ПРО ВУЗЬКІСТЬ ОПЕРАТОРІВ УМОВНОГО МАТЕМАТИЧНОГО СПОДІВАННЯ В ПРОСТОРАХ ВИМІРНИХ ФУНКЦІЙ

©2008 *Андрій ДОРОГОВЦЕВ* [1], *Михайло ПОПОВ* [2]

[1]Інститут математики НАН України, Київ;
e-mail: *adoro@imath.kiev.ua*
[2]Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича; e-mail: *popov@chv.ukrpack.net*

Редакція отримала статтю 10 вересня 2008 р.

Нехай (Ω, Σ, μ) – простір зі скінченною зліченно-адитивною безатомною мірою. В роботі наведено характеризацію σ-підалгебр $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$, відносно яких оператор $M^{\mathcal{F}}$ умовного математичного сподівання є вузьким в довільному просторі Кете E на (Ω, Σ, μ), в якому оператор $M^{\mathcal{F}}$ діє і є обмеженим. Основний результат стверджує, що оператор $M^{\mathcal{F}}$ є вузьким (строго вузьким) тоді і тільки тоді, коли існує випадкова величина ξ на (Ω, Σ, μ), яка не залежить від $\mathcal{F}$ і має невироджений ґауссівський розподіл.

1 Вступ

У 1990 р. в роботі [8] було введено поняття вузького оператора $T : E \to X$, який діє з довільного симетричного простору функцій E з абсолютно неперервною нормою на просторі зі скінченною зліченно-адитивною безатомною мірою (Ω, Σ, μ) в довільний банахів простір X, як узагальнення поняття компактного оператора. В останні роки з'явилися дослідження вузьких операторів, заданих на інших класах просторів (на просторах з властивістю Даугавета [4], на просторах Кете [2], на просторах $C(K)$ [3], на $L_\infty(\mu)$-просторах [5] і на векторних ґратках [7]). Як приклад «дуже некомпактного» вузького оператора в довільному

Роботу виконано за сприянням Міністерства науки і освіти України, проект N GP/F26/0106; УДК 517.982

симетричному просторі E з абсолютно неперервною нормою в [8] було запропоновано оператор умовного математичного сподівання відносно певної σ-підалгебри $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$. В недавній роботі [5] було показано, що ця ж конструкція дає приклад вузького оператора і для випадку простору $E = L_\infty$, норма якого не є абсолютно неперервною. Більш того, цей оператор є строго вузьким в $L_p(\mu)$ при $1 \le p \le \infty$. Дана стаття присвячена питанню характеризації σ-підалгебр $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$, для яких оператор умовного математичного сподівання відносно $\mathcal{F}$ є вузьким (строго вузьким) у просторі Кете E на (Ω, Σ, μ).

Нагадаємо деякі означення. Нехай (Ω, Σ, μ) – простір зі скінченною зліченно-адитивною безатомною мірою. Банахів простір E класів еквівалентності вимірних функцій (дійсно- чи комплекснозначних) на Ω називається *простором Кете*, якщо виконуються наступні умови:

(K_i) якщо $y \in E$ та $|x| \le |y|$ майже скрізь на Ω, то $x \in E$ та $\|x\| \le \|y\|$;

(K_{ii}) $\chi(A) \in E$ для кожної множини $A \in \Sigma$ з $\mu(A) < \infty$.

Кажуть, що простір Кете E має *абсолютно неперервну норму*, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \|x\chi(A_n)\| = 0$ для кожного $x \in E$ і кожної спадної послідовності множин $A_n \in \Sigma$ з $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.

Простір Кете E називається *симетричним простором*, якщо

(S_i) з умов $y \in E$ та $d_{|x|} = d_{|y|}$ випливає, що $x \in E$ та $\|x\| = \|y\|$, де $d_z(t) = \mu\{\omega \in \Omega : z(\omega) < t\}$ – функція розподілу дійснозначної вимірної функції z на Ω.

