ІСНУВАННЯ ТА РЕГУЛЯРНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ УЗАГАЛЬНЕНОЇ НОРМАЛЬНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ

©2005 р. Галина ЛОПУШАНСЬКА, Оксана ЧМИР

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів 79602

Редакція отримала статтю 27 вересня 2005 р.

За допомогою принципу Шаудера встановлено достатні умови розв'язності нормальних крайових задач для квазілінійних параболічних систем рівнянь з лінійними головними частинами, коли на межі області задаються функції з простору $(C^\infty)'$. Досліджено внутрішню регулярність розв'язків цих задач.

Розв'язність крайових задач для $2\vec{b}$-параболічних лінійних систем досліджувалась у працях [3]–[5], [12], [15]–[16]. У статті [2] наведено огляд результатів про розв'язність у просторах Соболєва квазілінійних (зокрема, з лінійними головними частинами) еліптичних та параболічних рівнянь.

Існування та зображення розв'язку узагальненої крайової задачі для лінійної параболічної системи отримано в [4, 6, 9]. У [9, с. 144] встановлено, що гладкий в області Q розв'язок лінійної однорідної параболічної системи, який набуває на параболічній межі ∂Q області Q узагальнених крайових значень із просторів типу D', належить до вагового $L_1(Q)$–простору з вагою $dist^k((x,t),\partial Q)$, де k — деяке додатне число, яке визначається порядками сингулярностей граничних і початкової функцій.

У даній статті встановлено умови розв'язності крайових задач для квазілінійних параболічних систем рівнянь з головними лінійними частинами, коли задані на параболічній межі функції є узагальненими із просторів типу D', а також умови внутрішньої регулярності розв'язків цих задач.

УДК 517.95; MSC 2000: 35K50

ПОЗНАЧЕННЯ ТА ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Позначимо: $n, p, b \in \mathbb{N}$, $m = bp$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $D_x^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $(j) = \begin{cases} 0, \ j = 0 \vee j = m+1, \\ 1, \ 1 \le j \le m, \end{cases}$ Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $S = \partial\Omega$ класу C^∞, $0 < T < +\infty$, $Q = \Omega \times (0, T]$, $\Sigma = S \times (0, T]$; S_ε — паралельна до S поверхня, розміщена всередині Ω на відстані $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ від S, де $\varepsilon_0 > 0$ таке, що S_ε належить класу C^∞ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $x_\varepsilon = x + \varepsilon\nu(x) \in S_\varepsilon$ при $x \in S$, де $\nu(x)$ — одиничний вектор внутрішньої нормалі до S в точці $x \in S$; $\varrho_1 : \overline{\Omega} \to [0, 1]$ — така нескінченно диференційовна функція, що $\varrho_1(x) > 0$, $x \in \Omega$, $\varrho_1(x) = O(d(x, S))$, $d(x, S) \to 0$, де $d(x, S)$ — відстань від точки x до поверхні S; $\varrho_2 : (0, T] \to (0, 1]$ — така нескінченно диференційовна функція, що $\varrho_2(t) = O(t)$, $t \to 0$; $\varrho(x, t) = \min\{\varrho_1(x); [\varrho_2(t)]^{\frac{1}{2b}}\}$, $(x, t) \in Q$; $r_0 = r_{m+1} = 2b$; $||x - y||$ — евклідова відстань між точками $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$d_b(x, t; y, \tau) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{||x - y||^2 + |t - \tau|^{\frac{1}{b}}}; \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \ \ t, \tau \ge 0.$$

Для вектора $f = \mathrm{col}(f_1, \ldots, f_p)$ та матриці $A = (a_{ij})_{i,j=1}^p$ позначатимемо

$$|f|_p = \sum_{j=1}^{p} |f_j|, \quad |A|_p = \sum_{i,j=1}^{p} |a_{ij}|.$$

Для функціонального простору X символом $[X]^p$ будемо позначати декартів добуток $\underbrace{X \times \ldots \times X}_{p}$. Якщо $\Gamma(x, t)$, $(x, t) \in \overline{Q}$, — вектор-функція чи матриця-функція, то запис $\Gamma(x, t) = O(\vartheta^\kappa(x, t))$, $\kappa \in \mathbb{R}$, $\vartheta(x, t) \to 0$, означає, що всі її компоненти мають при $\vartheta(x, t) \to 0$ порядок $O(\vartheta^\kappa(x, t))$.

