ПОВНА СИСТЕМА КОВАРІАНТІВ БІНАРНОЇ ФОРМИ ВОСЬМОГО ПОРЯДКУ

©*2008 р. Леонід БЕДРАТЮК*[1]*, Степан БЕДРАТЮК*[2]

[1] Хмельницький національний університет
[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Редакція отримала статтю 24 червня 2008 р.

Знайдено повну систему однорідних породжуючих елементів алгебри коваріантів бінарної форми восьмого порядку.

1 Вступ

Нехай V_d – комплексний векторний простір бінарних форм порядку d, на якому природним чином діє група $G = SL(2,\mathbb{C})$. Продовжимо дію групи G на алгебру поліноміальних функцій $\mathbb{C}[V_d \oplus \mathbb{C}^2]$ на векторному просторі $V_d \oplus \mathbb{C}^2$. Нехай $C_d = \mathbb{C}[V_d \oplus \mathbb{C}^2]^G$ – алгебра G-інваріантних функцій. В термінах класичної теорії інваріантів алгебра C_d називається алгеброю коваріантів бінарної форми порядку d. Нехай C_d^+ – ідеал алгебри C_d, породжений всіма однорідними елементами додатного степеня. Позначимо через $\bar{C}_d$ множину однорідних елементів в C_d^+, образи яких в $C_d^+/(C_d^+)^2$ утворюють базис цього векторного простору. Множина $\bar{C}_d$ називається повною системою коваріантів бінарної форми порядку d. Елементи множини $\bar{C}_d$ утворюють мінімальну систему однорідних породжуючих елементів алгебри $\bar{C}_d$. Кількість елементів множини $\bar{C}_d$ будемо позначати через c_d.

Описання повних систем коваріантів було однією з головних задач класичної теорії інваріантів 19-го століття. Неважко показати, що $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 4$. Повна система коваріантів для випадку $d = 4$ обчислена спільними зусиллями Келлі, Буля, Ейзенштейна ще в 40-50-х роках XIX століття (див. огляд [1]). Повні системи коваріантів у випадку $d = 5, 6$ обчислені трохи пізніше Ґорданом (див. [2]). Зокрема, $c_4 = 5$, $c_5 = 23$, $c_6 = 26$.

Спроба знайти повну систему коваріантів для $d = 7$ була здійснена в роботі фон Ґалля [3], але в обчисленнях допущенні неточності (див. [4],[5]) і запропонована ним система коваріантів не є мінімальною системою однорідних породжуючих. Також невдалими були спроби Сильвестра обчислити значення c_7 (див. [6]–[8]). Повна система коваріантів у випадку $d = 7$ явно описана в роботі [9] першого автора. Зокрема, $c_7 = 147$.

Випадок $d = 8$ вивчався Сильвестром та фон Ґаллем, але вони отримали різні результати. Сильвестр в [6] отримав, використовуючи техніку обчислень Сильвестра-Келлі, що $c_8 = 69$. Фон Ґалль в [10], розвиваючи конструктивний метод свого вчителя Ґордана, запропонував 68 коваріантів, як повну систему для $d = 8$. Частину їхньої довгої дискусії можна знайти в [11].

Отже, повні системи коваріантів бінарної форми на даний момент відомі лише у випадку $d \leq 7$ (див. також історичні огляди в [1], [12]).

В даній роботі, використовуючи методи статті [5], знайдено повну систему коваріантів бінарної форми восьмого порядку, яка складається із 69 коваріантів. Цим самим повністю підтверджений попередній результат Сильвестра стосовно кількості коваріантів. Результати фон Ґалля виявились в цілому правильними, за виключенням того, що він пропустив один коваріант.

Всі обчислення проводилися в Maple.

2 Семі-інваріанти та їх зображення

Першим кроком у спрощенні обчислень є перехід від обчислення коваріантів до обчислення семі-інваріантів. Якщо розглядати коваріант як многочлен від породжуючих функцій алгебри поліноміальних функцій $\mathbb{C}[V_d \oplus \mathbb{C}^2]$, то семі-інваріант є старшим коефіцієнтом цього многочлена відносно лексикографічного впорядкування, інваріантом підалгебри верхньотрикутних уніпотентних матриць в алгебрі Лі $\mathfrak{sl}_2$. Ототожнимо алгебру $\mathbb{C}[V_d \oplus \mathbb{C}^2]$ з алгеброю многочленів $\mathbb{C}[t, x_1, x_2, \ldots, x_d, Y_1, Y_2]$.