Нехай $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$ – σ-підалгебра[1]. Оператор умовного математичного сподівання $M^{\mathcal{F}} : L_1(\Sigma) \to L_1(\mathcal{F})$ на елементі $x \in L_1(\Sigma)$ визначається як єдина (з точністю до еквівалентності) $\mathcal{F}$-вимірна функція $M^{\mathcal{F}}x \in L_1(\mathcal{F})$, для якої виконується рівність

$$\int\limits_A M^{\mathcal{F}} x d\mu = \int\limits_A x d\mu$$

для довільної множини $A \in \mathcal{F}$. Коректність цього означення випливає з класичної теореми Радона-Нікодима. Добре відомо, що оператор умовного математичного сподівання відносно довільної σ-підалгебри є проектором норми 1 в довільному симетричному просторі E на $\big([0,1], \mathcal{B}, \lambda\big)$, де $\mathcal{B}$ – борелівська σ-алгебра на $[0,1]$ і λ – міра Лебеґа [6, с. 122].

Нехай E – простір Кете на (Ω, Σ, μ). Лінійний неперервний оператор T з E в банахів простір X називається *вузьким*, якщо для до-

[1] ми розглядатимемо лише такі σ-підалгебри, які містять Ω

вільної множини $A \in \Sigma$ і довільного $\varepsilon > 0$ існує $x \in E$, такий, що $x^2 = \chi(A)$, $\int\limits_\Omega x d\mu = 0$ та $\|Tx\| < \varepsilon$. Оператор T називається *строго вузьким*, якщо для довільної множини $A \in \Sigma$ існує $x \in \ker T$, такий, що $x^2 = \chi(A)$, $\int\limits_\Omega x d\mu = 0$. Очевидно, кожний строго вузький оператор є вузьким.

Умова $\int\limits_\Omega x d\mu = 0$ в означенні вузького (строго вузького) оператора може бути видалена у випадку абсолютної неперервності норми простору E (див. [8]). Нам невідомо, чи можна цю умову пропустити для випадку $E = L_\infty$.

Ще кілька слів про позначення. Нехай (Ω, Σ, μ) – простір з додатною мірою. Через Σ^+ ми позначатимемо множину усіх елементів $A \in \Sigma$ міри $\mu(A) > 0$, а для довільного $A \in \Sigma$ через $\Sigma(A)$ – множину всіх $B \in \Sigma$ таких, що $B \subseteq A$. Символом $\bigsqcup\limits_{i \in I} A_i$ позначається диз'юнктне об'єднання сім'ї множин $(A_i)_{i \in I}$, тобто, $A = \bigsqcup\limits_{i \in I} A_i$ означає, що $A = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$, причому $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

2 Вузькі і строго вузькі σ-підалгебри

Означення 2.1. *Нехай (Ω, Σ, μ) – простір зі скінченною зліченно-адитивною безатомною мірою. σ-підалгебру $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$ назвемо*

– вузькою, якщо для довільної множини $B \in \Sigma$ і довільного $\varepsilon > 0$ існує $C \in \Sigma(B)$ з властивістю

$$(\forall A \in \mathcal{F}) \qquad \left|\mu(A \cap C) - \frac{1}{2}\,\mu(A \cap B)\right| < \varepsilon\,; \tag{$*$}$$

– строго вузькою, якщо для довільної множини $B \in \Sigma$ існує $C \in \Sigma(B)$ з властивістю

$$(\forall A \in \mathcal{F}) \qquad \mu(A \cap C) = \frac{1}{2}\,\mu(A \cap B)\,. \tag{$**$}$$

Очевидно, кожна строго вузька σ-підалгебра є вузькою. Ми доведемо нижче, що обернене твердження також є вірним, тобто, ці два поняття збігаються.

Легко бачити, що кожна чисто атомна σ-підалгебра є строго вузькою. Справді, нехай $(A_i)_{i \in I}$ – сукупність всіх атомів σ-підалгебри $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$. Для довільної множини $B \in \Sigma$ і довільного $i \in I$ розіб'ємо $A_i \cap B = C_i \sqcup D_i$ довільно на множини однакової міри $\mu(C_i) = \mu(D_i) = 1/2\ \mu(A_i \cap B)$. Тоді, поклавши $C = \bigcap\limits_{i\in I} C_i$, отримаємо, що $C \in \Sigma(B)$, причому $\mu(A_i \cap C) = \mu(C_i) = 1/2\ \mu(A_i \cap B)$ для кожного $i \in I$, чого, очевидно, достатньо для строгої вузькості $\mathcal{F}$.

Наступне твердження виправдовує назву "строго вузької" σ-підалгебри а також дає можливість стверджувати існування строго вузьких безатомних σ-підалгебр.

