Математичний Вісник
Наукового Товариства
ім. Тараса Шевченка
2014. — Т.11

Mathematical Bulletin
of Taras Shevchenko
Scientific Society
2014. — V.11

ВКЛАДЕННЯ ПРОСТОРУ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ У ДОБУТОК БАНАХОВИХ ПРОСТОРІВ ТА ЙОГО БОЧКОВІСТЬ

Г. Волошин[1,2], В.К. Маслюченко[2], О.В. Маслюченко[2,3]

[1]*Економіко-правничий факульнет, Буковинський державний фінансово-економічний університет, Штерна, 1, Чернівці, 58000, Україна*

[2]*Факультет математики та інформатики, Чернівецький національний університет, Університетська 28, Чернівці, 58000, Україна*

[3]*Instytut Matematyki, Akademia Pomorska w Słupsku, ul. Arciszewskiego, 22d, 76-200, Słupsk, Polska*

Г. Волошин, В. Маслюченко, О. Маслюченко. *Вкладення простору нарізно неперервних функцій у добуток банахових просторів та його бочковість* // Мат. вісн. Наук. тов. ім. Т. Шевченка. — 2014. — Т.11. — С. 36–50.

На просторі $S = S(X \times Y)$ всіх нарізно неперервних функцій $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, заданих на добутку двох компактів, введено топологію пошарово рівномірної збіжності і побудовано ізоморфне вкладення $J : S \to \Delta$ у добуток $\Delta = (C_u(Y))^X \times (C_u(X))^Y$ сім'ї банахових просторів, для якого простір $E = J(S)$ замкнений в Δ і має замкнене алгебраїчне доповнення F, правда, алгебраїчна сума $\Delta = E \oplus F$ не є топологічною для $X = Y = [0, 1]$. Звідси виводиться, що простір $S = S[0, 1]^2$ бочковий, але не суперповний.

O. Maslyuchenko, V. Maslyuchenko, H. Voloshyn, *Embedding the space of separately continuous functions into a product of Banach spaces and its barrelledness.*, Math. Bull. T. Shevchenko Sci. Soc. **11** (2014), 36–50.

On the space $S = S(X \times Y)$ of all separately continuous functions $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ defined on the product of two compacta we introduce the cross-uniform topology and construct an isomorphic embedding $J : S \to \Delta$ into the product $\Delta = (C_u(Y))^X \times (C_u(X))^Y$ of a family of Banach spaces, for which space $E = J(S)$ is closed in Δ and has a closed linear complement F. However, the algebraic sum $\Delta = E \oplus F$ is not a topological even for $X = Y = [0, 1]$. This is used to show that the space $S = S[0, 1]^2$ is is barrelled but not B_r-complete.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 46A08 *УДК:* 517.51

Ключові слова і фрази: нарізно неперервна функція, сукупно неперервна функція, топологія пошарово рівномірної збіжності, банаховий простір, локально опуклий простір, бочковий простір.

E-mail: vmaslyuchenko@gmail.com, galja.vlshin@gmail.com

1. Вступ.

У праці [1] на просторі $CC[0,1]^2$ всіх нарізно неперервних функцій $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ була введена локально опукла топологія $\mathcal{T}$ пошарово рівномірної збіжності, яка задається сукупністю переднорм

$$\mathcal{N}(X,Y) = \{\|\cdot\|^x : x \in [0,1]\} \cup \{\|\cdot\|_y : y \in [0,1]\},$$

де $\|f\|^x = \|f^x\|_\infty$, $\|f\|_y = \|f_y\|_\infty$, $f^x = f(x,\cdot)$, $f_y = f(\cdot,y)$ і $\|g\|_\infty = \max\limits_{0\le t\le 1}|g(t)|$ – рівномірна норма на просторі $C[0,1]$ неперервних функцій $g : [0,1] \to \mathbb{R}$. Там було з'ясовано, що локально опуклий простір

$$S = (CC[0,1]^2, \mathcal{T})$$

повний, гаусдорфовий і простір P усіх многочленів від двох змінних всюди щільний в S, а тому S сепарабельний. Там же були поставлені питання про інші властивості простору S, першою з яких йшла бочковість. Так сталося, що спочатку було з'ясовано [2], що простір S не берівський. Добре відомо [3, с.62], що кожний берівський простір є бочковим, але не навпаки [3, с.65]. Тому після цього питання про бочковість простору S стало ще більш інтригуючим.

Досліджуючи це питання ми виявили, що простір S може бути ізоморфно вкладеним у добуток Δ сім'ї банахових просторів і його образ E при цьому вкладені замкнений в Δ. Відомо [4, с.145], що добуток бочкових просторів залишається бочковим. Оскільки банахові простори бочкові, бо вони берівські за теоремою Бера про категорію [5, с.66], то простір Δ бочковий. Але бочковість не успадковується замкненими лінійними підпросторами [6, с.245, вправа 10]. Інша справа, коли замкнений підпростір бочкового простору доповняльний в ньому, тоді він теж буде бочковим як образ бочкового простору при лінійному неперервному відкритому відображенні. Ми знайшли замкнений підпростір F простору Δ, який є алгебраїчним доповненням простору E в Δ, але, на жаль, чи на щастя, алгебраїчна сума $\Delta = E \oplus F$ виявилася не топологічною і питання про бочковість S залишилося відкритим. Правда з допомогою цього нам вдалося встановити, що простір S не є суперповним [7, с.103] або B_r-повним у термінології В.Птака [6, с.206].

Бочковість простору S була доведена іншим способом. На квадраті $Q = [0,1]^2$ була введена спеціальна топологія $\mathcal{S}$ нарізної неперервності, така, що простір S збігається з простором $C_k(Q)$ всіх неперервних функцій $f : (Q,\mathcal{S}) \to \mathbb{R}$ з топологією компактної збіжності. Але давно відомий [8], [9](нове доведення, див. у [10]) критерій бочковості простору $C_k(T)$, яким можна скористатися у нашому випадку.

Розгляду цих питань і буде присвячена дана праця, попередні версії якої були анонсовані в тезах [11, 12].

2. Основні означення і позначення.

Для відображення $f : X \times Y \to Z$ і точки $p = (x,y) \in X \times Y$ покладемо $f^x(y) = f_y(x) = f(p)$. Якщо X, Y і Z – топологічні простори, то відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *нарізно неперервним*, якщо всі відображення $f^x : Y \to Z$ і $f_y : X \to Z$ неперервні для довільних $x \in X$ і $y \in Y$. Символом $CC(X \times Y, Z)$ ми позначаємо сукупність усіх нарізно неперервних відображень $f : X \times Y \to Z$. Якщо $Z = \mathbb{R}$ – числова пряма, то ми покладаємо $CC(X \times Y) = CC(X \times Y, \mathbb{R})$. Множина $CC(X \times Y)$ є лінійним підпростором простору $\mathbb{R}^{X \times Y}$ всіх відображень $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ з природними операціями.