Будемо використовувати такі функціональні простори:

$$D(\overline{Q}) = C^\infty(\overline{Q}), \quad D(\overline{\Sigma}) = C^\infty(\overline{\Sigma}), \quad D(\overline{\Omega}) = C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$D^0(\overline{Q}) = \left\{ \varphi \in D(\overline{Q}) : \ \frac{\partial^k}{\partial t^k} \varphi \mid_{t=T} = 0, k = 0, 1, \ldots \right\},$$

$$D^0(\overline{\Sigma}) = \left\{ \varphi \in D(\overline{\Sigma}) : \ \frac{\partial^k}{\partial t^k} \varphi \mid_{t=T} = 0, \ k = 0, 1, \ldots \right\},$$

$$D_0(\overline{\Omega}) = \left\{ \varphi \in D(\overline{\Omega}) : \forall \, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \ \ D^\alpha \varphi \mid_S = 0 \right\},$$

$$W_{1,loc}^l(Q) = \left\{ \mathrm{v} \in L_{1,loc}(Q) : \frac{\partial^{\alpha_0}}{\partial t^{\alpha_0}} D_x^\alpha \mathrm{v} \in L_{1,loc}(Q), \ |\alpha| + 2b\alpha_0 \le l \right\}, \ l \in \mathbb{N},$$

$$[\mathcal{M}_k^l(Q)]^p = \Big\{ \mathrm{v} \in [W_{1,loc}^l(Q)]^p : ||\mathrm{v}||_{k,\,l} =$$

$$= \sum_{|\gamma| \le l} \int_Q \varrho^{k+|\gamma|}(x,t) |D_x^\gamma \mathrm{v}(x,t)|_p \, dxdt < +\infty \Big\}, \quad k \in \mathbb{R},$$

$[\mathcal{M}_{k,C}^l(Q)]^p$ — замкнена куля в просторі $[\mathcal{M}_k^l(Q)]^p$ радіуса $C > 0$ з центром в нулі, $(D^0(\overline{\Sigma}))'$, $(D_0(\overline{\Omega}))'$ — простори лінійних неперервних функціоналів відповідно на просторах функцій $D^0(\overline{\Sigma})$, $D_0(\overline{\Omega})$.

Значення узагальненої вектор-функції $F \in [(D^0(\overline{\Sigma}))']^p$ на основній вектор-функції $\varphi \in [D^0(\overline{\Sigma})]^p$ позначимо через $(\varphi, F)_1$, а значення узагальненої вектор-функції $F \in [(D_0(\overline{\Omega}))']^p$ на основній вектор-функції $\varphi \in [D_0(\overline{\Omega})]^p$ — через $(\varphi, F)_2$. Символом $s(F)$ позначимо максимальний серед порядків сингулярностей компонент узагальненої вектор-функції F [14, с. 123].

Нехай $M(l)$ — кількість мультиіндексів $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ таких, що $|\alpha| \le l$, $l \in \mathbb{N}$, $l \le 2b-1$. Позначимо: $\partial_l u = (u, u_{x_1}, \ldots, D^\alpha u, \ldots)$, де $|\alpha| \le l$, — матриця розмірності $p \times M(l)$, елементами якої є компоненти вектор-функції u та їхніх похідних за просторовими змінними до порядку l; $\mathbb{M}_{p\times M(l)}$ — простір матриць розміру $p \times M(l)$.

Будемо розглядати такі диференціальні вирази:

$$A(x,t,D_x) = \sum_{|\alpha| \le 2b} a_{\,\alpha}(x,t) D_x^\alpha,$$

$$B_j(x,t,D_x) = \sum_{|\alpha| \le r_j} b_{j,\alpha}(x,t) D_x^\alpha, \quad j = \overline{1,m}, \tag{1}$$

де $a_\alpha(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q}$, $|\alpha| \le 2b$, — квадратні матриці порядку p з нескінченно диференційовними на $\overline{Q}$ елементами, $b_{j,\alpha}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{\Sigma}$, $j = \overline{1,m}$, $|\alpha| \le r_j$, — матриці-рядки довжини p з елементами з $D(\overline{\Sigma})$; $0 \le r_m \le \ldots \le r_1 \le 2b-1$, $j = \overline{1,m}$.

Припускатимемо, що система диференціальних виразів (1) є нормальною на Σ [5, с. 178] і справджує умову Лопатинського [5, с. 15].

Розглянемо нормальну крайову задачу для квазілінійної параболічної системи рівнянь [4], [5, с. 12], [15, с. 64]

$$\begin{aligned} & L\left(x,t,D_x,\frac{\partial}{\partial t}\right) u(x,t) \equiv \\ & \equiv \left(I\frac{\partial}{\partial t} - A(x,t,D_x)\right) u(x,t) = F_0(x,t,\partial_l u(x,t)), \quad (x,t) \in Q, \end{aligned} \tag{2}$$

$$B_j(x,t,D_x)u(x,t)\mid_{\Sigma} = F_j(x,t), \quad j=\overline{1,m}, \quad (x,t)\in\Sigma, \tag{3}$$

$$u|_{t=0} = F_{m+1}(x), \quad x\in\Omega, \tag{4}$$

де I — одинична матриця порядку p, u — шукана вектор-функція довжини p; $F_0(x,t,z)$, $z=(z_{(0,\dots,0)}, z_{(1,0,\dots,0)},\dots,z_\alpha,\dots)$, визначена в $Q\times\mathbb{M}_{p\times M(l)}$ вектор-функція зі значеннями в $\mathbb{R}^p$, $F_j\in(D^0(\overline{\Sigma}))'$, $j=\overline{1,m}$, $F_{m+1}\in[(D_0(\overline{\Omega}))']^p$, причому $0\le s(F_j)\le q_j$, $j=\overline{1,m}$, $0\le s(F_{m+1})\le q_{m+1}$.