Твердження 2.2. *Нехай (Ω, Σ, μ) – простір зі скінченною зліченно-адитивною безатомною мірою і $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$ – деяка σ-підалгебра. Нехай E – простір Кете на (Ω, Σ, μ), в якому оператор $M^{\mathcal{F}}$ умовного математичного сподівання діє і є обмеженим. Оператор $M^{\mathcal{F}}$ є строго вузьким тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{F}$ – строго вузька σ-підалгебра.*

Доведення. Нехай $\mathcal{F}$ – строго вузька σ-підалгебра і $B \in \Sigma$ – довільна множина. Виберемо $C \in \Sigma(B)$ з властивістю $(**)$ і покладемо $x = \chi(B) - 2\chi(C)$. Тоді $x^2 = \chi(B)$. Оскільки $(**)$ виконується, зокрема, для $A = \Omega$, то $\int\limits_{\Omega} x d\mu = 0$. Доведемо, що $M^{\mathcal{F}}x = 0$. Справді, для довільної множини $A \in \mathcal{F}$ маємо

$$\int\limits_A M^{\mathcal{F}} x d\mu = \int\limits_A x d\mu = \int\limits_A \chi(B) d\mu - 2\int\limits_A \chi(C) d\mu = \mu(A\cap B) - 2\mu(A\cap C) = 0.$$

Отже, $M^{\mathcal{F}}$ – строго вузький оператор.

Нехай оператор $M^{\mathcal{F}}$ строго вузький. Зафіксуємо довільну множину $B \in \Sigma$ і виберемо $x \in \ker M^{\mathcal{F}}$ так, щоби $x^2 = \chi(B)$. Поклавши $C = \{\omega \in \Omega :\ x(\omega) = -1\}$, отримаємо $x = \chi(B) - 2\chi(C)$. Отже, для довільного $A \in \mathcal{F}$ будемо мати

$$\mu(A\cap B) - 2\mu(A\cap C) = \int\limits_A \chi(B) d\mu - 2\int\limits_A \chi(C) d\mu = \int\limits_A x d\mu = \int\limits_A M^{\mathcal{F}} x d\mu = 0.$$

$\square$

З твердження 2.2 і результатів роботи [5] випливає існування строго вузьких безатомних σ-підалгебр (докладніше див. приклад 3.3 нижче).

3 Характеризація строго вузьких σ-підалгебр

В цьому розділі ми знайдемо характеризацію строго вузьких σ-підалгебр в інших термінах теорії міри. Зауважимо спочатку, що означення строго вузької σ-підалгебри $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$ можна формулювати так: $\mathcal{F}$

називається строго вузькою, якщо для довільної множини $B \in \Sigma$ існує множина $D \in \Sigma$ міри $\mu(D) = 1/2$, яка є незалежною від системи множин $\mathcal{F}(B) = \{A \cap B : \ A \in \mathcal{F}\}$. Справді, для даної множини $B \in \Sigma$ покладемо $C = B \cap D$. Тоді незалежність означає, що для довільної $A \in \mathcal{F}$

$$\mu(A \cap C) = \mu\big(A \cap (B \cap D)\big) = \mu\big((A \cap B) \cap D\big) = \mu(A \cap B)\, \mu(D) = \frac{1}{2}\, \mu(A \cap B).$$

Далі застосуємо техніку умовних мір. Нагадаємо, що міра μ на вимірному просторі (Ω, Σ) називається *досконалою*, якщо для кожної вимірної функції $f : \Omega \to \mathbb{R}$ існує борелівська множина $B \subseteq \mathbb{R}$ така, що $B \subseteq f(\Omega)$ і $\mu\big(f^{-1}(B)\big) = \mu(\Omega)$ [1, с. 118]. σ-алгебра Σ на Ω називається *зліченно-породженою*, якщо існує послідовність множин $A_n \in \Sigma$ така, що Σ збігається з мінімальною σ-алгеброю підмножин Ω, яка містить всі $A_n, n \in \mathbb{N}$. Наступний результат відомий як теорема про існування умовної міри (див. теореми 10.4.5 і 7.5.6 в [1]).