Символом $C(X, Y)$ ми позначаємо сукупність всіх неперервних відображень $g : X \to Y$, при цьому $C(X) = C(X, \mathbb{R})$. Якщо X – це компактний простір, то функція $\|g\|_\infty = \max\limits_{x \in X} |g(x)|$ – це норма на $C(X)$ і відповідний нормований простір $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ ми позначаємо символом $C_u(X)$. Добре відомо, що $C_u(X)$ – це банахів простір.

Нехай X і Y – компактні простори. На просторі $CC(X \times Y)$ формулами

$$\|f\|^x = \|f^x\|_\infty \quad \text{і} \quad \|f\|_y = \|f_y\|_\infty$$

де $x \in X$ і $y \in Y$, визначаються переднорми, сукупність яких ми позначаємо символом $\mathcal{N}(X, Y)$. Символом $\mathcal{T} = \mathcal{T}(X, Y)$ позначається локально опукла топологія, яка породжується сукупністю переднорм $\mathcal{N}(X, Y)$ [5, с.26]. Локально опуклий простір $CC(X \times Y)$, наділений топологією $\mathcal{T}(X, Y)$, ми будемо позначати символом $S(X \times Y)$, а топологію $\mathcal{T}(X, Y)$ називатимемо *топологією пошарово рівномірної збіжності*, бо сітка елементів f_k простору $S(X \times Y)$ буде збігатися до елемента f з $S(X \times Y)$ тоді і тільки тоді, коли $f_k^x \rightrightarrows f^x$ на Y для кожного $x \in X$ і $(f_k)_y \rightrightarrows f_y$ на X для кожного $y \in Y$. Як і в [1] нескладно перевірити, що $S(X \times Y)$ – це повний локально опуклий простір.

Хрестом підмножини E добутку $X \times Y$ називається множина

$$cr(E) = (pr_X(E) \times Y) \cup (X \times pr_Y(E)),$$

де $pr_X(x, y) = x$ і $pr_Y(x, y) = y$ для довільної точки $(x, y) \in X \times Y$. Якщо $p = (x, y) \in X \times Y$, то $cr(p) = cr(\{p\}) = (\{x\} \times Y) \cup (X \times \{y\})$.

Коли X і Y – компактні простори і $f \in CC(X \times Y)$, то для кожної точки $p = (x, y) \in X \times Y$ хрест $cr(p)$ – це компактна підмножина добутку $X \times Y$ і звуження $f|_{cr(p)}$ неперервне. Тому можна визначити функцію

$$N_p(f) = \max_{q \in cr(p)} |f(q)| = \max\{\|f\|^x, \|f\|_y\}.$$

Легко перевірити, що N_p – це переднорма на просторі $CC(X \times Y)$ і що сукупність $\mathcal{N}(X \times Y)$ усіх таких переднорм N_p, де $p \in X \times Y$, породжує на просторі $CC(X \times Y)$ ту ж топологію, що й сукупність $\mathcal{N}(X, Y)$.

3. Вкладення простору S у добуток банахових просторів Δ.

Нехай X і Y – компактні простори. Для скорочення запису покладемо

$$S = S(X \times Y).$$

Нехай $f \in S$, $x \in X$ і $y \in Y$. Функції $\varphi(x) = f^x : Y \to \mathbb{R}$ і $\psi(x) = f_y : X \to \mathbb{R}$ неперервні, бо $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція. Відображення $\varphi : X \to C(Y)$ і $\psi : Y \to C(X)$ називаються відповідно *вертикальним і горизонтальним розшаруванням відображення* f. Якщо розглянути простори $C_p(X)$ і $C_p(Y)$ з топологією поточкової збіжності, то відображення $\varphi : X \to C_p(Y)$ і $\psi : Y \to C_p(X)$ будуть неперервними. При цьому для довільних $x \in X$ і $y \in Y$ виконуються рівності

$$\varphi(x)(y) = f(x, y) = \psi(y)(x).$$

Розглянемо добуток

$$\Delta = \Delta(X, Y) = C_u(Y)^X \times C_u(X)^Y,$$

елементи якого – це довільні пари (α, β), де $\alpha : X \to C_u(Y)$ і $\beta : Y \to C_u(X)$ – довільні відображення. Добуток Δ, наділений топологією добутку і природними операціями, – це локально опуклий простір, який можна ототожнити з добутком $\prod\limits_{t \in T} E_t$ банахових просторів E_t, де $T = X \oplus Y = (X \times \{1\}) \cup (Y \times \{2\})$, а $E_t = C_u(Y)$, якщо $t = (x, 1)$, $x \in X$, $E_t = C_u(X)$, якщо $t = (y, 2)$, $y \in Y$.

Визначимо відображення $J : S \to \Delta$, співставивши кожній нарізно неперервній функції $f \in S$ пару (φ, ψ) її вертикального та горизонтального розшарувань.

Теорема 1. *Відображення $J : S \to \Delta$ є ізоморфним вкладенням локально опуклого простору S у локально опуклий простір Δ.*

Доведення. Перевіримо, що відображення J адитивне. Нехай f_1 і f_2 – довільні елементи з S і $f = f_1 + f_2$. Позначимо символами φ_i та ψ_i і φ та ψ вертикальні і горизонтальні розшарування функцій f_i при $i = 1, 2$ та f відповідно. Тоді

$$Jf = (\varphi, \psi), \quad Jf_i = (\varphi_i, \psi_i) \quad \text{при} \quad i = 1, 2.$$

Рівність $Jf = Jf_1 + Jf_2$ яку нам треба перевірити, рівносильна двом рівностям $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ і $\psi = \psi_1 + \psi_2$, вони ж легко перевіряються, бо

$$\varphi(x)(y) = f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y) = \varphi_1(x)(y) + \varphi_2(x)(y)$$

і так само

$$\psi(x)(y) = \psi_1(x)(y) + \psi_2(x)(y)$$

для довільних $x \in X$ і $y \in Y$.

Так само легко перевіряється однорідність відображення J, тобто рівність $J(\lambda f) = \lambda Jf$ для довільних $\lambda \in \mathbb{R}$ і $f \in S$. Таким чином, $J : S \to \Delta$ – це лінійне відображення.

Доведемо, що відображення J ін'єктивне. Для цього досить перевірити, що ядро $kerJ = \{0\}$. Нехай $f \in kerJ$. Тоді, зокрема, вертикальне розшарування φ відображення f є нульовим. У такому разі

$$f(x, y) = \varphi(x)(y) = 0$$

для довільних $(x, y) \in X \times Y$, отже, $f = 0$.

Доведемо неперервність відображення $J : S \to \Delta$. Нагадаємо [3], що якщо топологічна структура на локально опуклому просторі L задається сукупністю переднорм P, а на локально опуклому просторі M – сукупністю Q, то лінійне відображення $T : L \to M$ буде неперервним тоді і тільки тоді, коли для кожної переднорми $q \in Q$ існують такі переднорми $p_1, \ldots, p_n \in P$ і константа c, що

$$q(Tu) \leq c \max\{p_1(u), \ldots, p_n(u)\}$$

для кожного $u \in L$.