Породжуючі елементи $\begin{pmatrix} 0,0 \\ 1,0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,0 \end{pmatrix}$ дотичної алгебри Лі $\mathfrak{sl}_2$ діють на $\mathbb{C}[V_d]$ як диференціювання

$$\begin{aligned} D_1 &:= t\frac{\partial}{\partial x_1} + 2\,x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + d\,x_{d-1}\frac{\partial}{\partial x_d}, \\ D_2 &:= d\,x_1\frac{\partial}{\partial t} + (d-1)\,x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_d\frac{\partial}{\partial x_{d-1}}. \end{aligned}$$

Алгебра коваріантів C_d співпадає з кільцем всіх поліноміальних розвязків диференціального рівняння в частинних похідних першого порядку (див. [13], [16]):

$$t\frac{\partial u}{\partial x_1} + 2\,x_1\frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + d\,x_{d-1}\frac{\partial u}{\partial x_d} = 0, \qquad (*)$$

тобто $C_d = \mathbb{C}[X_d]^{D_1}$, де $u \in \mathbb{C}[X_d]$, а

$$\mathbb{C}[X_d]^{D_1} := \{f \in \mathbb{C}[X_d] | D_1(f) = 0\}.$$

Нехай $\varkappa : C_d \longrightarrow \mathbb{C}[X_d]^{D_1}$ – $\mathbb{C}$-лінійне відображення, яке співставляє однорідному коваріанту порядку k його коефіцієнт біля Y_1^k. Під однорідністю в біградуйованій алгебрі $\mathbb{C}[t, x_1, x_2, \ldots, x_d, Y_1, Y_2]$ розуміється однорідність відносно кожного з набору змінних X_d та Y_1, Y_2. Наслідуючи класичній традиції, елементи алгебри $\mathbb{C}[X_d]^{D_1}$ назвемо *семіінваріантами,* степінь однорідного коваріанта відносно набору змінних X_d, назвемо його *степенем,* а *порядком* коваріанта назвемо його степінь відносно змінних Y_1, Y_2.

Нехай $F = \displaystyle\sum_{i=0}^{m} f_i \binom{m}{i} Y_1^{m-i} Y_2^i$ – однорідний коваріант порядку m, $\varkappa(F) = f_0 \in \mathbb{C}[X_d]^{D_1}$. Класична теорема Робертса [15] стверджує, що коваріант F повністю і однозначно визначається своїм старшим коефіцієнтом f_0, а саме

$$F = \sum_{i=0}^{m} \frac{D_2^i(f_0)}{i!} Y_1^{m-i} Y_2^i.$$

З іншого боку, кожен семі-інваріант є старшим коефіцієнтом деякого коваріанта (див. [13]). Тому ми можемо коректно визначити обернене відображення $\varkappa^{-1} : \mathbb{C}[X]^{d_1} \longrightarrow C_d$, а саме:

$$\varkappa^{-1}(a) = \sum_{i=0}^{\mathrm{ord}(a)} \frac{D_2^i(a)}{i!} Y_1^{\mathrm{ord}(a)-i} Y_2^i,$$

тут $a \in \mathbb{C}[X]^{d_1}$ і $\operatorname{ord}(a)$ – порядок елемента a відносно локально нільпотентного диференціювання D_2, тобто, $\operatorname{ord}(a) := \max\{s, D_2^s(a) \neq 0\}$. Наприклад, оскільки $\operatorname{ord}(t) = d$, то

$$\varkappa^{-1}(t) = \sum_{i=0}^{\operatorname{ord}(t)} \frac{D_2^i(t)}{i!} Y_1^{\operatorname{ord}(t)-i} Y_2^i = tY_1^d + \sum_{i=1}^{d} \binom{d}{i} x_i Y_1^{d-i} Y_2^i.$$

Як ми можемо бачити, $\varkappa^{-1}(t)$ є просто базисною бінарною формою.

Таким чином, задача знаходження повної системи коваріантів $\overline{C}_d$ еквівалентна задачі знаходження породжуючих елементів алгебри семіінваріантів $\mathbb{C}[X]^{D_1}$.

Структура алгебр констант локально нільпотентних диференціювань може бути просто описана (наприклад, див. [14]). Зокрема, для диференціювання D_1 отримаємо

$$\mathbb{C}[X_d]^{D_1} = \mathbb{C}[t, \sigma(x_2), \ldots, \sigma(x_n)][\frac{1}{t}] \cap \mathbb{C}[X_d],$$

де $\sigma : \mathbb{C}[X_d] \to \mathbb{C}(X_d)^{D_1}$ є кільцевим гомоморфізмом визначеним за формулою

$$\sigma(a) = \sum_{i=0}^{\infty} d_1^i(a) \frac{\lambda^i}{i!}, \lambda = -\frac{x_1}{t}.$$

Після нескладних спрощень отримаємо, що $\sigma(x_i) = \dfrac{z_{i+1}}{t^i}$, де $z_i \in \mathbb{C}[X_d]^{D_1}$ і

$$z_i := \sum_{k=0}^{i-2} (-1)^k \binom{i}{k} x_{i-k} x_1^k t^{i-k-1} + (i-1)(-1)^{i+1} x_1^i, i = 2, \ldots, d.$$

