y,\ \partial_x + \partial_y,\ u\partial_u\rangle,\ u_t = au_{xx} + bu_x + (x-y)u_y + du; \quad (35)$$

$$g_2 \oplus 2{g_1}^2 = \langle \partial_x - y\partial_y,\ \partial_y,\ \partial_t,\ u\partial_u\rangle,\ u_t = au_{xx} + bu_x + e^{-x}u_y + du; \quad (36)$$

$$g_{3.1} \oplus {g_1}^1 = \langle \partial_y,\ \partial_t,\ \partial_x + t\partial_y,\ u\partial_u\rangle,\ u_t = au_{xx} + bu_x - xu_y + du; \quad (37)$$

$$\begin{aligned}g_{3.2} \oplus {g_1}^1 &= \langle \partial_y,\ \partial_t,\ t\partial_t + \partial_x + (t+y)\partial_y,\ u\partial_u\rangle,\\ &u_t = e^{-x}\left(au_{xx} + bu_x - xe^x u_y + du\right);\end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned}g_{3.2} \oplus {g_1}^2 &= \langle e^t\partial_y,\ e^t(\partial_x + t\partial_y),\ -\partial_t, u\partial_u\rangle,\\ &u_t = au_{xx} + (b-x)u_x - (x+y)u_y + du;\end{aligned} \quad (39)$$

$$g_{3.4} \oplus {g_1}^1 = \langle e^t\partial_y,\ e^{ht}(\partial_x + \partial_y), -\partial_t,\ u\partial_u\rangle,\ h \neq 0,\ h \neq 1,$$
$$u_t = au_{xx} + (b - hx)u_x + \big((1-h)x - y\big)u_y + du; \tag{40}$$
$$g_{3.4} \oplus {g_1}^2 = \langle \partial_t,\ \partial_y,\ t\partial_t + \partial_x + hy\partial_y,\ u\partial_u\rangle,\ h \neq 0,\ h \neq 1,$$
$$u_t = e^{-x}(au_{xx} + bu_x + e^{hx}u_y + du); \tag{41}$$
$$g_{3.5} \oplus {g_1}^1 = \langle \partial_t,\ \partial_y,\ (y+pt)\partial_t + \partial_x + (py - t)\partial_y,\ u\partial_u\rangle,\ p \geq 0,$$
$$u_t = \frac{e^{-px}}{\cos x}\left(au_{xx} + bu_x + \sin x e^{px}u_y + du\right); \tag{42}$$
$${g_{4.1}}^1 = \langle u\partial_u, \partial_y, \partial_t, \partial_x{+}t\partial_y{+}yu\partial_u\rangle,\ u_t = au_{xx} + bu_x - xu_y + \big(d + \tfrac{x^2}{2}\big)u; \tag{43}$$
$${g_{4.1}}^2 = \langle u\partial_u,\ \partial_t,\ -y\partial_t + \partial_x - \tfrac{1}{2}y^2u\partial_u,\ \partial_y + tu\partial_u\rangle,$$
$$u_t = x^{-1}\left(au_{xx} + bu_x + u_y + (d + xy)u\right); \tag{44}$$
$${g_{4.3}}^1 = \langle \partial_y,\ u\partial_u,\ \partial_t,\ \partial_x + y\partial_y + tu\partial_u\rangle,\ u_t = au_{xx} + bu_x + e^xu_y + xu; \tag{45}$$
$${g_{4.3}}^2 = \langle e^t\partial_y, u\partial_u, \partial_x{+}\partial_y{+}tu\partial_u, -\partial_t\rangle,\ u_t = au_{xx} + bu_x + (x{-}y)u_y + xu. \tag{46}$$

В рівняннях (35)–(46) $a \neq 0$, b та d — довільні сталі.

Застосуємо до кожного з рівнянь (35)–(46) перетворення еквівалентності (7). Результат подамо у вигляді таблиці 1.

Зауваження 4.3. У таблиці 1 в першому стовпчику поряд з номерами випадків подано номери рівнянь, до яких застосовувалась заміна.

Оскільки рівняння з випадків 1, 3, 5, 6, 9, 10 та 12 таблиці 1 належать до класів рівнянь (27) і (31) (які виключені з розгляду), то залишається дослідити лише рівняння з випадків 4, 7 та 8. У підсумку отримуємо таку теорему.

