ПРО ГІПЕРПРОСТІР ПРОСТОРОВИХ КРИВИХ СТАЛОЇ ШИРИНИ

[1]*Лідія БАЗИЛЕВИЧ,* [2]*Михайло ЗАРІЧНИЙ*

[1]Національний університет „Львівська політехніка"
вул. Степана Бандери 12, Львів 79013
[2]Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська 1, Львів 79602

Редакція отримала статтю 9 лютого 2004 р.

Доведено, що гіперпростір кривих сталої ширини в $\mathbb{R}^3$, які проектуються на коло в $\mathbb{R}^2$, гомеоморфний добуткові гільбертового куба на пряму.

1. ВСТУП

Замкнену криву K в просторі $\mathbb{R}^3$ називають *кривою сталої ширини* w, якщо для кожної точки $x \in K$ існує точка $y \in K$, для якої $d(x, y) = \max\{d(x, z) \mid z \in K\} = w$ (тут і далі через d позначено евклідову метрику в $\mathbb{R}^3$). Це означення є природним аналогом для кривих поняття опуклого тіла сталої ширини; нагадаємо, що таким називається опуклий компакт з властивістю: для кожного напрямку відстань між двома опорними до тіла площинами, ортогональними до цього напрямку, стала.

Кожну плоску криву сталої ширини можна розглядати також і як просторову криву сталої ширини. Існують просторові криві сталої ширини, що не лежать в одній площині; один з найпростіших способів побудови таких кривих полягає в тому, що на опуклому тілі сталої ширини розглядаються дві точки дотику паралельних опорних площин (будемо говорити, що такі точки діаметрально протилежні), які потім з'єднуються на поверхні опуклого тіла дугою з властивістю, що об'єднання цієї дуги з дугою, складеною з її діаметрально протилежних точок, буде простою замкненою кривою.

1991 Mathematics Subject Classification. 54B20, 52A20, 46A55

Просторові криві сталої ширини розглядалися в різних працях (див., наприклад, [5], [6]).

В [1] доведено, що гіперпростір опуклих тіл сталої ширини в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, є стягуваним многовидом, модельованим над гільбертовим кубом. Інше доведення цього результату див. в [4].

Очевидно, що гіперпростір кривих сталої ширини в $\mathbb{R}^2$ і гіперпростір опуклих тіл сталої ширини в $\mathbb{R}^2$ є гомеоморфними. Про жоден такий гомеоморфізм не може бути мови, якщо розглядати гіперпростори кривих сталої ширини і опуклих тіл сталої ширини в $\mathbb{R}^3$. У цій праці ми описуємо топологію гіперпростору просторових замкнених кривих сталої ширини, що мають порівняно просту проекцію на площину.

2. ТЕРМІНОЛОГІЯ І ПОЗНАЧЕННЯ

Для метричного простору (X, ρ) через $\exp(X)$ позначаємо гіперпростір простору X, тобто множину непорожніх компактних підмножин в X, наділену *метрикою Гаусдорфа* ρ_{H}:

$$\rho_{\mathrm{H}}(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subset O_\varepsilon(B),\ B \subset O_\varepsilon(A)\}.$$

Відображення $f\colon Y \to \exp X$ називають *напівнеперервним згори*, якщо для кожної відкритої в X множини U множина $U^\sharp = \{y \in Y \mid f(A) \subset U\}$ є відкритою в X.

Якщо X — підмножина деякого локально опуклого простору, то ми можемо розглянути підпростір $\mathrm{cc}(X) = \{A \in \exp(X) \mid A$ – опукла множина$\}$ (гіперпростір компактних опуклих підмножин).

Нехай $I = [-1, 1]$ — одиничний відрізок, $Q = I^\omega$ — гільбертів куб. Сепарабельний метричний простір називаємо *Q-многовидом*, якщо він має базу з множин, гомеоморфних гільбертовому кубові Q.