Зокрема

$z_2 = x_2\, t - {x_1}^2$
$z_3 = x_3\, t^2 + 2\, {x_1}^3 - 3\, x_1\, x_2\, t$
$z_4 = x_4\, t^3 - 3\, {x_1}^4 + 6\, {x_1}^2\, x_2\, t - 4\, x_1\, x_3\, t^2$
$z_5 = x_5\, t^4 + 4\, {x_1}^5 - 10\, {x_1}^3\, x_2\, t + 10\, {x_1}^2\, x_3\, t^2 - 5\, x_1\, x_4\, t^3$
$z_6 = x_6\, t^5 - 5\, {x_1}^6 + 15\, {x_1}^4\, x_2\, t - 20\, {x_1}^3\, x_3\, t^2 + 15\, {x_1}^2\, x_4\, t^3 - 6\, x_1\, x_5\, t^4$
$z_7 = x_7\, t^6 + 6\, {x_1}^7 - 21\, {x_1}^5\, x_2\, t + 35\, {x_1}^4\, x_3\, t^2 - 35\, {x_1}^3\, x_4\, t^3 + 21\, {x_1}^2\, x_5\, t^4 -$
$-7\, x_1\, x_6\, t^5$
$z_8 = 28\, {x_1}^6\, x_2\, t - 56\, {x_1}^5\, x_3\, t^2 - 56\, {x_1}^3\, x_5\, t^4 + 28\, {x_1}^2\, x_6\, t^5 -$
$-8\, x_1\, x_7\, t^6 - 7\, {x_1}^8 + 70\, {x_1}^4\, x_4\, t^3 + x_8\, t^7$

Таким чином, отримаємо, що

$$\mathbb{C}[X_d]^{D_1} = \mathbb{C}[t, z_2, \ldots, z_d][\frac{1}{t}] \cap \mathbb{C}[X_d],$$

і породжуючі елементи алгебри семі-інваріантів $\mathbb{C}[X_d]^{D_1}$ ми будемо шукати у вигляді раціонального дробу $\frac{f(z_2,\ldots,z_n)}{t^s}$, $f \in \mathbb{C}[Z_d] := \mathbb{C}[t, z_2, \ldots, z_d]$, $s \in \mathbb{Z}_+$.

Для проведення обчислень з семі-інваріантами у такому вигляді, нам потрібно знайти дію оператора D_2 в координатах $t, z_2, \ldots, z_d$. Позначимо через D продовження диференціювання D_2 на кільце $\mathbb{C}[Z_d][\frac{1}{t}]$:

$$D := D_2(t)\,\frac{\partial}{\partial t} + D_2(z_2)\,\frac{\partial}{\partial z_2} + \ldots + D_2(z_d)\,\frac{\partial}{\partial z_d}.$$

В [17] було знайдено, що

$$\begin{aligned}
&D(t) = -nt\lambda,\\
&D(\sigma(x_2)) = (n-2)\sigma(x_3) - (n-4)\sigma(x_2)\lambda,\\
&D(\sigma(x_i)) = (n-i)\sigma(x_{i+1}) - (n-2i)\sigma(x_i)\lambda - i(n-1)\frac{\sigma(x_2)\sigma(x_{i-1})}{t},\\
&\text{для } i > 2.
\end{aligned}$$

Врахувавши, що $\sigma(x_i) = \dfrac{z_{i+1}}{t^i}$, $\lambda = -\dfrac{x_1}{t}$, можна знайти і $D(z_i), i = 2, \ldots, d$. Зокрема, для $d = 8$ отримуємо:

$$\begin{aligned}
&D = 7\,x_1\,\frac{\partial}{\partial t} - \frac{(-15\,x_1\,z_3 + 18\,{z_2}^2 - 4\,z_4)}{t}\,\frac{\partial}{\partial z_3} +\\
&+\frac{(20\,x_1\,z_4 - 24\,z_2\,z_3 + 3\,z_5)}{t}\,\frac{\partial}{\partial z_4} +\\
&+\frac{(2\,z_6 + 25\,x_1\,z_5 - 30\,z_2\,z_4)}{t}\,\frac{\partial}{\partial z_5} + \frac{(z_7 + 30\,x_1\,z_6 - 36\,z_2\,z_5)}{t}\,\frac{\partial}{\partial z_6} +\\
&+\frac{7\,(5\,x_1\,z_7 - 6\,z_2\,z_6)}{t}\,\frac{\partial}{\partial z_7} + \frac{5\,(2\,x_1\,z_2 + z_3)}{t}\,\frac{\partial}{\partial z_2} -\\
&-\frac{8\,(-6\,x_1\,z_8 + 7\,z_2\,z_7)}{t}\,\frac{\partial}{\partial z_8}.
\end{aligned}$$