На просторі S локально опукла топологія задається сукупністю переднорм $\mathcal{N}(X, Y) = \{\|\cdot\|^x : x \in X\} \cup \{\|\cdot\|_y : y \in Y\}$. Для елемента $\gamma = (\alpha, \beta) \in \Delta$ маємо, що $\alpha \in C_u(Y)^X$ і $\beta \in C_u(X)^Y$, отже, $\alpha(x) \in C_u(Y)$ і $\beta(y) \in C_u(X)$ для довільних $x \in X$ і $y \in Y$. Покладемо $\|\gamma\|^x = \|\alpha(x)\|_\infty$ і $\|\gamma\|_y = \|\beta(y)\|_\infty$ для довільних $x \in X$ і $y \in Y$ (тут однаковим символом $\|\cdot\|_\infty$ позначені максимум-норми на просторах $C_u(Y)$ і $C_u(X)$).

Топологічна структура на просторі Δ задається сукупністю переднорм $\gamma \mapsto \|\gamma\|^x$ і $\gamma \mapsto \|\gamma\|_y$, де $x \in X$ і $y \in Y$. Якщо $\chi = (\varphi, \psi) = Jf$, де $f \in S$, то

$$\|Jf\|^x = \|\chi\|^x = \|\varphi(x)\|_\infty = \|f^x\|_\infty = \|f\|^x$$

і

$$\|Jf\|_y = \|\chi\|_y = \|\psi(y)\|_\infty = \|f_y\|_\infty = \|f\|_y$$

для довільних $x \in X$ і $y \in Y$. Це і дає нам неперервність відображення J.

Нехай $E = J(S)$ – образ простору S при відображенні J, $\chi \in E$ і $f = J^{-1}\chi$, тобто $\chi = Jf$. Вищенаведені рівності можуть бути переписані так:

$$\|J^{-1}\chi\|^x = \|\chi\|^x \quad \text{і} \quad \|J^{-1}\chi\|_y = \|\chi\|_y,$$

вони виконуються для довільних $x \in X$ і $y \in Y$. Звідси негайно випливає неперервність оберненого відображення $J^{-1} : E \to S$.

Таким чином, J – це лінійне ін'єктивне відображення, причому J – це гомеоморфізм простору S на його образ $E = J(S)$ як підпростір простору Δ, а значить, $J : S \to E$ – ізоморфізм топологічних векторних просторів, тому $J : S \to \Delta$ – це ізоморфне вкладення. □

4. Опис образу $E = J(S)$ і його замкненість в Δ.

Теорема 2. *Образ $E = J(S)$ простору S при ізоморфному вкладенні $J : S \to \Delta$ складається з тих і тільки тих пар $\chi = (\varphi, \psi)$, що $\varphi(x)(y) = \psi(y)(x)$ на $X \times Y$, і є замкненим підпростором простору Δ.*

Доведення. Нехай $\chi = (\varphi, \psi) = Jf$ для деякого $f \in S$. Тоді $\varphi : X \to C(Y)$ – це вертикальне розшарування функції f, а $\psi : Y \to C(X)$ – горизонтальне, отже, $\varphi(x) = f^x$ і $\psi(y) = f_y$ для довільних $x \in X$ і $y \in Y$, а тоді

$$\varphi(x)(y) = f^x(y) = f(x, y) = f_y(x) = \psi(y)(x)$$

для довільних $(x, y) \in X \times Y$.

Навпаки, нехай $\chi = (\varphi, \psi) \in \Delta$ і $\varphi(x)(y) = \psi(y)(x)$ на $X \times Y$. Покладемо

$$f(x, y) = \varphi(x)(y) = \psi(y)(x)$$

на добутку $X \times Y$. Тоді $f^x = \varphi(x)$ і $f_y = \psi(y)$ для довільних $x \in X$ і $y \in Y$, отже, φ – це вертикальне розшарування відображення $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, а ψ – горизонтальне. Оскільки $\varphi(x) \in C(Y)$ для кожного $x \in X$, то $f^x : Y \to \mathbb{R}$ – неперервна функція для кожного $x \in X$. Так само $\psi(y) \in C(X)$ для кожного $y \in Y$, отже, $f_y : X \to \mathbb{R}$ – це теж неперервна функція для кожного $y \in Y$, таким чином, f – це нарізно неперервна функція, тобто $f \in S$. При цьому $\chi = Jf$, отже, $\chi \in E$. Тому

$$E = \{(\varphi, \psi) \in \Delta : \varphi(x)(y) = \psi(y)(x) \text{ на } X \times Y\}.$$

Доведемо, що E – це замкнений підпростір простору Δ. Розглянемо довільну сітку з елементів $\chi_k = (\varphi_k, \psi_k)$ $(k \in K)$ підпростору E, яка збігається в просторі Δ до елемента $\chi = (\varphi, \psi)$. Тоді

$$\|\varphi_k(x) - \varphi(x)\|_\infty = \|\chi_k - \chi\|^x \to 0 \text{ для кожного } x \in X$$

і

$$\|\psi_k(y) - \psi(y)\|_\infty = \|\chi_k - \chi\|_y \to 0 \text{ для кожного } y \in Y.$$

Але $|\varphi_k(x)(y) - \varphi(x)(y)| \leq \|\varphi_k(x) - \varphi(x)\|_\infty$ і $|\psi_k(y)(x) - \psi(y)(x)| \leq \|\psi_k(y) - \psi(y)\|_\infty$ на $X \times Y$, тому $|\varphi_k(x)(y) - \varphi(x)(y)| \to 0$ і $|\psi_k(y)(x) - \psi(y)(x)| \to 0$ на $X \times Y$, тобто $\varphi_k(x)(y) \to \varphi(x)(y)$ і $\psi_k(y)(x) \to \psi(y)(x)$ на $X \times Y$. Перейшовши в рівності

$$\varphi_k(x)(y) = \psi_k(y)(x),$$

яка виконується на $X \times Y$ для кожного $k \in K$, адже $\chi_k \in E$, до границі відносно k, ми отримаємо, що на $X \times Y$ виконується рівність

$$\varphi(x)(y) = \psi(y)(x),$$

а тоді за доведеним вище $\chi = (\varphi, \psi) \in E$, що і дає нам замкненість E в Δ. □

5. Наявність у підпростору E замкненого алгебраїчного доповнення в просторі Δ.