Згідно з [4], [5, с. 178], існують такі крайові диференціальні вирази $\widehat{B_j}$, C_j, $\widehat{C_j}$ вигляду (1) порядків $\widehat{r_j}$, m_j, $\widehat{m_j}$, $j=\overline{1,m}$, відповідно, $r_j+\widehat{m_j}=m_j+\widehat{r_j}=2b-1$, що для всіх $u,v\in[D(\overline{Q})]^p$ виконується формула Гріна

$$\int_Q [v^\top(Lu)-(L^*v)^\top u]\,dxdt = \sum_{j=1}^m \int_\Sigma [(\widehat{B_j}v)(C_ju)-(\widehat{C_j}v)(B_ju)]\,dSdt+$$

$$+\int_\Omega v^\top(x,t)u(x,t)|_{t=0}^{t=T}\,dx,$$

де $L^*=-(I\frac{\partial}{\partial t}+A^*)$, A^* — диференціальний вираз, формально спряжений до виразу A, символ «$\top$» означає транспонування.

Введемо функціональні простори:

$$[X(\overline{Q})]^p = \left\{\psi\in[D^0(\overline{Q})]^p : \psi(\cdot,0)\in[D_0(\overline{\Omega})]^p,\ \widehat{B_j}\psi\mid_{\overline{\Sigma}}=0,\ 1\le j\le m\right\},$$

$$[X_k(\overline{Q})]^p = \left\{\psi\in[X(\overline{Q})]^p : L^*\psi(x,t)=O(\varrho^k(x,t)),\ \varrho(x,t)\to 0\right\}.$$

У [9, с. 136–137] доведено, що $[X_k(\overline{Q})]^p\neq\emptyset$, $k\ge 0$. Нехай для деякого $k\ge 0$ вектор-функція F_0 для довільних $\mathrm{v}\in[\mathcal{M}_k^l(Q)]^p$ задовольняє умову

$$\int_Q |F_0(y,\tau,\partial_l\mathrm{v}(y,\tau))|_p\,dyd\tau < +\infty. \tag{5}$$

Означення 1. *Розв'язком задачі* (2)–(4) *називається така вектор-функція* $u\in[\mathcal{M}_k^l(Q)]^p$, *що для довільної* $\psi\in[X_k(\overline{Q})]^p$ *виконується рівність*

$$\begin{aligned}\int_Q (L^*\psi)^\top u\,dxdt &= \int_Q \psi^\top(x,t)F_0(x,t,\partial_l u(x,t))\,dxdt+\\ &+\sum_{j=1}^m(\widehat{C_j}\psi,F_j)_1+(\psi(\cdot,0),F_{m+1}(\cdot))_2.\end{aligned} \tag{6}$$

У [5, с. 16, с. 31, с. 120], [4, 6, 7, 16], [9, с. 138], доведено існування та досліджено властивості матриці Гріна $G = (G_0, G_1, \dots, G_m)$ задачі (2)–(4), де $G_0(x,t;y,\tau)$ — квадратна матриця порядку p, визначена в точках $(x,t;y,\tau) \in \overline{Q} \times \overline{Q}$ при $(x,t) \neq (y,\tau)$, вектор-функції $G_j(x,t;y,\tau)$, $j = \overline{1,m}$, довжини p визначені в точках $(x,t;y,\tau) \in \overline{Q} \times \Sigma$ при $(x,t) \neq (y,\tau)$ та $G_j(x,t;y,\tau) = [\widehat{C_j}(y,\tau,D_y)G_0(x,t;y,\tau)]^\top$, $j = \overline{1,m}$.

Нехай $G_0 = (G_0^{is})$, $i,s = \overline{1,p}$; $G_j = (G_j^1, \dots, G_j^p)^\top$, $j = \overline{1,m}$,

$$g_j(x,t) = (G_j(x,t;*,\cdot), F_j(*,\cdot))_1, \quad (x,t) \in Q, \quad j = \overline{1,m},$$

$$g_{m+1}(x,t) = (G_0(x,t;*,0), F_{m+1}(*))_2, \quad (x,t) \in Q,$$

$$h(x,t) = \sum_{j=1}^{m+1} g_j(x,t), \quad (x,t) \in Q.$$

Нехай

$$k_0 \overset{\text{def}}{=} \max_{1 \le j \le m+1} \{q_j + 2b - r_j - (j)\} + n - 1. \tag{7}$$

Зауважимо, що $k_0 \ge n-1$, якщо $q_j \ge 0$, $j = \overline{1,m+1}$.

Використовуючи властивості узагальнених функцій скінченного порядку сингулярності [14, с. 123–134] та оцінки похідних матриці Гріна [5, с. 16, с. 120], як і в [8], одержуємо таку лему.