Теорема 3.1. *Нехай (Ω, Σ, μ) – простір зі скінченною зліченно-адитивною досконалою скінченною додатною мірою і зліченно-породженою σ-алгеброю Σ. Тоді для довільної σ-підалгебри $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$ існує функція $p : \Omega \times \Sigma \to \mathbb{R}$, яка називається умовною мірою на Σ відносно $\mathcal{F}$, для якої виконуються наступні умови:*

(i) для довільного $\omega \in \Omega$ функція $p(\omega, \cdot) : \Sigma \to \mathbb{R}$ є зліченно-адитивною мірою на Σ, причому ймовірнісною, якщо μ – ймовірнісна міра;

(ii) для довільного $B \in \Sigma$ функція $p(\cdot, B) : \Omega \to \mathbb{R}$ є $\mathcal{F}$-вимірною і μ-інтегровною;

(iii) для довільних $A \in \mathcal{F}$ і $B \in \Sigma$ виконується рівність

$$\mu(A \cap B) = \int_A p(\omega, B)\, d\mu(\omega).$$

З теореми 3.1 випливає наступна необхідна і достатня умова строгої вузькості σ-підалгебри.

Наслідок 3.2. *Нехай (Ω, Σ, μ) – простір зі скінченною зліченно-адитивною досконалою скінченною додатною мірою і зліченно-породженою σ-алгеброю Σ. σ-підалгебра $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$ є строго вузькою тоді і тільки тоді, коли*

$$\big(\forall\, B \in \Sigma\big)\big(\exists\, C \in \Sigma(B)\big) \quad p(\omega, C) = \frac{1}{2}\, p(\omega, B) \ \text{ для майже всіх } \omega \in \Omega, \tag{3.1}$$

де p – умовна міра на Σ відносно $\mathcal{F}$.

Для доведення досить зауважити, що рівність $p(\omega, C) = 1/2\, p(\omega, B)$ для майже всіх $\omega \in \Omega$ еквівалентна до рівності

$$\int\limits_A p(\omega, C)\, d\mu(\omega) = \frac{1}{2} \int\limits_A p(\omega, B)\, d\mu(\omega)$$

для всіх $A \in \mathcal{F}$.

Наступна конструкція дає канонічний приклад строго вузької σ-підалгебри.

Приклад 3.3. *Нехай* $\Omega = [0,1]^2$, Σ *– борелівська* σ*-алгебра підмножин* Ω, $\mu = \lambda \times \lambda$ *– міра Лебеґа на* Ω, $\mathcal{F} = \big\{A \times [0,1] :\ A \in \mathcal{B}\big\}$, *де* $\mathcal{B}$ *– борелівська* σ*-алгебра на* $[0,1]$.

Для довільної множини $B \in \Sigma$ і довільного $\omega = (x_0, y_0) \in \Omega$ покладемо $B_\omega = \big\{y \in [0,1] :\ (x_0, y) \in B\big\}$. Зауважимо, що $B_\omega \in \mathcal{B}$ для кожного $\omega \in \Omega$, оскільки множина $\tilde{B}_\omega = \big\{(x_0, y) :\ y \in [0,1]\big\}$ є перетином двох борелівських множин на Ω і є, очевидно, гомеоморфною до B_ω. Згідно з теоремою Фубіні, для довільних $A \times [0,1] \in \mathcal{F}$

$$\mu(A \cap B) = \int\limits_{A \times [0,1]} \lambda(B_\omega)\, d\mu(\omega).$$

Отже, в нашому прикладі умовна міра така: $p(\omega, B) = \lambda(B_\omega)$. В роботі [5] при доведенні строгої вузькості оператора умовного математичного сподівання в просторі $L_p[0,1]^2$ відносно $\mathcal{F}$, який дорівнює інтегруванню по другій змінній, фактично було доведення виконання умови (3.1).

4 Характеризація вузьких σ-підалгебр

Мета цього пункту – доведення наступної теореми.

Теорема 4.1. *Нехай* μ *– ймовірнісна міра,* $\mathcal{F}$ *та* Σ *є повними відносно міри* μ, Σ *– зліченнопороджена. Наступні твердження еквівалентні:*
а) $\mathcal{F}$ *– вузька,*
б) $\mathcal{F}$ *– строго вузька,*
в) існує випадкова величина ξ *на ймовірнісному просторі* (Ω, Σ, μ), *яка не залежить від* $\mathcal{F}$ *і має невироджений ґауссівський розподіл.*

Доведення. Основним інструментом доведення є регулярна версія сім'ї умовних мір, що відповідають μ відносно σ-підалгебри $\mathcal{F}$ [1, с. 447]. А саме, при умовах теореми існує функція

$$p :\ \Omega \times \Sigma \to [0;1]$$

така, що

1) при кожному фіксованому $\omega \in \Omega$ функція $p(\omega, \cdot)$ є ймовірнісною мірою на Σ,