Для підмножини A в локально опуклому просторі L через $\mathrm{conv}(A)$ позначаємо її замкнену опуклу оболонку.

3. ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Позначимо через $\mathrm{pr}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ проектування. Нехай X — гіперпростір кривих сталої ширини $w > 0$, проекція яких на $\mathbb{R}^2$ — коло S радіуса $w/2$.

Лема 1. *Нехай Y — гіперпростір опуклих тіл в $\mathbb{R}^3$, проекція яких на $\mathbb{R}^2$ є диском D з межею S. Тоді відображення $\alpha\colon Y \to X$, $\alpha(A) = A \cap \mathrm{pr}^{-1}(S)$, є неперервним.*

Доведення. Оскільки кожне опукле тіло сталої ширини має одноточковий перетин з кожною опорною площиною, одержуємо, що для кожних $A \in Y$ і $z \in S$ множина $\mathrm{pr}^{-1}(z) \cap A$ є одноточковою. З того, що множина $\alpha(A) = A \cap \mathrm{pr}^{-1}(S)$ – замкнена, а, отже, компактна, випливає, що відображення $\mathrm{pr}|\alpha(A)\colon \alpha(A) \to S$ — гомеоморфізм.

Нехай $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ — послідовність точок з Y і $A = \lim\limits_{i\to\infty} A_i$. Оскільки відображення перетину в гіперпросторі напівнеперервне згори, маємо

$$A' = \lim_{i\to\infty} \alpha(A_i) \subset \alpha(A).$$

Крім того, якщо $\mathrm{pr}(x_i, y_i, t_i) \in S$, $i = 1, 2$, то $|t_1 - t_2| \le \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|$. Звідси випливає, що множина A' в перетині з кожною прямою $\mathrm{pr}^{-1}(z)$, де $z \in S$, — одноточкова. Згідно із зауваженим вище, $A' = A$, тобто відображення α є неперервним.

Теорема 1. *Простір X є гомеоморфним просторові $Q \times \mathbb{R}$.*

Доведення. Наші міркування придатні для довільного $w > 0$, тому, для спрощення позначень, вважатимемо, що $w = 2$. Для визначеності, нехай $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Для кожних $K_1, K_2 \in X$ і $t \in [0, 1]$ приймемо

$$tK_1 \tilde{+} (1-t)K_2 = \{tx_1 + (1-t)x_2 \mid x_1 \in K_1,\ x_2 \in K_2,\ \mathrm{pr}(x_1) = \mathrm{pr}(x_2)\}.$$

Покажемо, що $tK_1 \tilde{+} (1-t)K_2 \in X$. Справді, існують тіла L_1 і L_2 сталої ширини 2, що містять, відповідно, K_1 і K_2. Тоді $tL_1 + (1-t)L_2$ — тіло сталої ширини 2, що містить $tK_1 \tilde{+} (1-t)K_2$, звідки легко випливає, що $tK_1 \tilde{+} (1-t)K_2 \in X$. Неважко переконатися, що

$$\mathrm{conv}(tK_1 \tilde{+} (1-t)K_2) = t\mathrm{conv}(K_1) + (1-t)\mathrm{conv}(K_2),$$

тобто відображення conv вкладає X як опуклу множину в гіперпростір $\mathrm{cc}(\mathbb{R}^3)$ компактних опуклих підмножин в $\mathbb{R}^3$.

Зауважимо, що $X = X_0 \times \mathbb{R}$, де простір X_0 складається з кривих з X, що містять точку $(1, 0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$.

Доведемо, що простір X_0 є компактним. Це легко випливає з таких міркувань. Простір всіх опуклих тіл сталої ширини 2 є локально компактним [4]. Звідси випливає, що локально компактним є простір всіх опуклих тіл сталої ширини, що проектуються на S, а також підпростір Y_0 останнього простору, що складається з опуклих тіл, які містять точку $(1, 0)$. Більше того, простір Y_0 є компактним, а тому з леми 1 випливає, що компактним є і X_0.