Для знаходження повної системи семі-інваріантів нам необхідно мати аналог трансвектанта. Нехай

$$F = \sum_{i=0}^{m} f_i \binom{m}{i} Y_1^{m-i} Y_2^i,\ G = \sum_{i=0}^{k} f_i \binom{k}{i} Y_1^{k-i} Y_2^i,\ f_i, g_i \in \mathbb{C}[Z_d][\frac{1}{t}],$$

– два однорідні коваріанти порядків m, k і

$$(F,G)^r=\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{r}{i}\frac{\partial^r F}{\partial Y_1^{r-i}\partial Y_2^{i}}\frac{\partial^r G}{\partial Y_1^{i}\partial Y_2^{r-i}},$$

– їхній r-й трансвектант. Наступна лема встановлює як знаходити старший коефіцієнт коваріанта $(F,G)^r$ не обчислюючи самого коваріанта.

Лема 1. *Старший коефіцієнт коваріанта* $(F,G)^r, 0\leq r\leq \min(m,k)$ *обчислюється за формулою*

$$\varkappa((F,G)^r)=\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{r}{i}\frac{D^i(\varkappa(F))}{[m]_i}\Big|_{x_1=0,\ldots,x_r=0}\frac{D^{r-i}(\varkappa(G))}{[k]_{r-i}}\Big|_{x_1=0,\ldots,x_r=0},$$

тут $[a]_i:=a(a-1)\ldots(a-(i-1)), a\in\mathbb{Z}_+$.

Доведення в [5].

Нехай f,g два семі-інваріанти, чисельники яких є многочленами від $z_2,\ldots,z_n$ з цілими коефіцієнтами. Тоді семі-інваріант

$$\varkappa((\varkappa^{-1}(f),\varkappa^{-1}(g))^i)$$

буде дробом, чисельник якого є многочлен від $z_2,\ldots,z_n$ з раціональними коефіцієнтами. Тому його можна домножити на деяке раціональне число $r_i(f,g)\in\mathbb{Q}$ таке, що в чисельнику раціонального виразу

$$r_i(f,g)\varkappa((\varkappa^{-1}(f),\varkappa^{-1}(g))^i)$$

уже буде многочлен з цілими взаємно простими коефіцієнтами. Покладемо

$$[f,g]^i:=r_i(f,g)\varkappa((\varkappa^{-1}(f),\varkappa^{-1}(g))^i), 0\leq i\leq\min(\mathrm{ord}(f),\mathrm{ord}(g)).$$

і назвемо вираз $[f,g]^i$ *семітрансвектантом.*

Наступне твердження є прямим наслідком відповідних властивостей трансвектантів:

Лема 2. *Нехай* u,v *– два семі-інваріати. Тоді*

(i) *семітрансвектант* $[t,u\,v]^i$ *є звідним для* $0\leq i\leq\min(d,\max(\mathrm{ord}(u),\mathrm{ord}(v));$

(ii) *якщо* $\mathrm{ord}(u)=0,$ *то* $[t,u\,v]^i=u[t,v]^i;$

(iii) $\mathrm{ord}([f,g]^i)=\mathrm{ord}(f)+\mathrm{ord}(g)-2\,i;$

(iv) $\mathrm{ord}(z_2^{i_2}z_3^{i_3}\cdots z_d^{i_d})=d\,(i_2+i_3+\cdots+i_d)-2\,(2\,i_2+3\,i_3+\cdots+d\,i_d).$

3 Обчислення

Покладемо $C_{8,i} := (C_8)_i$ – множина всіх однорідних елементів з C_8, які мають степінь i. Нехай C_+ – ідеал $\sum_{i>0} C_{8,i}$ в C_8, і $\overline{C}_{8,\,i} := \overline{C}_8 \cap C_{8,i}$. Число δ_i незвідних коваріантів степеня i будемо знаходити за формулою $\delta_i = \dim C_{8,i} - \dim(C_+^2)_i$. Вимірність простору $C_{d,i}$ знаходиться за формулою Сильвестра-Келі [16], [18]:

$$\dim C_{d,\,i} = \frac{(1-T^{d+1})(1-T^{d+2})\dots(1-T^{d+i})}{(1-T^2)\dots(1-T^i)}\Big|_{T=1}.$$

Вимірність векторного простору $(C_+^2)_i$ знаходимо за формулою

$$\dim(C_+^2)_i = \sigma_i - \dim S_i.$$

Тут σ_i – коефіцієнт біля T^i в розкладі ряду Пуанкаре $\dfrac{1}{\prod_{k<i}(1-T^k)^{\delta_k}}$ градуйованої алгебри породженої системою однорідних елементів

$$\cup_{k<i}\overline{C}_{8,k},$$

а S_i – векторний підпростір в $(C_+^2)_i$ утворений сизигіями. Вимірність $\dim S_i$ знаходимо прямими обчисленнями в Maple.