Теорема 3. *Сукупність $F = \{\zeta = (\xi, \eta) \in \Delta : \xi(x)(y) = -\eta(y)(x)$ на $X \times Y\}$ є замкненим лінійним підпростором простору Δ, який є алгебраїчним доповненням до простору $E = J(S)$ в Δ, причому для проекцій $pr_E : \Delta \to E$ і $pr_E : \Delta \to F$, де $pr_E(\alpha, \beta) = (\varphi, \psi)$ і $pr_F(\alpha, \beta) = (\xi, \eta)$, справедливі формули*

$$\varphi(x)(y) = \frac{\alpha(x)(y) + \beta(y)(x)}{2} = \psi(y)(x)$$

і

$$\xi(x)(y) = \frac{\alpha(x)(y) - \beta(y)(x)}{2} = -\eta(y)(x)$$

на $X \times Y$.

Доведення. Очевидно, що відображення $T : \Delta \to \Delta$, $T(\alpha, \beta) = (\alpha, -\beta)$ – це ізоморфізм топологічного векторного простору Δ і $F = T(E)$ на основі теореми 2, тому F як і E, – це замкнений лінійний підпростір Δ.

Нехай $\gamma = (\alpha, \beta) \in \Delta$. Покажемо, що існують єдині елементи $\chi = (\varphi, \psi) \in E$ і $\zeta = (\xi, \eta) \in F$, такі, що $\gamma = \chi + \zeta$. Рівність $\gamma = \chi + \zeta$ рівносильна двом рівностям $\alpha = \varphi + \xi$ і $\beta = \psi + \eta$, які в свою чергу рівносильні двом скалярним тотожностям

$$\alpha(x)(y) = \varphi(x)(y) + \xi(x)(y) \text{ і } \beta(y)(x) = \psi(y)(x) + \eta(y)(x)$$

на $X \times Y$. Якщо $\chi \in E$ і $\zeta \in F$, то

$$\varphi(x)(y) = \psi(y)(x) \text{ і } \xi(x)(y) = -\eta(y)(x)$$

на $X \times Y$, тому

$$\alpha(x)(y)+\beta(y)(x) = 2\varphi(x)(y), \text{ звідки } \varphi(x)(y) = \frac{1}{2}(\alpha(x)(y)+\beta(y)(x)) = \psi(y)(x),$$

і

$$\alpha(x)(y)-\beta(y)(x) = 2\xi(x)(y), \text{ звідки } \xi(x)(y) = \frac{1}{2}(\alpha(x)(y)-\beta(y)(x)) = -\eta(y)(x),$$

на добутку $X \times Y$. Легко переконатися, що пари $\chi = (\varphi, \psi)$ і $\zeta = (\xi, \eta)$, що визначаються отриманими рівностями, належать до E і F відповідно і при цьому $\gamma = \chi + \zeta$.

Таким чином, кожний елемент γ з Δ єдиним способом може бути записаний у вигляді суми $\gamma = \chi + \zeta$ елементів $\chi \in E$ і $\zeta \in F$, тому F – це алгебраїчне доповнення до E, при цьому для проекцій $pr_E\gamma = \chi$ і $pr_F\gamma = \zeta$ справедливі формули, які написані у формулюванні теореми. □

6. Про топологічність прямої суми $\Delta = E \oplus F$.

Нагадаємо, що для довільного топологічного векторного простору L і його лінійних підпросторів M і N пряма сума $L = M \oplus N$ називається *топологічною*, якщо обидві проекції $pr_M : L \to M$ і $pr_N : L \to N$ неперервні, що рівносильно неперервності однієї з цих проекцій, адже $pr_M + pr_N = I$, де $I : L \to L$ – одиничний оператор. Якщо пряма сума $L = M \oplus N$ є топологічною, то простір L ізоморфний добутку $M \times N$ своїх підпросторів M і N.

Теорема 4. *Для $X = Y = [0, 1]$ проекції pr_E і pr_F розривні, отже, пряма сума $\Delta = E \oplus F$ не є топологічною.*

Доведення. Розглянемо послідовність неперервних функцій $g_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, які задаються правилами: $g_n(t) = nt$, $0 \le t \le \frac{1}{2n}$, $g_n(t) = 1 - nt$, $\frac{1}{2n} \le t \le \frac{1}{n}$, $g_n(t) = 0$ при $\frac{1}{n} \le t \le 1$. Ця послідовність прямує до нуля поточково, але не рівномірно на $[0, 1]$, при цьому $g_n(t) \ge 0$ на $[0, 1]$ і $g_n(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2}$ для кожного n.

Покладемо $\alpha_n(x)(y) = g_n(x)$ і $\beta_n(y)(x) = g_n(y)$ при $(x, y) \in X \times Y = [0,1]^2$. При кожному $x \in X$ функція $\alpha_n(x) : [0,1] \to \mathbb{R}$ стала і дорівнює $g_n(x)$, при цьому $g_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$, отже, $\alpha_n(x) \in C_u(Y)$ і $\alpha_n(x) \to 0$ в $C_u(Y)$. Так само $\beta_n(y)$ – це стала функція з $C_u(X)$ і $\beta_n(y) \to 0$ в $C_u(X)$ для кожного $y \in Y$. Тому $\gamma_n = (\alpha_n, \beta_n) \in \Delta$ для кожного n і $\gamma_n \to 0$ в Δ. Нехай $\chi_n = (\varphi_n, \psi_n) = pr_E \gamma_n$. За відповідною формулою з теореми 3 маємо:

$$\varphi_n(x)(y) = \frac{\alpha_n(x)(y) + \beta_n(y)(x)}{2} = \frac{g_n(x) + g_n(y)}{2} \geq \frac{g_n(y)}{2}$$

для довільних $(x, y) \in [0,1]^2$. Тому для кожного $x \in [0,1]$

$$\|\chi_n\|^x = \|\varphi_n(x)\|_\infty \geq \max_{0 \leq y \leq 1} \frac{g_n(y)}{2} = \frac{1}{4},$$

звідки випливає, що $\|\chi_n\|^x \nrightarrow 0$ при $n \to \infty$, а тому $\chi_n = pr_E \gamma_n \nrightarrow 0$ в E, незважаючи на те, що $\gamma_n \to 0$ в Δ. Це показує, що проекція $pr_E : \Delta \to E$ не є навіть секвенціально неперервною, а тому і розривною. Те саме справедливо і для pr_F.

□

7. Про суперповноту простору S.

Як уже зазначалося у вступі, простір Δ буде бочковим як добуток банахових, а значить, бочкових просторів. Як доведено вище, простір S ізоморфний до замкненого підпростору E бочкового простору Δ. Але замкнений підпростір бочкового простору не зобов'язаний бути бочковим [6, с.245]. Бочковим буде доповняльний підпростір M локально опуклого простору L, тобто такий підпростір, у якого існує таке алгебраїчне доповнення N, що пряма сума $L = M \oplus N$ є топологічною. Доповняльний підпростір M в L обов'язково замкнений, бо він є ядром $ker(pr_N)$ неперервної проекції $pr_N : L \to N$. Його бочковість випливає з того, що M ізоморфний до факторпростору L/N, який обов'язково бочковий для бочкового простору L. Як ми з'ясували для $X = Y = [0,1]$, пряма сума $\Delta = E \oplus F$ не є топологічною, тому цей розклад не можна застосувати до доведення бочковості простору S, це ми зробимо пізніше іншим способом. Але його можна застосувати до дослідження питання про суперповноту простору S і це ми зробимо зараз.