Теорема 4.4. *З точністю до перетворень еквівалентності (7) існує чотири класи рівнянь вигляду (1), МАІ яких є 4-вимірними розв'язними алгебрами Лі операторів симетрії вигляду (19), а саме:*

$$\begin{aligned}
&u_t = au_{xx} + e^xu_y + xu,\\
&\qquad \langle \partial_t,\ \partial_y,\ \partial_x + y\partial_y + tu\partial_u,\ u\partial_u\rangle\\
&u_t = u_{xx} + \ln x\, u_y + \frac{d}{x^2}u,\\
&\qquad \langle \partial_t,\ \partial_y,\ 2t\partial_t + x\partial_x + (2y - t)\partial_y,\ u\partial_u\rangle,\\
&u_t = u_{xx} + x^k\, u_y + \frac{d}{x^2}u,\ k \notin \{-2, 0\},\ (k-1)^2 + d^2 \neq 0,\\
&\qquad \langle \partial_t,\ \partial_y,\ 2t\partial_t + x\partial_x + (2+k)y\partial_y,\ u\partial_u\rangle,\\
&u_t = \frac{e^{-px}}{\cos x}\left(u_{xx} + \sin x\, e^{px}u_y + du\right),\ p \geq 0,\\
&\qquad \langle \partial_t,\ \partial_y,\ (y+pt)\partial_t + \partial_x + (py - t)p_y,\ u\partial_u\rangle.
\end{aligned} \tag{47}$$

Таблиця 1

Спрощення рівнянь (35)–(46) перетвореннями еквівалентності (7)

№	Заміна змінних	Рівняння після заміни
1. (35)	$\bar{t} = e^{-t},\ \bar{x} = -x - bt,\ \bar{y} = -e^{-t}(y + bt + b),$ $v = e^{-dt}u,\ a \to -a$	$u_t = \frac{a}{t}\, u_{xx} - xu_y$
2. (36)	$\bar{t} = at,\ \bar{x} = -x,\ \bar{y} = ay,$ $v = \exp\left(\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b^2}{4a} - d\right)t\right)u$	$u_t = u_{xx} + e^x u_y$
3. (37)	$\bar{t} = at,\ \bar{y} = ay,$ $v = \exp\left(\frac{b}{2a}\, x + \left(\frac{b^2}{4a} - d\right)t\right)u$	$u_t = u_{xx} - xu_y$
4. (38)	$\bar{t} = \frac{a}{4}t,\ \bar{x} = \exp\left(\frac{x}{2}\right),\ \bar{y} = -\frac{a}{8}y,$ $v = \exp\left(\frac{b}{2a}x + \frac{1}{4}x\right) u$	$u_t{=}u_{xx}{+}\ln x\, u_y{+}\frac{d}{x^2}u$
5. (39)	$\bar{t} = -2t,\ \bar{x} = (x - b)e^{-t},\ \bar{y} = -2(y + b)e^{-t},$ $v = e^{-dt}u,\ a \to -2a$	$u_t = ae^t u_{xx} - xu_y$
6. (40)	$\bar{t} = e^{ht-t},\ \bar{x} = (x{-}\frac{b}{h})e^{-ht},\ \bar{y} = (y{+}\frac{h-1}{h}b)e^{-t},$ $v = e^{-dt}u,\ (h-1)k = 1 - 3h,\ k \notin \{-3, -1\}$	$u_t = at^k u_{xx} - xu_y$
7. (41)	$\bar{t} = \frac{a}{4}t,\ \bar{x} = \exp\left(\frac{x}{2}\right),\ \bar{y} = \frac{a}{4}y,$ $v = \exp\left(\frac{b}{2a}x{+}\frac{1}{4}x\right)u,\ 2(h{-}1){=}k,\ k \notin \{-2, 0\}$	$u_t = u_{xx}{+}x^k\, u_y{+}\frac{d}{x^2}u$
8. (42)	$\bar{t} = at,\ \bar{y} = ay, v = \exp\left(\frac{b}{2a}\, x\right) u$	$u_t = \frac{e^{-p\,x}}{\cos x}(u_{xx}+$ $\sin x\, e^{p\,x}u_y + du)$
9. (43)	$v = \exp\left(\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b^2}{4a} - d\right) t\right) u$	$u_t = au_{xx}{-}xu_y{+}\frac{x^2}{2}u$
10. (44)	$\bar{x} = x + \frac{ay^3}{3} - by,\ \bar{y} = at - \frac{a^2y^4}{12} + \frac{aby^2}{2},$ $\bar{t} = -ay,\ v = \exp\left(\frac{xy^2}{2} + dy - \frac{by^3}{6} + \frac{ay^5}{20}\right)u$	$u_t = u_{xx} - xu_y$
11. (45)	$\bar{x} = x - \frac{b^2}{4a},\ \bar{y} = y\exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right),\ v = \exp\left(\frac{b}{2a}\, x\right)u$	$u_t = au_{xx}{+}e^x u_y{+}xu$
12. (46)	$\bar{x} = x{+}at^2{+}bt,\ \bar{y} = ye^{-t} - \int \frac{at^2+bt}{e^t}dt,\ \bar{t} = e^{-t},$ $v = \exp\left(-tx - \frac{1}{2}bt^2 - \frac{a}{3}t^3\right) u,\ a \to -a$	$u_t = \frac{a}{t}\, u_{xx} - xu_y$