Лема 1. *Нехай $F_1, \dots, F_m \in (D^0(\overline{\Sigma}))'$, $F_{m+1} \in [(D_0(\overline{\Omega}))']^p$, причому $0 \le s(F_j) \le q_j$, $j = \overline{1,m+1}$. Тоді: 1) для довільних α_0, α, $j = \overline{1,m+1}$,*

$$\frac{\partial^{\alpha_0}}{\partial t^{\alpha_0}} D^\alpha g_j(x,t) = O([\varrho(x,t)]^{-(n+q_j+2b-r_j-(j)+|\alpha|+2b\alpha_0)}), \quad \varrho(x,t) \to 0,$$

2) $h \in [\mathcal{M}_k^l(Q)]^p$ для будь-якого $k > k_0$.

Введемо оператор H за допомогою рівності

$$(H\mathrm{v})(x,t) = \int_0^t d\tau \int_\Omega G_0(x,t;y,\tau) F_0(y,\tau,\partial_l \mathrm{v}(y,\tau))\, dy.$$

Лема 2. *Якщо вектор-функція F_0 задовольняє умову* (5)*, то оператор H відображає простір $[\mathcal{M}_k^l(Q)]^p$ в себе.*

Доведення. Якщо $\mathrm{v} \in [\mathcal{M}_k^l(Q)]^p$, то

$$||H\mathrm{v}||_{k,\,l} \le \sum_{|\gamma| \le l} \int_Q \varrho^{k+|\gamma|}(x,t) \Big(\int_0^t d\tau \int_\Omega |D_x^\gamma G_0(x,t;y,\tau)|_p \times$$

$$\times|F_0(y,\tau,\partial_l \mathrm{v}(y,\tau))|_p\,dy\Big)\,dxdt.$$

Розглянемо для довільних γ, $|\gamma|\le l$, вираз

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\Big(\int\limits_\tau^T dt\int\limits_\Omega \varrho^{k+|\gamma|}(x,t)|D_x^\gamma G_0(x,t;y,\tau)|_p\,dx\Big)|F_0(y,\tau,\partial_l \mathrm{v}(y,\tau))|_p\,dyd\tau. \quad (8)$$

З умови (5) та властивостей матриці Гріна [7] отримуємо скінченність виразу (8), а тоді за теоремою Фубіні — скінченність $||H\mathrm{v}||_{k,\,l}$.

Розглянемо у просторі $[\mathcal{M}_k^l(Q)]^p$, $k>k_0$, систему інтегро-диференціальних рівнянь

$$\mathrm{v}=H\mathrm{v}+h. \quad (9)$$

Теорема 1. *Нехай $F_1,\dots,F_m\in(D^0(\overline{\Sigma}))'$, $F_{m+1}\in[(D_0(\overline{\Omega}))']^p$, причому $0\le s(F_j)\le q_j$, $j=\overline{1,m+1}$. Якщо вектор-функція F_0 справджує умову (5), то для будь-якого $k>k_0$ кожний розв'язок в $[\mathcal{M}_k^l(Q)]^p$ системи інтегро-диференціальних рівнянь (9) є розв'язком задачі (2)–(4).*

Доведення проводиться подібно до [9, с. 28], [13], при цьому використовується лема 1, спеціальні властивості матриці Гріна [6], [9, с. 168] та теорема Фубіні [1, с. 24].

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ

Лема 3. *Якщо $k>k_0$, то для довільного $\varepsilon>0$ існує $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ таке, що для довільної підобласті $V\subset Q$, міра якої менша за δ, і будь-якої точки $(y,\tau)\in\overline{Q}$ виконується нерівність*

$$\int_V \varrho^{k+|\gamma|}(x,t)|D_x^\gamma G_0(x,t;y,\tau)|_p\,dxdt<\varepsilon,\quad |\gamma|\le l. \quad (10)$$

Доведення випливає із властивостей матриці G_0.

Лема 4. *Нехай $k>k_0$, а вектор-функція F_0 при деякому $C>0$ справджує умови:* 1) *існує стала $\widehat{L}_1>0$ така, що*

$$\forall\,\mathrm{v}\in[\mathcal{M}_{k,C}^l(Q)]^p\quad \int_Q |F_0(y,\tau,\partial_l \mathrm{v}(y,\tau))|_p\,dyd\tau\le\widehat{L}_1, \quad (11)$$

2) *існує неперервна, монотонно неспадна, додатна на $(0,+\infty)$ функція $\psi_C(z)$, така, що $\psi_C(0)=0$ і для всіх $\mathrm{v},\mathrm{w}\in[\mathcal{M}_{k,C}^l(Q)]^p$*

$$\int_Q |F_0(y,\tau,\partial_l \mathrm{v}(y,\tau))-F_0(y,\tau,\partial_l \mathrm{w}(y,\tau))|_p\,dyd\tau\le\psi_C(||\mathrm{v}-\mathrm{w}||_{k,\,l}). \quad (12)$$

Тоді оператор H є цілком неперервним на $[\mathcal{M}^l_{k,C}(Q)]^p$.