Нехай L – локально опуклий простір, L^* – спряжений з ним простір і $B \subseteq L^*$. Нагадаємо, що множина B називається *майже слабко* замкненою* [7, с.102], якщо для кожного околу нуля U в L перетин $B \cap U^\circ$ множини B з полярою U° околу U слабко* замкнений в L^*. Згідно з дуальною характеризацією повноти [7, с.99] локально опуклий простір L буде повним тоді і тільки тоді, коли кожний майже слабко* замкнений гіперпідпростір M в L^* буде слабко* замкненим. З цією характеризацією пов'язані три підсилення поняття повноти [7, с.103], які були введені В.Птаком. Локально опуклий простір L називається:

суперповним, якщо кожний слабко* всюди щільний майже слабко* замкнений лінійний підпростір M простору L^* збігається з L^*;

досконало повним, якщо кожний майже слабко* замкнений лінійний підпростір M простору L^* буде слабко* замкнений в L^*;

гіперповним, якщо кожна опукла майже слабко* замкнена підмножина B в L^* буде слабко* замкненою в L^*.

Суперповні простори називають ще *B_r-повними*, а досконало повні – *B-повними* або *просторами Птака*. В.Птак застосував ці поняття для отримання методами теорії двоїстості своїх теорем про відкрите відображення і замкнений графік, однією з яких є така теорема [7, с.127]: кожне лінійне відображення $T : L \to M$ гаусдорфового бочкового простору L у гаусдорфовий суперповний простір M, яке має замкнений графік, обов'язково неперервне.

Легко зрозуміти, що коли топологічний векторний простір L розкладений у пряму суму своїх замкнених підпросторів M і N, то проекції $pr_M : L \to M$ і $pr_N : L \to N$ мають замкнений графік. Справді, нехай $u_j \in L$, $u_j \to u$ в L і $v_j = pr_M u_j \to v$ в M. Тоді $w_j = u_j - v_j \in N$ для кожного j і $w_j \to w = u - v$ в L. Оскільки підпростір N замкнений, то $w \in N$. Отже, $u = v + w$, де $v \in M$ і $w \in N$, тому $v = pr_N u$, що і дає нам замкненість графіка проекції pr_M.

Тепер ми зможемо встановити такий результат.

Теорема 5. *Простір $S = S[0,1]^2$ не суперповний.*

Доведення. Для цього досить показати, що ізоморфний до S простір E не суперповний. Нехай це не так і E – суперповний простір. Скористаємось розкладом $\Delta = E \oplus F$, в якому простір Δ бочковий, а його підпростори E і F замкнені. Тоді проекція $pr_E : \Delta \to E$ має замкнений графік. Оскільки за нашим припущенням простір E суперповний, то за теоремою Птака про замкнений графік проекція pr_E буде неперервною, що суперечить теоремі 4. Таким чином, простір E, а з ним і S, не суперповні. □

Оскільки

$$\text{гіперповнота} \Rightarrow \text{досконала повнота} \Rightarrow \text{суперповнота} \Rightarrow \text{повнота},$$

то простір $S = S[0,1]^2$ – це приклад простору, який є повним, але ні суперповним, ні досконало повним, ні гіперповним.

Тому природно виникає питання: чи будуть лінійні відображення $T : L \to S$ із замкненим графіком обов'язково неперервними, якщо L – це гаусдорфовий бочковий простір?

На основі отриманого результату легко дати відповідь на це питання. Нехай $J : S \to \Delta$ – побудоване у п.3 ізоморфне вкладення, $E = J(S)$, а F – визначений у теоремі 3 з п.5 підпростір. Обидва простори E і F замкнені, $\Delta = E \oplus F$ і ця пряма сума не є топологічною, зокрема, проекція $pr_E : \Delta \to E$ розривна. Крім того, вона має замкнений графік, бо простори E і F замкнені в Δ. Оскільки обернене відображення $J^{-1} : E \to S$ – це ізоморфізм, то композиція $T = J^{-1} \circ pr_E : \Delta \to S$ буде лінійним розривним відображенням із замкненим графіком. При цьому простір Δ є бочковим.

8. Леми про дискретні множини.

Тепер ми беремо курс на доведення бочковості простору $S = S(X \times Y)$. Почнемо із кількох підготовчих тверджень.

Нагадаємо, що підмножина A топологічного простору P називається *дискретною*, якщо для кожної точки $a \in A$ існує такий її окіл U в P, що $U \cap A = \{a\}$.

Лема 1. *Нехай A – нескінченна підмножина гаусдорфового топологічного простору P. Тоді існує нескінченна дискретна множина B, така, що $B \subseteq A$.*

Доведення. Якщо A сама є дискретною, то досить покласти $B = A$. Нехай A не дискретна. Тоді існує $a \in A$, таке, що $a \in \overline{A \setminus \{a\}}$. Ясно, що тоді $A \setminus \{a\} \neq \emptyset$, отже, існує точка $b_1 \in A \setminus \{a\}$. Оскільки P гаусдорфовий і $a \neq b_1$, то існують відкриті околи U_1 точки a і V_1 точки b_1, такі, що $U_1 \cap V_1 = \emptyset$. Далі виберемо $b_2 \in U_1 \cap (A \setminus \{a\})$. Скориставшись знову гаусдорфовістю P, знайдемо відкриті множини $U_2, V_2 \subseteq U$, такі, що $a \in U_2$, $b_2 \in V_2$, $U_2 \cap V_2 = \emptyset$ і $U_2, V_2 \subseteq U_1$. І так далі, якщо уже побудовано окіл U_{n-1} точки a, то вибираємо $b_n \in U_{n-1} \cap (A \setminus \{a\})$ і відкриті множини $U_n, V_n \subseteq U_{n-1}$, так, щоб $a \in U_n$, $b_n \in V_n$, $U_n \cap V_n = \emptyset$. Таким чином, послідовності відкритих множин U_n, V_n і точок $b_n \in A \setminus \{a\}$ повністю визначені, причому $a \in U_n$, $b_n \in V_n$, $U_n \cap V_n = \emptyset$ і $U_{n+1}, V_{n+1} \subseteq U_n$ для довільного номера n. Тоді якщо $m < n$, то $V_m \cap V_n \subseteq U_n \cap V_n = \emptyset$. Покладаючи $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, матимемо, що $V_n \cap B = \{b_n\}$ ля кожного n. Отже, B – шукана множина. $\square$

Лема 2. *Нехай $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ – дискретна підмножина цілком регулярного простору P, що складається з різних точок a_n. Тоді існує така неперервна функція $\alpha : P \to \mathbb{R}$, що $\alpha(a_n) = \frac{1}{2^n}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.*

Доведення. Для кожного n виберемо такий окіл U_n точки a_n в P, що $U_n \cap A = \{a_n\}$. З повної регулярності простору P випливає, що для кожного n існує така неперервна функція $\alpha_n : P \to [0,1]$, що $\alpha_n(a_n) = 1$ і $\alpha_n(p) = 0$ на $P \setminus U_n$. Покладемо для $p \in P$

$$\alpha(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \alpha_n(p).$$

Оскільки $0 \leq \frac{1}{2^n}\alpha_n(p) \leq \frac{1}{2^n}$ на P, то ряд збігається рівномірно на P, отже, функція α визначена і неперервна на P. Крім того, $\alpha(a_n) = \frac{1}{2^n}$, бо $\alpha_n(a_k) = 0$ при $k \neq n$, адже тоді $a_k \notin U_n$. Отже, α – шукана функція. $\square$

9. Топологія нарізної неперервності.