5. Висновки

Використовуючи метод Жданова–Лагно та відомі факти з групового аналізу диференціальних рівнянь, здійснено попередню групову класифікацію широкого класу (2+1)-вимірних лінійних ультрапараболічних рівнянь вигляду (1) відносно розв'язних алгебр Лі до розмірності 4 включно. Зокрема, було встановлено, що клас рівнянь (1) (з точністю до перетворень еквівалентності (7)) допускає одну двовимірну, шість тривимірних та чотири 4-вимірних розв'язних МАІ операторів симетрії вигляду (19). Для завершення класифікаційної задачі відносно скінченновимірних алгебр Лі необхідно дослідити рівняння (27) та (31) прямим методом, а також знайти (методом Жданова–Лагно) всі прості алгебри, які допускає клас рівнянь (1).

ЛІТЕРАТУРА

1. C. W. Gardiner, *Handbook of stochastic methods*, Berlin, Springer (1985).
2. A. N. Kolmogoroff, *Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung),* Ann. Math. (1934), 116–117.
3. P. Wilmott, S. Howison, J. Dewynne, *Option pricing: mathematical models and computation,* Oxford financial press (1993).
4. A. Pascucci, *Kolmogorov equations in physics and in finance,* Prog. Nonlinear Differential Equations Appl. **63** (2005), 353—364.
5. H. Geman, M. Yor, *Bessel processes, Asian options, and perpetuities,* Math. Fin. **3:4** (1993), 349–375.
6. W. M. Shtelen, V. I. Stogny, *Symmetry properties of one- and two-dimensional Fokker–Planck equations,* J. Phys. A : Math. Gen. **22:13** (1989), L539.
7. S. Spichak, V. Stogny, *Symmetry analysis of the Kramers equation,* Rep. Math. Phys. **40:1** (1997), 125–130.
8. С. В. Спічак, В. І. Стогній, І. М. Копась, *Симетрійний аналіз і точні розв'язки лінійного рівняння Колмогорова,* Наукові вісті НТУУ "КПІ" **4** (2011), 93–97.
9. С. С. Коваленко, І. М. Копась, В. І. Стогній, *Попередня групова класифікація одного класу узагальнених лінійних рівнянь Колмогорова,* Наукові вісті НТУУ "КПІ" **4** (2013), 67–72.
10. E. Barucci, S. Polidoro, V. Vespri, *Some results on partial differential equations and Asian options,* Math. Models Methods Appl. Sci. **11:03** (2001), 475–497.
11. R. Z. Zhdanov, V. I. Lahno, *Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source,* J. Phys. A : Math. Gen. **32:42** (1999), 7405.
12. В. І. Лагно, С. В. Спічак, В. І. Стогній, *Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу,* Київ, Ін-т математики НАН України (2002), 360 с.
13. P. Basarab-Horwath, V. Lahno, R. Zhdanov, *The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations,* Acta Applicandae Mathematica **69:1** (2001), 43–94.
14. V. Lahno, R. Zhdanov, *Group classification of nonlinear wave equations,* J. Math. Phys. **46:5** (2005), 053301.
15. R. Zhdanov, V. Lahno, *Group classification of the general second-order evolution equation: semi-simple invariance groups,* J. Phys. A : Math. Theor. **40:19** (2007), 5083.
16. Q. Huang, V. Lahno, C. Z. Qu, R. Zhdanov, *Preliminary group classification of a class of fourth-order evolution equations,* J. Math. Phys. **50:2** (2009), 023503.
17. D.-j. Huang, H.-q. Zhang, *Preliminary group classification of quasilinear third-order evolution equations,* Appl. Math. Mech. **30** (2009), 275–292.
18. Н. Х. Ибрагимов, *Группы преобразований в математической физике,* М.: Наука (1983).
19. Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений,* М.: Наука (1978).
20. G. W. Bluman, S. Kumei, *Symmetries and Differential Equations,* New York, Springer–Verlag (1989).
21. P. J. Olver,York, *Applications of Lie groups to differential equations,* Berlin, Springer (1986).
22. Г. М. Мубаракзянов, *О разрешимых алгебрах Ли,* Изв. высш. учебн. завед. Математика. **1** (1963), 114–123.

Надійшло 7.07.2014