Якщо ми вже визначили множину $\overline{C}_{8,\,i}$, то елементи множини $\overline{C}_{8,\,i+1}$, будемо шукати у вигляді елементів базису векторного простору, породженому семітрансвектантами вигляду $[t, u\,v]^r$, $u \in C_{8,\,l}$, $v \in C_{8,\,k}$, $l+k = i$, $\max(\mathrm{ord}(u), \mathrm{ord}(v)) \le r \le 8$.

Єдиним семі-інваріантом першого степеня буде $t, \mathrm{ord}(t) = 8$.

Маємо $\dim C_{8,2} = 5$, $\sigma_2 = 1$, тому $\delta_{8,2} = 4$. Семітрансвектанти $[t,t]^i$ рівні нулю при непарних i. Позначивши

$$\begin{aligned}
&dv_1 := [t,t]^2 = z_2 = x_2\,t - x_1{}^2,\\
&dv_2 := [t,t]^4 = \frac{z_4 + 3\,z_2{}^2}{t^2} = x_4\,t - 4\,x_1\,x_3 + 3\,x_2{}^2,\\
&dv_3 := [t,t]^6 = \frac{z_6 + 15\,z_2\,z_4 - 10\,z_3{}^2}{t^4} = x_6\,t - 6\,x_1\,x_5 + 15\,x_2\,x_4 - 10\,x_3{}^2,\\
&dv_4 := [t,t]^8 = \frac{z_8 + 28\,z_2\,z_6 - 56\,z_3\,z_5 + 35\,z_4{}^2}{t^6} = -8\,x_1\,x_7 + x_8\,t +\\
&+28\,x_2\,x_6 - 56\,x_3\,x_5 + 35\,x_4{}^2,\\
&\mathrm{ord}(dv_1) = 12,\ \mathrm{ord}(dv_2) = 8,\ \mathrm{ord}(dv_3) = 4,\ \mathrm{ord}(dv_4) = 0.
\end{aligned}$$

можна переконатися, що многочлени t^2, dv_1, dv_2, dv_3 dv_4 лінійно незалежні, тому $\overline{C}_{8,\,2}$, складається із чотирьох незвідних семі-інваріантів другого степеня – dv_1, dv_2, dv_3, dv_4.

Маємо $\dim C_{8,3} = 13$, $\sigma_3 = 5$, $\dim S_3 = 0$, тому $\delta_{8,3} = 8$.

$\overline{C}_{8,\,3}$ складається із 8-ми незвідних семі-інваріантів

$$
\begin{array}{ll}
tr_1 = [t, dv_1]^3, \operatorname{ord}(tr_1) = 14, & tr_2 = [t, dv_1]^4, \operatorname{ord}(tr_2) = 12, \\
tr_3 = [t, dv_1]^5, \operatorname{ord}(tr_3) = 10, & tr_4 = [t, dv_1]^7, \operatorname{ord}(tr_4) = 6, \\
tr_5 = [t, dv_2]^4, \operatorname{ord}(tr_5) = 8, & tr_6 = [t, dv_2]^6, \operatorname{ord}(tr_6) = 4, \\
tr_7 = [t, dv_2]^8, \operatorname{ord}(tr_5) = 0, & tr_8 = [t, dv_1], \operatorname{ord}(tr_6) = 18.
\end{array}
$$

Маємо $\dim C_{8,4} = 33$, $\sigma_4 = 23$, $\dim S_4 = 0$, тому $\delta_{8,4} = 10$. $\overline{C}_{8,\,4}$ складається із 10-ти незвідних семі-інваріантів

$$
\begin{array}{ll}
ch_1 = [t, tr_4]^2, \operatorname{ord}(ch_1) = 10, & ch_2 = [t, tr_4]^5, \operatorname{ord}(ch_2) = 4, \\
ch_3 = [t, tr_5]^8, \operatorname{ord}(ch_3) = 0, & ch_4 = [t, tr_6]^4, \operatorname{ord}(ch_4) = 4, \\
ch_5 = [t, tr_1]^4, \operatorname{ord}(tr_5) = 14, & ch_6 = [t, tr_1]^5, \operatorname{ord}(tr_6) = 12, \\
ch_7 = [t, tr_1]^6, \operatorname{ord}(ch_7) = 10, & ch_8 = [t, tr_1]^7, \operatorname{ord}(ch_6) = 8, \\
ch_9 = [t, tr_2], \operatorname{ord}(ch_7) = 18, & ch_{10} = [t, tr_2]^7, \operatorname{ord}(ch_6) = 6.
\end{array}
$$