Нехай X і Y – довільні топологічні простори і $X \times Y$ – їх добуток. Розглянемо на ньому найслабшу топологію $\mathcal{S}$, для якої всі нарізно неперервні функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ неперервні, тобто проективну топологію, породжену сукупністю $CC(X \times Y)$ усіх нарізно неперервних функцій $f : X \times Y \to \mathbb{R}$

(див. [5, с.29]). Передбазу топології $\mathcal{S}$ будуть утворювати всі можливі прообрази $f^{-1}((\alpha,\beta))$ довільних інтервалів (α,β) в $\mathbb{R}$, де f пробігає сукупність $CC(X\times Y)$. Топологію $\mathcal{S}$ ми називатимемо *топологією нарізної неперервності*, а топологічний простір $(X\times Y,\mathcal{S})$ позначатимемо символом P.

На добутку $X\times Y$ можна ввести ще одну топологію, яка називається *хрест-топологією*, її ми будемо позначати літерою $\mathcal{C}$. Відкритими множинами в топології $\mathcal{C}$ будуть ті підмножини G в добутку $X\times Y$, у яких вертикальні x-перерізи

$$G^x=\{v\in Y:(x,v)\in G\}$$

відкриті в Y для кожного $x\in X$ і горизонтальні y-перерізи

$$G_y=\{u\in X:(u,y)\in G\}$$

відкриті в X для кожного $y\in Y$. Топологію добутку на $X\times Y$ позначимо літерою $\mathcal{P}$.

Лема 3. *а) Якщо простори X і Y цілком регулярні, то $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{S}$ і $(X\times Y,\mathcal{S})$ є цілком регулярним;*

б) $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{C}$ для довільних просторів X і Y.

Доведення. а) Нехай $G\in\mathcal{P}$ і $p_0=(x_0,y_0)\in G$. Тоді існують околи U і V точок x_0 і y_0 у просторах X і Y відповідно, такі, що $U\times V\subseteq G$. З повної регулярності просторів X і Y випливає, що існують такі неперервні функції $g:X\to[0,1]$ і $h:Y\to[0,1]$, що $g(x_0)=1$, $g(x)=0$ на $X\backslash U$, $h(h_0)=1$, $h(y)=0$ на $Y\backslash V$. Покладемо $f=g\otimes h$, тобто $f(x,y)=g(x)h(y)$ при $x\in X$ і $y\in Y$. Тоді $f(x,y)=g(x)h(y)=0$, якщо $(x,y)\notin U\times V$. Тому, якщо $f(p)>0$, то $p\in U\times V$. Множина $W=\{p\in X\times Y:f(p)>0\}$ – це окіл точки p_0 в топології $\mathcal{S}$, адже $f(p_0)=g(x_0)h(y_0)=1>0$, і $W\subseteq U\times V\subseteq G$, отже, $G\in\mathcal{S}$, а значить $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{S}$.

З включення $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{S}$ і гаусдорфовості топології добутку випливає гаусдорфовість топології $\mathcal{S}$. Далі з означення $\mathcal{S}$ випливає, що $\mathcal{S}$ має передбазу з функціонально відкритих множин. Але перетин скінченного числа функціонально відкритих множин є функціонально відкритою множиною. Отже, $\mathcal{S}$ має базу з функціонально відкритих множин. Таким чином, топологія $\mathcal{S}$ є цілком регулярною.

б) Нехай $f:X\times Y\to\mathbb{R}$ – довільна нарізно неперервна функція. Доведемо, що вона неперервна в хрест-топології. Розглянемо довільну відкриту множину H в $\mathbb{R}$ і доведемо, що її прообраз $G=f^{-1}(H)\in\mathcal{C}$. За умовою відображення $f^x:Y\to\mathbb{R}$ і $f_y:X\to\mathbb{R}$ неперервні для довільних $x\in X$ і $y\in Y$. Але $G^x=\{y\in Y:(x,y)\in G\}=\{y\in Y:f(x,y)\in H\}=\{y\in Y:f^x(y)\in H\}=(f^x)^{-1}(H)$ і так само $G_y=(f_y)^{-1}(H)$ для довільних $x\in X$ і $y\in Y$. Тому і всі перерізи G^x та G_y відкриті у відповідних просторах, що дає нам належність $G\in\mathcal{C}$ і неперервність f у хрест-топології. Але $\mathcal{S}$ – це найслабша з топологій, відносно якої всі нарізно неперервні функції $f:X\times Y\to\mathbb{R}$ – неперервні. Тому $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{C}$. □

Лема 4. $C(P) = CC(X \times Y)$.

Доведення. За означенням топології $\mathcal{S}$ виконується включення $CC(X\times Y) \subseteq C(P)$. Покажемо, що і навпаки $C(P) \subseteq CC(X \times Y)$. Нехай $f : P \to \mathbb{R}$ – неперервна функція. Оскільки $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$ за лемою 3, то f буде неперервною і відносно хрест-топології $\mathcal{C}$. З означення хрест-топології негайно випливає, що для довільних $x \in X$ і $y \in Y$ відображення $h_y : X \to (X\times Y, \mathcal{C})$, $h_y(u) = (u, y)$, і $h^x : Y \to (X\times Y, \mathcal{C})$, $h^x(v) = (x, v)$, будуть неперервними, адже для довільної множини $G \in \mathcal{C}$ прообрази

$$h_y^{-1}(G) = \{u \in X : h_y(u) \in G\} = \{u \in X : (u, y) \in G\} = G_y$$

і

$$(h^x)^{-1}(G) = \{v \in Y : h^x(v) \in G\} = \{v \in Y : (x, v) \in G\} = G^x$$

є відкритими у просторах X і Y відповідно. Але

$$f_y(u) = f(u, y) = f(h_y(u)) = (f \circ h_y)(u)$$

і

$$f^x(v) = f(x, v) = f(h^x(v)) = (f \circ h^x)(v),$$

тобто $f_y = f \circ h_y$ і $f^x = f \circ h^x$. Тому функції $f_y : X \to \mathbb{R}$ і $f^x : Y \to \mathbb{R}$ будуть неперервними як композиції неперервних функцій. А це і означає, що $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – це нарізно неперервна функція, тобто $f \in CC(X \times Y)$. $\square$

Нагадаємо, що підмножина A топологічного простору X називається *обмеженою в* X, якщо для кожної неперервної функції $f : X \to \mathbb{R}$ її образ $f(A)$ – це обмежена множина в $\mathbb{R}$.