2) при кожному фіксованому $\Delta \in \Sigma$ функція $p(\,\cdot, \Delta)$ вимірна відносно $\mathcal{F}$,

3) для довільного $A \in \Sigma$

$$\mu(A) = \int_{\Omega} p(\omega, A)\,\mu(d\omega).$$

Зауважимо, що в термінах умовних мір умовне математичне сподівання відносно $\mathcal{F}$ можна записати наступним чином

$$(M^{\mathcal{F}}\varphi)(\omega) = \int_{\Omega} \varphi(\omega')\,p(\omega, d\omega').$$

Доведемо імплікацію а) $\Rightarrow$ б). Нехай $B \in \Sigma^{+}$. Згідно з умовою, для кожного $n \geq 1$ існує множина $C_n \in \Sigma(B)$, така, що для довільного $A \in \mathcal{F}$:

$$\Big|\mu(A \cap C_n) - \frac{1}{2}\,\mu(A \cap B)\Big| < \frac{1}{n}\,. \tag{4.1}$$

Перепишемо (4.1), використовуючи умовні міри p :
$\forall\ A \in \mathcal{F}$:

$$\Big|\int_A p(\omega, C_n)\,\mu(d\omega) - \frac{1}{2}\int_A p(\omega, B)\,\mu(d\omega)\Big| < \frac{1}{n}\,. \tag{4.2}$$

З умови (4.2) випливає, що послідовність $p(\,\cdot, C_n)$ збігається за мірою до $\frac{1}{2}\,p(\,\cdot, B)$. Справді, в протилежному випадку знайдуться такі додатні δ_1, δ_2, що (переходячи, якщо потрібно, до підпослідовності)
$\forall\ n \geq 1$:

$$\mu\Big\{\omega :\ \Big|p(\omega, C_n) - \frac{1}{2}\,p(\omega, B)\Big| > \delta_1\Big\} > \delta_2.$$

Без обмеження загальності можна вважати, що
$\forall\ n \geq 1$:

$$\mu\Big\{\omega :\ p(\omega, C_n) - \frac{1}{2}\,p(\omega, B) > \delta_1\Big\} > \frac{\delta_2}{2}\,.$$

Тоді, беручи за A множину

$$A_n = \Big\{\omega :\ p(\omega, C_n) - \frac{1}{2}\,p(\omega, B) > \delta_1\Big\},$$

маємо

$$\mu(A_n \cap C_n) = \int\limits_{A_n} p(\omega, C_n)\,\mu(d\omega) > \int\limits_{A_n} \Big(\frac{1}{2}\,p(\omega, B) + \delta_1\Big)\mu(d\omega) >$$

$$> \frac{1}{2} \int\limits_{A_n} p\,(\omega, B)\,\mu(d\omega) + \frac{\delta_1\delta_2}{2} = \mu(A_n \cap B) + \frac{\delta_1\delta_2}{2}\,. \tag{4.3}$$

Отримана нерівність суперечить вибору послідовності $\{A_n; n \geq 1\}$. Тепер, не зменшуючи загальності, вважаємо, що

$$p\,(\,\cdot, C_n) \longrightarrow \frac{1}{2}\,p\,(\,\cdot, B),\ n \to \infty \quad (\mathrm{mod}\ \mu) \tag{4.4}$$

і збіжність має місце на множині $\Omega_1 \in \mathcal{F}$ повної міри[2]. Розглядаючи вимірний простір $\big(B, \Sigma(B)\big)$ з мірою $p\,(\omega, \cdot)$ при фіксованому ω, застосуємо до нього теорему Ляпунова, яка стверджує, що має існувати множина $C \in \Sigma(B)$ така, що

$$p\,(\omega, C) = \frac{1}{2}\,p\,(\omega, B). \tag{4.5}$$

Апріорі C залежить від ω. Але [1, с. 454] простір Ω зараз розбивається на класи еквівалентності, які є атомами σ-алгебри $\mathcal{F}$ так, що для довільних $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ з одного атому міри $p(\omega_1, \cdot)$ і $p(\omega_2, \cdot)$ збігаються та зосереджені на цьому ж атомі. Тому співвідношення (4.4) можна переписати так
$\forall\ \omega \in \Omega_B$:

$$p\,(\omega, C_n^\omega) \longrightarrow \frac{1}{2}\,p\,(\omega, B^\omega),\ n \to \infty. \tag{4.6}$$