Маємо $\dim C_{8,5} = 73$, $\sigma_5 = 65$. Детально розглянемо алгоритм обчислення елементів множини $\overline{C}_{8,\,5}$. Векторний простір $(C_+^2)_5 = t\, C_{8,4} + C_{8,2}\, C_{8,3}$ породжується такими 65 елементами

$$
\begin{array}{l}
t\, ch_1, \ldots, t\, ch_{10}, t^2\, tr_1, \ldots, t^2\, tr_8, \\
dv_1\, tr_1, \ldots, dv_4\, tr_8, t^3\, dv_1, \ldots, t^3\, dv_4, t^5.
\end{array}
$$

Для знаходження базису векторного простору сизигій S_5 складемо систему рівнянь

$$\alpha_1 t\, ch_1 + \alpha_2 t\, ch_2 + \cdots + \alpha_{65} t^5 = 0.$$

Розв'язавши її знайдемо, що

$$
\begin{array}{l}
(55\, tr_1\, dv_3 - 55\, tr_3\, dv_2 + ch_7\, t - 12\, ch_1\, t)\, \alpha_{19} + \\
+ (\dfrac{383}{5}\, tr_4\, t^2 + ch_5\, t - \dfrac{176}{5}\, tr_8\, dv_3 + \dfrac{176}{5}\, tr_3\, dv_1)\, \alpha_{24} + \\
+ (126\, tr_1\, dv_1 - ch_9\, t + tr_3\, t^2 - 126\, tr_8\, dv_2)\, \alpha_{11} = 0,
\end{array}
$$

тобто векторний простір S_5 породжений трьома сизигіями:

$$
\begin{array}{l}
-12\, ch_1\, t + 55\, tr_1\, dv_3 - 55\, tr_3\, dv_2 + ch_7\, t = 0, \\
5\, ch_5\, t + 383\, tr_4\, t^2 - 176\, tr_8\, dv_3 + 176\, tr_3\, dv_1 = 0, \\
-ch_9\, t - 126\, tr_8\, dv_2 + 126\, tr_1\, dv_1 + tr_3\, t^2 = 0.
\end{array}
$$

Тому $\dim S_5 = 3$ і $\delta_{8,5} = 11$. Отже, базис векторного простору $\overline{C}_{8,\,5}$ складається із 11-ти незвідних семі-інваріантів. Шукаємо їх як семітрансвектанти вигляду $[t, u]^i$, $u \in (C_+^2)_4$. Застосувавши Лему 2, знайдемо, що лише при таких значеннях u :

$$ch_1,\ ch_2,\ ch_4,\ ch_5,\ ch_6,\ ch_7,\ ch_8,\ ch_9,\ ch_{10},\ {dv_3}^2,$$

можна отримати незвідні семітрансвектанти. Обчислюємо 65 семітрансвектантів вигляду $[t, ch_i]^k$, $k = 1 \ldots \min(8, \mathrm{ord}(ch_i))$, $i = 1, 2, 4, \ldots 10$ і $[t, dv_3^2]^k$, $k = 5, 6, 7, 8$. Вибираємо з них 11 лінійно незалежних, які не належать векторному простору $(C_+^2)_5$:

$$\begin{array}{ll}
pt_1 = [t, dv_3^2]^6, \mathrm{ord}(pt_1) = 4, & pt_2 = [t, dv_3^2]^7, \mathrm{ord}(pt_2) = 2,\\
pt_3 = [t, dv_3^2]^8, \mathrm{ord}(pt_3) = 0, & pt_4 = [t, ch_1]^2, \mathrm{ord}(pt_4) = 14,\\
pt_5 = [t, ch_1]^4, \mathrm{ord}(pt_5) = 10, & pt_6 = [t, ch_1]^5, \mathrm{ord}(pt_6) = 8,\\
pt_7 = [t, ch_1]^7, \mathrm{ord}(pt_7) = 4, & pt_8 = [t, ch_2], \mathrm{ord}(pt_6) = 10,\\
pt_9 = [t, ch_4], \mathrm{ord}(pt_9) = 10, & pt_{10} = [t, ch_4]^3, \mathrm{ord}(pt_{10}) = 6,\\
pt_{11} = [t, dv_2^3]^5, \mathrm{ord}(pt_9) = 6. &
\end{array}$$

Отже, $\overline{C}_{8,\,5} = \{pt_1, pt_2, \ldots, pt_{11}\}$.

Маємо $\dim C_{86} = 151$, $\sigma_5 = 172$, $\dim S_6 = 30$. Тому $\delta_6 = 151 - (172 - 30) = 9$.