Доведення. Для вектор-функцій $\mathrm{v}, \mathrm{w} \in [\mathcal{M}^l_{k,C}(Q)]^p$ маємо

$$||H\mathrm{v} - H\mathrm{w}||_{k,\,l} \leq \sum_{|\gamma|\leq l} \int_Q \varrho^{k+|\gamma|}(x,t)\Big(\int_0^t d\tau \int_\Omega |D^\gamma_x G_0(x,t;y,\tau)|_p \times$$

$$\times |F_0(y,\tau,\partial_l \mathrm{v}(y,\tau)) - F_0(y,\tau,\partial_l \mathrm{w}(y,\tau))|_p\, dy\Big)\, dxdt. \qquad (13)$$

Як при доведенні леми 2, з оцінок (12), (13) одержуємо

$$||H\mathrm{v} - H\mathrm{w}||_{k,\,l} \leq C_1 \cdot \psi_C(||\mathrm{v} - \mathrm{w}||_{k,\,l}), \quad C_1 = \mathrm{const} > 0.$$

Із властивостей функції ψ_C випливає, що H — неперервний оператор на $[\mathcal{M}^l_{k,C}(Q)]^p$.

Встановимо компактність оператора H на $[\mathcal{M}^l_{k,C}(Q)]^p$. За теоремою Ріса [10, с. 242] для компактності H на $[\mathcal{M}^l_{k,C}(Q)]^p$ досить, щоб виконувались такі умови: a) існує стала $C_2 > 0$ така, що $||H\mathrm{v}||_{k,\,l} \leq C_2$ для всіх $\mathrm{v} \in [\mathcal{M}^l_{k,C}(Q)]^p$; b) для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta' = \delta'(\varepsilon) > 0$ таке, що для довільних $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathrm{v} \in [\mathcal{M}^l_{k,C}(Q)]^p$, як тільки $||z|| < \delta'$, $|z_0| < \delta'$, то

$$\sum_{|\gamma|\leq l} \int_Q |\varrho^{k+|\gamma|}(x+z,t+z_0) D^\gamma_x (H\mathrm{v})(x+z,t+z_0) -$$
$$- \varrho^{k+|\gamma|}(x,t) D^\gamma_x (H\mathrm{v})(x,t)|_p\, dxdt < \varepsilon. \qquad (14)$$

Виконання умови a) гарантує припущення (11). Доведення умови b) випливає з леми 3 та властивостей матриці Гріна.

Введемо позначення: $H_1\mathrm{v} \stackrel{\mathrm{def}}{=} H\mathrm{v} + h$.

Теорема 2. *Нехай* $F_1, \ldots, F_m \in (D^0(\overline{\Sigma}))'$, $F_{m+1} \in [(D_0(\overline{\Omega}))']^p$, *причому* $0 \leq s(F_j) \leq q_j$, $j = \overline{1, m+1}$, *і нехай* $k > k_0$ *(число* k_0 *визначене формулою* (7)*). Якщо існує стала* $K_0 > 0$ *така, що для всіх* $C > K_0$, *для всіх* $\mathrm{v}, \mathrm{w} \in [\mathcal{M}^l_{k,C}(Q)]^p$ *вектор-функція* $F_0(x,t,z)$ *задовольняє умови*

$$\int_Q |F_0(y,\tau,\partial_l \mathrm{v}(y,\tau))|_p\, dyd\tau \leq \varphi(C), \qquad (15)$$

$$\int_Q |F_0(y,\tau,\partial_l \mathrm{v}(y,\tau)) - F_0(y,\tau,\partial_l \mathrm{w}(y,\tau))|_p\, dyd\tau \leq \psi_C(||\mathrm{v} - \mathrm{w}||_{k,\,l}), \quad (16)$$

де $\varphi(z)$, $\psi_C(z)$ *— неперервні, монотонно неспадні, додатні на* $(0,+\infty)$ *функції,* $\frac{\varphi(z)}{z} \to 0$ *при* $z \to +\infty$, $\psi_C(0) = 0$, *то в просторі* $[\mathcal{M}_k^l(Q)]^p$ *існує розв'язок задачі* (2)–(4).

Зауваження. *Якщо функція* $\varphi(z)$ *є такою, як в теоремі 2, то для довільних додатних сталих* K_1, K_2 *існує така стала* $K > 0$, *що*

$$\forall\, C > K \quad K_1 + K_2\varphi(C) < C. \tag{17}$$

Для функції $\varphi(z) = \widehat{L}_2 z^\mu$, $\widehat{L}_2 > 0$, $\mu \in (0,1)$, *умова* (17) *виконується.*

Доведення теореми 2. Використаємо теорему Шаудера [10, с. 291]. Встановимо, що існує стала $C > 0$ така, що: 1) H_1 відображає $[\mathcal{M}_{k,C}^l(Q)]^p$ в себе; 2) H_1 є цілком неперервним оператором на $[\mathcal{M}_{k,C}^l(Q)]^p$.