Для компактів X і Y, тобто компактних гаусдорфових просторів, можна дати простий критерій обмеженості множини у просторі $P = (X \times Y, \mathcal{S})$.

Теорема 6. *Нехай X і Y – компакти і $P = (X \times Y, \mathcal{S})$. Підмножина E простору P буде обмеженою тоді і тільки тоді, коли існують такі точки $p_1, \dots, p_n$ в P, що $E \subseteq cr\{p_1, \dots, p_n\}$.*

Доведення. *Достатність:* Кожний хрест $K = cr(p)$ точки $p = (x, y)$ з P – це компактна множина в добутку $X \times Y$, адже $K = (X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y)$, а підпростори $X \times \{y\}$ і $\{x\} \times Y$ добутку $X \times Y$ гомеоморфні компактним просторам X і Y відповідно. Для кожної нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ звуження $f|_K$ буде неперервним, бо звуження $f|_{X\times\{y\}}$ і $f|_{\{x\}\times Y}$ неперервні і множини $X \times \{y\}$ і $\{x\} \times Y$ замкнені в K.

Якщо $K = cr\{p_1, \dots, p_n\}$, де $p_i \in P$ при $i \in \{1, \dots, n\}$, то $K = \bigcup_{i=1}^n K_i$, де $K_i = cr(p_i)$ при $i \in \{1, \dots, n\}$. Множина K є компактною в $X\times Y$, бо такими є всі хрести $K_1, \dots, K_n$, кожний хрест K_i буде замкнений в K, тому для кожної функції $f \in CC(X \times Y)$ звуження $f|_K$ буде неперервним, адже всі звуження $f|_{K_i}$ є такими. Але $f(K) = f|_K(K)$, отже, $f(K)$ є образом компактної множини K при неперервному відображенні $f|_K$, а тому $f(K)$ буде компактною множиною в $\mathbb{R}$, а значить, обмеженою множиною в $\mathbb{R}$. Це і доводить обмеженість хреста K і будь-якої його підмножини, адже $C(P) = CC(X \times Y)$ за лемою 4.

Необхідність: Припустимо, що підмножина E добутку $X \times Y$ не міститься в жодному хресті $cr(F)$, породженому скінченною множиною точок, і доведемо, що ця множина не обмежена у просторі $P = (X \times Y, \mathcal{S})$.

Розглянемо довільну точку $p_1 = (x_1, y_1) \in X \times Y$. Оскільки $E \not\subseteq cr(p_1)$, то існує така точка $p_2 = (x_2, y_2) \in E$, що $p_2 \notin cr(p_1)$. Так само $E \not\subseteq cr\{p_1, p_2\}$, отже, існує така точка $p_3 = (x_3, y_3) \in E$, що $p_3 \notin cr\{p_1, p_2\}$. Продовжуючи цей процес до нескінченності, ми побудуємо таку послідовність точок $p_n = (x_n, y_n) \in E$, що $p_n \notin cr\{p_1, \ldots, p_{n-1}\}$ для кожного $n \geq 2$. Розглянемо множини $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ і $B = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Зрозуміло, що $x_n \neq x_k$ і $y_n \neq y_k$ для довільних різних номерів n і k, бо, скажімо при $n > k$ за побудовою $p_n \notin cr\{p_1, \ldots, p_{n-1}\}$, отже, $p_n \notin cr(p_k)$, а тому $x_n \neq x_k$ і $y_n \neq y_k$. Таким чином, множини A і B нескінченні, а саме, зліченні. За лемою 1 існує нескінченна дискретна підмножина $\widetilde{A}$ множини A. Зрозуміло, що вона зліченна, отже, її ми можемо записати у вигляді $\widetilde{A} = \{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$, де $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ – строго зростаюча послідовність номерів. Розглянемо множину $\widetilde{B} = \{y_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$, яка теж нескінченна і міститься в B. Скориставшись ще раз лемою 1, виберемо нескінченну дискретну множину B_0, яка міститься в $\widetilde{B}$. Вона буде зліченною, отже, її можна записати у вигляді $B_0 = \{y_{n_{k_j}} : k \in \mathbb{N}\}$, де $(k_j)_{j=1}^{\infty}$ – строго зростаюча послідовність номерів. Покладемо $a_j = x_{n_{k_j}}$, $b_j = y_{n_{k_j}}$ і $q_j = (a_j, b_j) = p_{n_{k_j}}$. Зрозуміло, що множина $E_0 = \{q_j : j \in \mathbb{N}\}$ міститься в множині E. Оскільки X і Y – це компакти, то вони будуть нормальними, а значить, і цілком регулярними просторами [13, с.199]. Тому за лемою 2 існують неперервні функції $\alpha : X \to \mathbb{R}$ і $\beta : Y \to \mathbb{R}$, такі, що $\alpha(a_j) = \frac{1}{2^j} = \beta(b_j)$ для кожного j.

Розглянемо функцію $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, що задається правилом $g(t,s) = \frac{2st}{s^4+t^4}$ при $(s,t) \neq (0,0)$ і $g(0,0) = 0$. Легко переконатися в тому, що функція g є нарізно неперервною. Покладемо $f(x,y) = g(\alpha(x), \beta(y))$. Зрозуміло, що і функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ буде нарізно неперервною, а значить, неперервною на просторі P. Але $f(q_j) = g(\alpha(a_j), \beta(b_j)) = g(\frac{1}{2^j}, \frac{1}{2^j}) = \frac{2}{2^{2j}} : \frac{2}{2^{4j}} = 2^{2j} = 4^j$ для кожного j, звідки негайно випливає, що множина $E_0 = \{q_j : j \in \mathbb{N}\}$ не може бути обмеженою в P, адже множина $f(E_0) = \{4^j : j \in \mathbb{N}\}$ не обмежена в $\mathbb{R}$, а $f \in C(P)$. Оскільки за побудовою $E_0 \subseteq E$, то і множина E не обмежена в P, що і доводить необхідність вказаної умови. $\square$

10. Еквікомпактність, теорема Нахбіна-Широти і бочковість простору $S(X \times Y)$. Нагадаємо, що топологічний простір T називається *еквікомпактним* [14], якщо у ньому замикання $\overline{E}$ кожної обмеженої множини E буде компактною множиною.

Символом $C_k(T)$ позначимо простір всіх неперервних функцій $f : T \to \mathbb{R}$

з топологією компактної збіжності, яка задається сукупністю переднорм

$$p_K(f) = \max_{t \in K} |f(t)|,$$

де K пробігає систему всіх компактних підмножин топологічного простору T.