$\overline{C}_{8,\,6}$ складається із 9-ти незвідних семі-інваріантів

$$\begin{array}{ll}
sh_1 = [t, tr_6\, dv_3]^6, \mathrm{ord}(sh_1) = 4, & sh_2 = [t, tr_6\, dv_3]^7, \mathrm{ord}(sh_2) = 2,\\
sh_3 = [t, tr_6\, dv_3]^8, \mathrm{ord}(sh_3) = 0, & sh_4 = [t, pt_5]^5, \mathrm{ord}(sh_4) = 8,\\
sh_5 = [t, pt_6]^5, \mathrm{ord}(sh_5) = 6, & sh_6 = [t, pt_8]^6, \mathrm{ord}(sh_6) = 6,\\
sh_7 = [t, pt_9]^4, \mathrm{ord}(sh_7) = 6, & sh_8 = [t, pt_9]^7, \mathrm{ord}(sh_6) = 4,\\
sh_9 = [t, pt_10]^2, \mathrm{ord}(sh_9) = 10. &
\end{array}$$

Маємо $\dim C_{87} = 289$, $\sigma_7 = 385$, $\dim S_7 = 104$. Тому $\delta_7 = 8$.

$\overline{C}_{8,\,7}$ складається із 8-ти незвідних семі-інваріантів

$$\begin{array}{ll}
si_1 = [t, ch_{10}\, dv_3]^7, \mathrm{ord}(si_1) = 4, & si_2 = [t, tr_6^2]^5, \mathrm{ord}(si_2) = 6,\\
si_3 = [t, tr_6^2]^7, \mathrm{ord}(si_3) = 2, & si_4 = [t, tr_6^2]^8, \mathrm{ord}(si_4) = 0,\\
si_5 = [t, sh_9]^6, \mathrm{ord}(si_5) = 6, & si_6 = [t, sh_9]^7, \mathrm{ord}(si_6) = 4,\\
si_7 = [t, ch_4\, dv_3]^5, \mathrm{ord}(si_7) = 6, & si_8 = [t, ch_{10}\, dv_3]^8, \mathrm{ord}(si_6) = 2.
\end{array}$$

Маємо $\dim C_{88} = 526$, $\sigma_8 = 851$, $\dim S_8 = 332$. Тому $\delta_8 = 7$.

$\overline{C}_{8,\,8}$ складається із 7-ми незвідних семі-інваріантів

$$\begin{array}{ll} vi_1 = [t, ch_4\, tr_6]^7, \mathrm{ord}(vi_1) = 2, & vi_2 = [t, ch_4\, tr_6]^8, \mathrm{ord}(vi_2) = 0, \\ vi_3 = [t, ch_2\, tr_6]^5, \mathrm{ord}(vi_3) = 6, & vi_4 = [t, pt_{10}\, dv_3]^7, \mathrm{ord}(vi_4) = 4, \\ vi_5 = [t, pt_{10}\, dv_3]^8, \mathrm{ord}(vi_5) = 2, & vi_6 = [t, ch_4\, tr_6]^5, \mathrm{ord}(vi_6) = 6, \\ vi_7 = [t, ch_4\, tr_6]^6, \mathrm{ord}(vi_7) = 4. & \end{array}$$

Маємо $\dim C_{8,9} = 910$, $\sigma_9 = 1782$, $\dim S_9 = 877$. Тому $\delta_9 = 5$.

$\overline{C}_{8,\,9}$ складається із 5-ти незвідних семі-інваріантів

$$\begin{array}{ll} de_1 = [t, vi_2]^6, \mathrm{ord}(de_1) = 4, & de_2 = [t, vi_2]^7, \mathrm{ord}(de_2) = 2, \\ de_3 = [t, sh_2\, dv_3]^6, \mathrm{ord}(de_3) = 2, & de_4 = [t, pt_1\, tr_6]^8, \mathrm{ord}(de_4) = 0, \\ de_5 = [t, ch_4^2]^7, \mathrm{ord}(de_5) = 2. & \end{array}$$

Маємо $\dim C_{8,10} = 1514$, $\sigma_{10} = 3673$, $\dim S_{10} = 2162$. Тому $\delta_{10} = 3$. $\overline{C}_{8,\,10}$ складається із 3-х незвідних семі-інваріантів

$$\begin{array}{ll} des_1 = [t, pt_1 ch_4]^8, \mathrm{ord}(des_1) = 0, & des_2 = [t, si_2\, dv_3]^8, \mathrm{ord}(des_2) = 2, \\ des_3 = [t, pt_1 0\, ch_4]^8, \mathrm{ord}(des_3) = 2. & \end{array}$$

Маємо $\dim C_{8,11} = 2430$, $\sigma_{11} = 7355$, $\dim S_{11} = 4927$. Тому $\delta_{11} = 2$.

$\overline{C}_{8,\,11}$ складається із 2-х незвідних семі-інваріантів

$$odn_1 = [t, si_3\, tr_6]^6, \mathrm{ord}(odn_1) = 2, \quad odn_2 = [t, vi_7\, dv_3]^7, \mathrm{ord}(odn_2) = 2.$$

Маємо $\dim C_{8,12} = 3788$, $\sigma_{12} = 14520$, $\dim S_{12} = 10733$. Тому $\delta_{12} = 1$. $\overline{C}_{8,\,12}$ складається із одного незвідного семі-інваріанта.

$$dvan = [t, vi_5\, tr_6]^6, \quad \mathrm{ord}(dvan_1) = 2.$$

Аналогічно знаходимо $\delta_{13} = 0$, $\delta_{14} = 0$, $\delta_{15} = 0$.