Оскільки $\varrho^{k+|\gamma|}D_x^\gamma h^i \in L_1(Q)$ для довільних $h \in [\mathcal{M}_k^l(Q)]^p$, $|\gamma| \le l$, $i = \overline{1,p}$, то за теоремою про неперервність в цілому функції з $L_1(Q)$ [11, с. 21] одержуємо, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta'' = \delta''(\varepsilon) > 0$ таке, що для довільних $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta''$, $|z_0| < \delta''$, виконується нерівність

$$\sum_{|\gamma|\le l}\int_Q |\varrho^{k+|\gamma|}(x+z,t+z_0)D_x^\gamma h(x+z,t+z_0) - \varrho^{k+|\gamma|}(x,t)D_x^\gamma h(x,t)|_p\, dxdt < \varepsilon.$$

З отриманої нерівності та з леми 4 (умова (11) випливає з (15)) одержуємо виконання умови 2) для оператора H_1.

Доведемо виконання умови 1). Як і при доведенні леми 2, використовуючи лему 1, матимемо, що для довільних $\mathrm{v} \in [\mathcal{M}_{k,C}^l(Q)]^p$

$$||H_1\mathrm{v}||_{k,\,l} \le C_3\varphi(||\mathrm{v}||_{k,\,l}) + C_1' \le C_3\varphi(C) + C_1', \quad C_3 = \mathrm{const} > 0.$$

Із зауваження, наведеного після формулювання теореми 2, випливає існування такої сталої $K_0 > 0$, що для всіх $C > K_0$ та довільних $\mathrm{v} \in [\mathcal{M}_{k,C}^l(Q)]^p$ виконується нерівність $C_3\varphi(C) + C_1' < C$, а отже, $||H_1\mathrm{v}||_{k,\,l} \le C$ для довільних $\mathrm{v} \in [\mathcal{M}_{k,C}^l(Q)]^p$.

Функції F_0, для яких виконуються нерівності

$$\begin{gathered} |F_0(x,t,z)|_p \le \sum_{s=0}^{l} A_s \sum_{|\gamma|=s} |z_\gamma|_p^{\eta_s} + A, \\ (x,t) \in Q, \quad z \in \mathbb{M}_{p\times M(l)}, \end{gathered} \tag{18}$$

$$\begin{gathered} |F_0(x,t,z^1) - F_0(x,t,z^2)|_p \le B \sum_{s=0}^{l} \sum_{|\gamma|=s} |z_\gamma^1 - z_\gamma^2|_p^{\eta_s}, \\ (x,t) \in Q, \quad z^1, z^2 \in \mathbb{M}_{p\times M(l)}, \end{gathered} \tag{19}$$

де $\eta_s \in (0,1)$, $s=\overline{0,l}$, A_s, A, B, $s=\overline{0,l}$, — невід'ємні сталі, дають приклад функцій F_0, для яких виконуються умови (5) та умови теореми 2.

З теореми 2 випливає таке твердження.

Наслідок. *Нехай* $F_1,\dots,F_m \in (D^0(\overline{\Sigma}))'$, $F_{m+1} \in [(D_0(\overline{\Omega}))']^p$, *причому* $0 \le s(F_j) \le q_j$, $j=\overline{1,m+1}$. *Якщо* $k>k_0$, *а вектор-функція* F_0 *справджує умови* (18)–(19) *при* $\eta_s \in \left(0, \frac{1}{k+s+1}\right)$, $s=\overline{0,l}$, *то в просторі* $[\mathcal{M}_k^l(Q)]^p$ *існує розв'язок задачі* (2)–(4).

Зауважимо, що з теореми 2 випливають умови розв'язності узагальненої крайової задачі для параболічного рівняння, отримані раніше в роботі [8].

ВНУТРІШНЯ ГЛАДКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ

З'ясуємо внутрішню гладкість узагальненого розв'язку задачі (2)–(4).

Теорема 3. *Нехай* $F_1,\dots,F_m \in (D^0(\overline{\Sigma}))'$, $F_{m+1} \in [(D_0(\overline{\Omega}))']^p$, *причому* $0 \le s(F_j) \le q_j$, $j=\overline{1,m+1}$, *а вектор-функція* $F_0(x,t,z)$ *неперервна в* $Q \times \mathbb{M}_{p\times M(l)}$. *Якщо задача* (2)–(4) *має розв'язок* u *з простору* $[\mathcal{M}_k^l(Q)]^p$ *і для довільної строго внутрішньої підобласті* $\widetilde{Q}$ *області* Q, *довільних* α, α_0, $|\alpha|+2b\alpha_0 \le l$, *довільних* $\mathrm{v} \in [W^l_{1,\,loc}(Q)]^p$ *таких, що* $D_x^\gamma \mathrm{v} \in [C(\widetilde{Q})]^p$, $|\gamma| < |\alpha|+2b\alpha_0$, *в кожній точці* $(x,t) \in \widetilde{Q}$ *виконується нерівність*

$$\int_{\widetilde{Q}} (d_b(x,t;y,\tau))^{-n-|\alpha|-2b\alpha_0} |F_0(y,\tau,\partial_l \mathrm{v}(y,\tau))|_p \, dyd\tau < +\infty, \tag{20}$$

то цей розв'язок u *належить до простору* $[C^{l,0}(Q)]^p$. *Якщо, крім того,* $l \le 2b-2$, *а вектор-функція* $F_0(x,t,z)$ *неперервно-диференційовна в* $Q \times \mathbb{M}_{p\times M(l)}$, *то цей розв'язок належить до простору* $[C^{2b,1}(Q)]^p$.