Нагадаємо, що *бочкою* в топологічному векторному просторі називається абсолютно опукла радіальна і замкнена множина. Локально опуклий простір називається *бочковим*, якщо в ньому кожна бочка є околом нуля.

Л.Нахбін [8] і Т.Широта [9] встановили необхідну і достатню умову для того, щоб простір $C_k(T)$ був бочковим, нове топологічне доведення якої дали М.Асанов і Н.Шангунов [10].

Теорема 7. ***(Нахбіна-Широти).*** *Для цілком регулярного простору T простір $C_k(T)$ буде бочковим тоді тільки тоді, коли простір T еквікомпактний.*

З теореми 6 легко випливає

Теорема 8. *Нехай X і Y – компакти і $P = (X \times Y, \mathcal{S})$ – їх добуток, наділений топологією нарізної неперервності $\mathcal{S}$. Тоді P – це еквікомпактний простір.*

Доведення. Нехай E – це обмежена множина у просторі P. За теоремою 8 у P існує така скінченна множина точок $p_1, \ldots, p_n$, що $E \subseteq cr\{p_1, \ldots, p_n\} = K$. Зауважимо, що для кожної точки $p = (x, y) \in P$ її хрест $cr(p) = (\{x\} \times Y) \cup (X \times \{y\})$ буде компактною множиною в просторі $(X \times Y, \mathcal{C})$, де $\mathcal{C}$ – хрест-топологія. Справді, вкладення $h^x : Y \to X \times Y$, $h^x(v) = (x, v)$, і $h_y : X \to X \times Y$, $h_y(u) = (u, y)$, як зауважувалось у доведенні леми 4, у цьому випадку будуть неперервними, $\{x\} \times Y = h^x(Y)$, $X \times \{y\} = h_y(X)$ і X та Y компакти, отже, множини $\{x\} \times Y$ і $X \times \{y\}$ будуть компактними в просторі $(X \times Y, \mathcal{C})$ як образи компактних множин при неперервних відображеннях, а об'єднання двох компактних множин залишається компактною множиною. Але за лемою 3б) $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$, тому $cr(p)$ – це компактна множина і в P. Компактною множиною в P буде і хрест K, адже він є скінченним об'єднанням хрестів $K_j = cr(p_j)$, $j = 1, \ldots, n$. При цьому простір P гаусдорфовий, адже гаусдорфовим буде добуток $X \times Y$ двох компактів з топологією добутку $\mathcal{P}$ і $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{S}$. Тому компактні множини в P будуть замкненими в P. В такому разі $\overline{E} \subseteq \overline{K} = K$, звідки негайно випливає, що замикання $\overline{E}$ – це компактна множина в P, бо множина K компактна, а $\overline{E}$ – її замкнена частина. □

Звідси негайно одержується

Теорема 9. *Для довільних компактів X і Y простір $S(X \times Y)$ з топологією пошарово рівномірної збіжності збігається з простором $C_k(P)$ і є бочковим.*

Доведення. Рівність $C(P) = CC(X \times Y)$ доведена в лемі 4. Покажемо, що топологія компактної збіжності на $C(P)$ збігається з топологією пошарово рівномірної збіжності на $CC(X \times Y)$.

Нехай K – компактна підмножина простору P. Тоді вона, очевидно, буде обмеженою в P, а значить, за теоремою 8 існують точки $p_1, \dots, p_n$ в P, такі, що $K \subseteq cr\{p_1, \dots, p_n\} = E$.

Розглянемо переднорми $N_{p_j} \in \mathcal{N}(X \times Y)$ при $j = 1, \dots, n$. Зрозуміло, що для кожного $f \in S(X \times Y)$

$$p_K(f) \leq \max\{N_{p_1}(f), \dots, N_{p_n}(f)\} = p_E(f),$$

адже, $K \subseteq E$ і $E = \bigcup_{j=1}^n cr(p_j)$. З отриманої нерівності випливає, що тотожний оператор $I : S(X \times Y) \to C_k(P)$ неперервний. Неперервність оператора $I : C_k(P) \to S(X \times Y)$ очевидна, бо для кожного $p \in P$ хрест $cr(p)$ – це компактна множина в P. Таким чином, тотожний оператор $I : S(X \times Y) \to C_k(P)$ є ізоморфізмом, отже, $S(X \times Y) = C_k(P)$.

Тепер бочковість простору $S(X \times Y)$ безпосередньо випливає з теорем 7 і 8, адже за теоремою 8 простір P еквікомпактний, а тоді за теоремою 7 простір $S(X \times Y) = C_k(P)$ бочковий. $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко, *Топологізація простору нарізно неперервних функцій*, Карп. мат. публ. **5**:2 (2013), 199–207.
2. Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко, О.В. Маслюченко, *Про берівську категорію простору нарізно неперервних функцій*, Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми теорії ймовірності та математичного аналізу» (24 лютого - 2 березня 2014р.). Тези доповідей. – Ів.-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т, (2014), 46–48.
3. В.К. Маслюченко, *Лінійні неперервні оператори*, Чернівці: Рута (2002), 72с.
4. Н. Бурбаки, *Топологические векторные пространства*, М.: ИЛ, (1959), 410с.
5. В.К. Маслюченко, *Перші типи топологічних векторних просторів*, Чернівці: Рута, (2002), 72с.
6. Х. Шефер, *Топологические векторные пространства*, М.: Мир, (1971), 360с.
7. В.К. Маслюченко, *Елементи теорії двоїстості*, Чернівці: Рута, (2005), 160с.
8. L. Nachbin, *Topological vector spaces of contiuous functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **40** (1954), 471–474.
9. T. Shirota, *On locally convex vector spaces of contiuous functions*, Proc. Japan Acad. Sci. **30** (1954), 294–298.
10. M.O. Asanov, N.K. Shamgunov, *The topological proof of the Nachbin-Shirota's theorem*, Comm. Math. Univ. Carolinae **24**:4 (1983), 693–699.
11. Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко, *Вкладення простору нарізно неперервних функцій у добуток банахових просторів*, IV міжнародна ганська конференція, присвячена 135 річниці від народження Ганса Гана, 30 червня–5 липня 2014, Чернівці. Тези доповідей. – Чернівці, (2014), 17–20.
12. О.В. Маслюченко, *Бочковість простору нарізно неперервних функцій*, IV міжнародна ганська конференція, присвячена 135 річниці від народження Ганса Гана, 30 червня–5 липня 2014, Чернівці. Тези доповідей. – Чернівці, (2014), 117–118.
13. Р. Энгелькинг, *Общая топология*, М.: Мир, (1986), 752с.
14. О.В. Маслюченко, *Еквікомпактні простори*, Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Мат. **191-192** (2004), 104–108.

Надійшло 24.11.2014

© Г.Волошин, В.Маслюченко, О.Маслюченко, 2014