Очевидно, що простір X_0 є опуклою підмножиною щодо введеної вище операції. Покажемо, що простір X_0 є нескінченновимірним. Для кожного $n \geq 2$ позначимо через K_n криву, що описується наступною конструкцією. Ототожнимо $\mathbb{R}^2$ з $\mathbb{C}$, отже, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$.

Для кожного натурального $n \geq 2$ і кожного цілого m приймемо

$$a_m = \left(e^{(2\pi m i)/n}, 0\right), \; b_m = \left(e^{(2\pi m i + \pi)/n}, \sqrt{2 - 2\cos(\pi/n)}\right).$$

Криву K_n отримуємо, послідовно з'єднуючи точки a_m і b_{m+1}, а також b_m і a_{m+1}, найкоротшими геодезійними на циліндрі $|z| = 1$ в $\mathbb{R}^3$. Прості геометричні міркування показують, що K_n — крива сталої ширини в $\mathbb{R}^3$.

Покажемо, що для кожного натурального $n \geq 2$ існує натуральне p таке, що

$$K_p \notin \left\{ \sum_{j=2}^{n} \lambda_j K_j \mid \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \; \sum_{j=2}^{n} \lambda_j = 1 \right\}.$$

Це легко випливає з наступного зауваження: якщо ототожнити кожне $K \in X$ з графіком відповідної функції з S в $\mathbb{R}$, то, при зафіксованих $\lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, для яких $\sum_{j=2}^{n} \lambda_j = 1$, графік функції $\sum_{j=2}^{n} \lambda_j K_j$ буде мати не більше ніж $2n^2$ інтервалів монотонності на S. У той же час, графік функції K_p, як видно з побудови, має $2p$ інтервалів монотонності і досить взяти $p > n^2$. Звідси випливає нескінченновимірність простору X_0.

Для завершення доведення досить застосувати результати нескінченновимірної топології опуклих компактів. З теореми Келлера (див., наприклад, [3]) випливає, що простір X_0 є гомеоморфним Q.

Проективну площину $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ розглядаємо як множину прямих, що проходять через початок координат в $\mathbb{R}^3$. Для кожного $l \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ позначимо через p_l площину, ортогональну до l, а через $\pi_l \colon \mathbb{R}^3 \to P_l$ — ортогональне проектування. Нехай $w > 0$ і

$$\mathcal{S}_w = \{K \mid K \text{ — крива сталої ширини } w \text{ і } \pi_l(K) \text{ — коло радіуса } w/2 \text{ для деякого } l \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2\}.$$

Теорема 2. *Простір $\mathcal{S}_w$ є гомеоморфним $Q \times \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \times \mathbb{R}^3$.*

Доведення випливає з існування природної структури добутку в просторі $\mathcal{S}_w$ і теореми 1.

Позначимо через $\mathcal{L}_w$, $w > 0$, множину всіх кривих сталої ширини w в $\mathbb{R}^2$ і нехай X_w — гіперпростір кривих сталої ширини в $\mathbb{R}^3$, що проектуються на криві з $\mathcal{L}_w$. Розглядаємо проектування pr як відображення з X_w в $\mathcal{L}_w$.

Нагадаємо, що відображення називається *відкритим*, якщо образ кожної відкритої множини є відкритим.

Теорема 3. *Відображення* $\mathrm{pr}\colon X_w \to \mathcal{L}_w$ *не є відкритим.*

Доведення. Модифікуємо конструкцію з [4]. Для кожного натурального i позначимо через K_i криву в $\mathbb{R}^2$, описану такою процедурою. Нехай

$$x_j = (\cos(2\pi j/(2i+1)), \sin(2\pi j/(2i+1))),\ \ j = 0, 1, \ldots, 2i.$$

Крива K_i є межею перетину дисків радіуса $\|x_0 - x_i\|$ з центрами в точках x_j, $j = 0, 1, \ldots, 2i$. Очевидно, що K_i — криві сталої ширини в $\mathbb{R}^2$ і

$$\lim_{i\to\infty} K_i = K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

в метриці Гаусдорфа. Як і в [4], переконуємось, що кожна крива сталої ширини, що проектується на K_i, лежить в одній площині. Результат тепер легко випливає з існування неплоских опуклих кривих сталої ширини, що проектуються на K (див. [4] або доведення теореми 1).