Доведення. Нехай S_{ε_1} — поверхня, паралельна до S, розміщена всередині Ω на відстані ε_1 від S, Ω_{ε_1} — область, обмежена поверхнею S_{ε_1}, $Q_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} = \Omega_{\varepsilon_1} \times (\varepsilon_2, T]$, де $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Якщо $(x,t) \in Q_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$, то з (9) одержуємо

$$u^i(x,t) = \sum_{s=1}^{p} \Big(\int_{Q_{\frac{\varepsilon_1}{2},\frac{\varepsilon_2}{2}}} G_0^{is}(x,t;y,\tau) F_0^s(y,\tau,\partial_l u(y,\tau)) \, dyd\tau +$$

$$+ \int_{Q \setminus \overline{Q}_{\frac{\varepsilon_1}{2},\frac{\varepsilon_2}{2}}} G_0^{is}(x,t;y,\tau) F_0^s(y,\tau,\partial_l u(y,\tau)) \, dyd\tau \Big) + h^i(x,t), \quad i=\overline{1,p}.$$

Із властивостей матриці G_0 та узагальнених функцій випливає, що $h^i \in C^\infty(Q)$, $i=\overline{1,p}$. Матриця $G_0(x,t;y,\tau)$ є нескінченно диференційовною та обмеженою при $(x,t)\in\overline{Q_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}}$, $(y,\tau)\in\overline{Q\setminus Q_{\frac{\varepsilon_1}{2},\frac{\varepsilon_2}{2}}}$, тому з умови (11) випливає, що для довільного мультиіндекса (α,α_0) інтеграл

$$\int_{Q\setminus\overline{Q}_{\frac{\varepsilon_1}{2}\frac{\varepsilon_2}{2}}}\frac{\partial^{\alpha_0}}{\partial t^{\alpha_0}}D_x^\alpha G_0(x,t;y,\tau)F_0(y,\tau,\partial_l u(y,\tau))\,dyd\tau$$

рівномірно збігається в $\overline{Q}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$, тобто функції

$$w^i_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}=\sum_{s=1}^p\int_{Q\setminus\overline{Q}_{\frac{\varepsilon_1}{2},\frac{\varepsilon_2}{2}}}G_0^{is}(\cdot,\cdot;y,\tau)F_0^s(y,\tau,\partial_l u(y,\tau))\,dyd\tau,\quad i=\overline{1,p},$$

належать до простору $C^\infty(Q_{\varepsilon_1,\varepsilon_2})$. Отже, для довільних $(x,t)\in Q_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$

$$u^i(x,t)=h_1^i(x,t,\partial_l u(x,t))+h_2^i(x,t,\partial_l u(x,t)),\quad i=\overline{1,p},\tag{21}$$

де $h_2=(h_2^1,\dots,h_2^p)\in[C^\infty(Q_{\varepsilon_1,\varepsilon_2})]^p$, $h_1=(h_1^1,\dots,h_1^p)$,

$$h_1^i(x,t,\partial_l u(x,t))=\sum_{s=1}^p\int_{Q_{\frac{\varepsilon_1}{2},\frac{\varepsilon_2}{2}}}G_0^{is}(x,t;y,\tau)F_0^s(y,\tau,\partial_l u(y,\tau))\,dyd\tau,\ i=\overline{1,p},$$

$$h_2^i(x,t,\partial_l u(x,t))=w^i_{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}(x,t,\partial_l u(x,t))+h^i(x,t),\quad i=\overline{1,p}.$$

Із властивостей об'ємного потенціалу та умови (20) одержуємо, що $|h_1(x,t,\partial_l u(x,t))|_p<+\infty$ для довільних $(x,t)\in Q_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$, $u\in[W_1^l(Q_{\frac{\varepsilon_1}{2},\frac{\varepsilon_2}{2}})]^p$. Тоді з (21) випливає, що $u\in[C(Q_{\varepsilon_1,\varepsilon_2})]^p$.

Диференціюючи рівності (21), одержуємо, що

$$\frac{\partial u^i(x,t)}{\partial x_j}=\frac{\partial h_1^i(x,t,\partial_l u(x,t))}{\partial x_j}+\frac{\partial h_2^i(x,t,\partial_l u(x,t))}{\partial x_j},\ i=\overline{1,p},j=\overline{1,n}.\tag{22}$$

З оцінок матриці Гріна [5, с. 16, с. 120] випливає, що при виконанні умови (20) похідні $\frac{\partial h_1(x,t,\partial_l u(x,t))}{\partial x_j}$, $j=\overline{1,n}$, є неперервними вектор-функціями в $Q_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$. Оскільки $\frac{\partial h_2}{\partial x_j}\in[C(Q_{\varepsilon_1,\varepsilon_2})]^p$, $j=\overline{1,n}$, то з рівностей (22) одержуємо, що $\frac{\partial u}{\partial x_j}\in[C(Q_{\varepsilon_1,\varepsilon_2})]^p$, $j=\overline{1,n}$.