Тут Ω_B – $\mathcal{F}$ вимірна множина міри одиниця, C_n^ω та B^ω – перетини C_n та B із атомам σ-алгебри $\mathcal{F}$, що містить ω. Процедура утворення множини C^ω із властивістю

$$p\,(\omega, C^\omega) = \frac{1}{2}\,p\,(\omega, B^\omega)$$

з множин $\{C_n^\omega;\ n \geq 1\}$ може бути вибрана так, щоб множина

$$C = \bigcup_{\omega \in \Omega_1} C^\omega$$

належала до Σ. Тоді для C і кожного $A \in \mathcal{F}$ буде використовуватися співвідношення

$$\mu(A \cap C) = \int\limits_{A \cap \Omega_1} p\,(\omega, C^\omega)\,\mu(d\omega) =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{A \cap \Omega_1} p\,(\omega, B^\omega)\,\mu(d\omega) = \frac{1}{2}\,\mu(A \cap B).$$

[2] тобто, $\mu(\Omega \setminus \Omega_1) = 0$

Таким чином імплікацію а) $\Rightarrow$ б) доведено.

Доведемо імплікацію б) $\Rightarrow$ в). Знову розглядаючи умовні міри $p(\cdot,\cdot)$ та використовуючи умову теореми, приходимо до висновку, що для довільної множини $B \in \Sigma^+$ існує така $C \in \Sigma$, що на деякій множині Ω_B повної міри виконується рівність
$\forall\ \omega \in \Omega_B$:

$$p(\omega, C^\omega) = \frac{1}{2} p(\omega, B^\omega). \tag{4.7}$$

Зауважимо, що умова (4.7) є необхідною і достатньою для того, щоб σ-підалгебра $\mathcal{F}$ була строго вузькою. Побудуємо тепер послідовність розбиттів Ω наступним чином. Нехай $A_{0,0} = \Omega$. Виберемо $A_{1,0}$ так, щоб виконувалось (4.7) з $B = A_{0,0}$, $C = A_{1,0}$. Покладемо $A_{1,1} = A_{0,0} \setminus A_{1,0}$. Далі, беручи за B множину $A_{1,0}$, будуємо $A_{2,0}$ та $A_{2,1}$. Потім з множини $A_{1,1}$ будуємо $A_{2,2}$ та $A_{2,3}$. Продовжуючи цей процес до нескінченності, отримуємо послідовність розбиттів Ω $\{A_{n,k}; n \geq 0, k = 0, \ldots, 2^{n-1}\}$. При цьому можна вважати, що існує множина повної міри Ω_1 така, що для довільного $\omega \in \Omega_1$ та будь-яких $n \geq 0, k = 0, \ldots, 2^{n-1}$ маємо

$$p(\omega, A^\omega_{n,k}) = \frac{1}{2^n}, \tag{4.8}$$

$$A^\omega_{n+1,2k} \cup A^\omega_{n+1,2k+1} = A^\omega_{n,k}.$$

Нехай тепер $t \in (0; 1)$ фіксовано. Розглянемо його двійковий розклад

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n}.$$

Побудуємо множину $\Delta_t \in \Sigma$ наступним чином:

$$\Delta_t = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_{nk_n})^{r_n}, \tag{4.9}$$

де $(A_{n,k_n})^{r_n}$ дорівнює або $\emptyset$ або A_{n,k_n} в залежності від того, дорівнює ε_n нулю чи одиниці, а номер k_n обрано найменшим з таких k, що $A_{n,k}$ не лежить в об'єднанні попередніх множин з (4.9). Тоді

$$\mu(\Delta_t) = t,$$

а також Δ_t не залежить від $\mathcal{F}$. Останнє випливає з (4.8). Окрім того, згідно з побудовою, $\Delta_{t_1} \subseteq \Delta_{t_2}$ для $t_1 < t_2$ Тепер стандартна ґауссівська величина, що не залежить від $\mathcal{F}$, будується з множин $\Delta_t, t \in (0; 1)$ звичайним чином. Імплікація б) $\Rightarrow$ в) доведена. Для завершення доведення теореми залишилось довести імплікацію в) $\Rightarrow$ б). Нехай ξ – ґауссівська величина, що має невироджений розподіл, та незалежить від $\mathcal{F}$. Тоді, розглядаючи множини