4. ЗАУВАЖЕННЯ І ВІДКРИТІ ПИТАННЯ

Аналог теореми 1, взагалі кажучи, не виконується, якщо замінити коло радіуса $w/2$ на довільну криву в $\mathbb{R}^2$ сталої ширини w. Прикладом може служити трикутник Рело і, більш загально, криві сталої ширини, кожна з яких складається з дуг кіл з центрами, що лежать на ній.

Питання 1. Дати характеризацію кривих Y сталої ширини в $\mathbb{R}^2$, що мають властивість: гіперпростір кривих сталої ширини в $\mathbb{R}^3$, проекція яких на $\mathbb{R}^2$ рівна Y, є нескінченновимірним.

Питання 2. Нехай L — гіперпростір опуклих тіл сталої ширини в $\mathbb{R}^3$, проекцією яких на $\mathbb{R}^2$ є диск D радіуса $w/2$, X — гіперпростір кривих сталої ширини в $\mathbb{R}^3$, проекцією яких на $\mathbb{R}^2$ є межа ∂D диска D. Існує природне відображення $h\colon L \to X$, що ставить у відповідність кожному $A \in L$ множину $A \cap f^{-1}(S)$.

Описати геометрію відображення h. Зокрема, чи відображення h є тривіальним розшаруванням з шаром гільбертів куб?

Виникає природне питання перенесення результатів цієї статті на тривимірний простір Мінковського.

Питання 3. Охарактеризувати тривимірні простори Мінковського, для яких справедливий аналог теореми 1.

Зауважимо, що аналог теореми 1 не виконується для всіх тривимірних просторів Мінковського; зокрема, для простору $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty)$ простір всіх кривих сталої ширини, що проектуються на одиничну сферу в $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, не є локально компактним. Природно припустити, що достатньою умовою існування аналога теореми 1 є строга опуклість одиничної кулі.

Криві сталої ширини розглядалися також в гіперболічній площині $\mathbb{H}^2$ (див., наприклад, [2]).

Питання 4. Показати, що гіперпростір кривих сталої ширини в $\mathbb{H}^2$ є стягуваним Q-многовидом.

[1] *Базилевич Л. Е.* Топология гиперпространства выпуклых тел постоянной ширины // Мат. заметки. – 1997, **62,** № 6. – С. 813–819.

[2] *Araújo P. V.* Representation of curves of constant width in the hyperbolic plane // Port. Math. 55(1998), No. 3. – P. 355–372.

[3] *Bessaga C., Pełczyński A.* Selected topics in infinite-dimensional topology. – Monografie Matematyczne, 58, Warsaw: PWN, 1975.

[4] *Bazylevych L.E., Zarichnyi M.M.* On convex bodies of constant width, preprint.

[5] *Cieslak W.* On space curves of constant width // Bull. Soc. Sci. Lett. Lódz. – 38(1988), No. 5, 7 p.

[6] *Zalgaller V. A.* On a problem of the shortest space curve of unit width // Mat. Fiz. Anal. Geom. 1(1994), No. 3–4. – P. 454–461.

ON THE HYPERSPACE OF SPACE CURVES OF CONSTANT WIDTH

[1]*Lidiya BAZYLEVYCH,* [2]*Mykhaylo ZARICHNYI*

[1]Lviv Polytechnic National University
12 S.Bandery Str., Lviv 79013, Ukraine
[2]Ivan Franko Lviv National University
1 Universytetska Str., Lviv 79602, Ukraine

It is proved that the hyperspace of space curves of constant width whose plane projection is a circle is homeomorphic to the product of the Hilbert cube and a line.