Використовуючи умову (20) і те, що $h_2\in[C^\infty(Q_{\varepsilon_1,\varepsilon_2})]^p$, аналогічними міркуваннями дістаємо неперервність в $Q_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ похідних вектор-функції u за просторовими змінними до порядку γ, $|\gamma|\le l$.

Оскільки $u \in [C^{l,0}(Q_{\varepsilon_1\,\varepsilon_2})]^p$, то вектор-функція $F_0(x,t,\partial_l u(x,t))$ є неперервно диференційовною в $\overline{Q}_{\frac{\varepsilon_1}{2}\,\frac{\varepsilon_2}{2}}$, обмеженою разом з похідними першого порядку. Тоді, згідно з [5, с. 162], маємо, що $h_2(x,t,\partial_l u(x,t)) \in [C^{2b,1}(Q_{\varepsilon_1,\varepsilon_2})]^p$. Із формул (21) тепер одержуємо, що $u \in [C^{2b,1}(Q_{\varepsilon_1,\varepsilon_2})]^p$.

Оскільки для довільної строго внутрішньої підобласті $\widetilde{Q}$ області Q існують додатні числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ такі, що $\widetilde{Q} \subset Q_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$, то $u \in [C^{2b,1}(\widetilde{Q})]^p$ для довільної підобласті $\widetilde{Q} \subset Q$, тобто $u \in [C^{2b,1}(Q)]^p$.

ВИСНОВКИ

У статті розглянуто крайові задачі для квазілінійних параболічних систем рівнянь з головними лінійними частинами, коли задані на параболічній межі функції є узагальненими з просторів типу D'. Використовуючи властивості матриць Гріна цих задач та принцип Шаудера, встановлено достатні умови розв'язності, а також умови внутрішньої регулярності розв'язків цих задач. Наведено умови на нелінійність рівняння, які є достатніми для виконання умов існування розв'язку задачі.

[1] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

[2] *Дубинский Ю.А.* Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка // Успехи мат. наук, 1968. – **23**, № 1 (39). – С. 45–90.

[3] *Івасишен С.Д.* Інтегральне зображення розв'язків загальних параболічних крайових задач і коректна розв'язність у просторах зростаючих функцій // Доп. АН УРСР. – Сер. А. – 1973, № 7. – С. 596–599.

[4] *Ивасишен С.Д.* Сопряженные операторы Грина. Обобщенные решения параболических граничных задач с нормальными граничными условиями // ДАН СССР. – 1971. – **197**, № 2. – С. 261–264.

[5] *Ивасишен С.Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач. – К.: Вища школа, 1990. – 200 с.

[6] *Лопушанская Г.П.* О решении с помощью матрицы Грина параболической граничной задачи в пространстве обобщенных функций // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 6. – С. 795–798.

[7] *Лопушанська Г.П., Чмир О.Ю.* Про деякі властивості спряжених операторів Гріна параболічної крайової задачі // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. – Математика. – Вип. 191–192, 2004. – С. 82–88.

[8] *Лопушанська Г.П., Чмир О.Ю.* Узагальнені крайові значення розв'язків рівняння $u_t = \triangle u + F_0(x,t,u)$ // Математичні Студії. – 2004. – **22**, № 1. – С. 45–56.

[9] *Лопушанська Г.П.* Крайові задачі у просторі узагальнених функцій D'. – Львів: Вид.-во Львів. нац. ун-ту, 2002. – 285 с.

[10] *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.

[11] *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 336 с.

[12] *Солонников В.А.* О матрицах Грина для параболических краевых задач // Зап. научн. семинаров ЛОМИ АН СССР. — 1969. – **14**. – С. 256–287.

[13] *Чмир О.Ю.* Про формулювання узагальненої крайової задачі для півлінійного параболічного рівняння // Вісн. Львів. нац. ун-ту Сер. мех.–матем. – 2003, вип. 62. – С. 134–143.

[14] *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.

[15] *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.

[16] *Эйдельман С.Д., Ивасишен С.Д.* Исследование матрицы Грина однородной параболической граничной задачи // Труды Москов. матем. об-ва, 1970. – **23**. – С. 179–234.

THE EXISTENCE AND REGULARITY OF THE SOLUTIONS GENERALIZED NORMAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE QUASILINEAR PARABOLIC SYSTEMS

Halyna LOPUSHANSKA, Oksana CHMYR

Ivan Franko Lviv National University,
1 Universytetska Str., Lviv 79602, Ukraine

The sufficient conditions of the solvability of the normal boundary value problems for the quasilinear parabolic systems with the linear main parts and generalized functions from the space $(C^\infty)'$ on the boundary of domain, using the Shauder method, are obtained. The inner regularity of the solutions of the problems have been investigated.