$$\Delta_t = \{\xi < a_t\}$$

такі, що

$$\mu(\Delta_t) = t$$

для $t \in (0;1)$, побудуємо розбиття $\{A_{n,k}\}$ з властивістю (4.8). Тепер для довільної множини $B \in \Sigma$ та довільних n, k функція $\omega \mapsto p\,(\omega, A^{\omega}_{nk} \cap B^{\omega})$ буде $\mathcal{F}$-вимірною. За рахунок цього множину C можна побудувати зараз як

$$C = \bigcap_{\omega \in \Omega_1} C^{\omega},$$

де

$$C^{\omega} = \Big(\bigcup A^{\omega}_{n_\omega k_\omega}\Big) \cap B^{\omega},$$

причому нескінченне об'єднання будується так, що

$$p\,(\omega, \bigcap_{n=1}^{N} A^{\omega}_{n_\omega k_\omega} \cap B^{\omega}) \nearrow \frac{1}{2}\,p\,(\omega, B^{\omega}),\ N \to \infty.$$

Тоді множина C буде задовольняти умову (4.5). Таким чином, імплікацію в) $\Rightarrow$ б) доведено.

Наслідок 4.2. . *Нехай $\xi(t), t \geq 0$ – дифузійний процес в скінченновимірному просторі з невиродженою дифузією. Тоді для кожного $t > 0$ σ-алгебра $\mathcal{F}_t = \sigma(\xi(s), s \leq t)$ є вузькою (строго вузькою).*

Комбінуючи твердження 2.2 і теорему 4.1, одержуємо наступний основний результат.

Наслідок 4.3. *Нехай (Ω, Σ, μ) – простір зі скінченною зліченно-адитивною безатомною мірою і $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$ – деяка σ-підалгебра. Нехай E – простір Кете на (Ω, Σ, μ), в якому оператор $M^{\mathcal{F}}$ умовного математичного сподівання діє і є обмеженим. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(i) оператор $M^{\mathcal{F}}$ є вузьким;

(ii) оператор $M^{\mathcal{F}}$ є строго вузьким;

(iii) існує випадкова величина ξ на (Ω, Σ, μ), яка не залежить від $\mathcal{F}$ і має невироджений ґауссівський розподіл.

[1] Богачев В. И. Основы теории меры. Том 2. – Москва–Ижевск: НИЦ Регулярная и стохастическая динамика, 2006. – 680 с.

[2] Flores J., Ruiz C. Domination by positive narrow operators // Positivity. – 2003. – 7. – P. 303–321.

[3] Кадец В. М., Попов М. М. Свойство Даугавета для узких операторов в богатых подпространствах пространств $C[0,1]$ и $L_1[0,1]$ // Алгебра и анализ. – 1996. – 8, N4. – С. 43–62.

[4] Kadets V. M., Shvidkoy R. V., Werner D. Narrow operators and rich subspaces of Banach spaces with the Daugavet property // Stud. Math. – 2001. – 147, N 3. – P. 269–298.

[5] Krasikova I. V. A note on narrow operators in L_∞ // Мат. Студії (прийнято до друку).

[6] Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces. II. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer–Verlag, 1979. – X, 243 p.

[7] Maslyuchenko O. V., Mykhaylyuk V. V., Popov M. M. A lattice approach to narrow operators // Positivity. (to appear).

[8] Plichko A. M., Popov M. M. Symmetric function spaces on atomless probability spaces // Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) - 1990. - 306. - P. 1–85.

ON NAROWNESS OF CONDITIONAL EXPECTATION OPERATORS IN SPACES OF MEASURABLE FUNCTION

Andriy DOROGOVTSEV [1], *Mykhaylo POPOV* [2]

[1] Institute of Mathematics of NASU, Kyiv
[2] Yuriy Fed'kovych Chernivtsi National University

Let (Ω, Σ, μ) be a measure space with a finite countably-additive nonatomic measure. In this note we give a characterization of those sub-σ-fields $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$ with respect to which the conditional expectation operator $M^{\mathcal{F}}$ is narrow in any Köthe function space E on (Ω, Σ, μ) whenever $M^{\mathcal{F}}$ is correctly defined and bounded on E. The main result asserts that the operator $M^{\mathcal{F}}$ is narrow (strictly narrow) if and only if there is a random variable ξ on (Ω, Σ, μ), which is independent of $\mathcal{F}$ and has a nontrivial Gaussian distribution.