Кількість елементів в $\overline{C}_8$ та їх порядки повністю співпадають з результатами роботи [6].

Підсумовуючи отримані результати отримаємо

Теорема. *Наступні 69 коваріантів утворюють повну систему коварі-*

антів бінарної форми восьмого порядку

$$
\begin{aligned}
&t,\\
&dv_1, dv_2, dv_3, dv_4,\\
&tr_1, tr_2, tr_3, tr_4, tr_5, tr_6, tr_7, tr_8,\\
&ch_1, ch_2, ch_3, ch_4, ch_5, ch_6, ch_7, ch_8, ch_9, ch_{10},\\
&pt_1, pt_2, pt_3, pt_4, pt_5, pt_6, pt_7, pt_8, pt_9, pt_{10}, pt_{11},\\
&sh_1, sh_2, sh_3, sh_4, sh_5, sh_6, sh_7, sh_7, sh_9,\\
&si_1, si_2, sh_3, sh_4, sh_5, sh_6, sh_7, si_8,\\
&vi_1, vi_2, vi_3, vi_4, vi_5, vi_6, vi_7,\\
&de_1, de_2, de_3, de_4, de_5,\\
&des_1, des_2, des_2,\\
&odn_1, odn_2,\\
&dvan.
\end{aligned}
$$

[1] *Dixmier J.,* Quelques aspects de la théorie des invariants // Gaz. Math., Soc. Math. Fr. – 1990. – **43**, – P. 39 - 64.

[2] *Gordan P.,* Invariantentheorie, Teubner, Leipzig, reprinted by Chelsea Publ. Co.,1987.

[3] *von Gall F.,* Das vollständige Formensystem der binären Form 7^{ter} Ordnung // Math. Ann., – 1888.– **3**, P.318 - 336.

[4] *Dixmier J., Lazard D.* Le nombre minimum d'invariants fondamentaux pour les formes binaires de degré 7 // Port. Math. – 1986. – **43**. P.377 - 392.

[5] *Bedratyuk L.* On complete system of invariants for the binary form of degree 7 // J. Symb. Comput., – 2007. – **42**. P.935 - 947.

[6] *Sylvester J., Franklin F.* Tables of the generating functions and groundforms for the binary quantic of the first ten orders // Am. J., – 1879. – **2**, P.223 - 251.

[7] *Sylvester J.* Table des nombres de dérivées invariantives d'ordre et de degré donnés, appartenant á la forme binaire du dixiéme ordre // C. R. – 1880. – LXXXIX. P.395 - 396.

[8] *Hammond J.* Note on an exceptional case in which the fundamental postulate of Professor Sylvester's theory of tamisage fails // J. Lond. M. S. – 1883. – **14**. P.85 - 88.

[9] *Bedratyuk L.* On complete system of covariants for the binary form of degree 7 // to appear in J. Symb. Comput., – 2008.

[10] *von Gall F.* Das vollständig Formensystem der binären Form achter Ordnung // Math. Ann. – 1880. – **17**. P.31 - 52, P.139 - 152.

[11] *Sylvester J.* Demonstration of the impossibility of the binary octavic possessing any groundform of degorder 10.4 // Am. J.M. – 1881, – **IV**, P.62 - 85.

[12] *Olver P.* Classical invariant theory, – Cambridge University Press,1999.

[13] *Glenn O.* Treatise on theory of invariants, Boston,1915.

[14] *van den Essen A.* Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture, Progress in Mathematics. (Boston, Mass.), 190. Basel: Birkhauser, 2000.

[15] *Roberts M.* The covariants of a binary quantic of the n-th degree // Quarterly J. Math. – 1861. – **4**. – P.168 - 178.

[16] *Hilbert D.* Theory of algebraic invariants, Cambridge University Press, 1993.

[17] *Bedratyuk L.* On Differential equation of invariants of binary forms // math.AG/0602373, preprint, – 2006.

[18] *Springer T.* Invariant theory, Lecture Notes in Mathematics, 585, Springer-Verlag, 1977.

[19] *Shioda T.* On the graded ring of invariants of binary octavics // Am. J. Math. – 1967. – **89**. – P.1022 - 1046.

A COMPLETE SYSTEM OF COVARIANTS FOR THE BINARY FORM OF THE EIGHTH DEGREE

L. B. BEDRATYUK[1], *S.L. BEDRATIUK*[2]

[1] Khmelnytsky National University
[2] Kyiv National Taras Shevchenko University

A complete system of homogeneous generating elements of the algebra of covariants for the binary form of eighth degree is calculated.