МЕТОД АСОЦІЙОВАНИХ МАРКОВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ КОНКУРЕНЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ РИНКУ АКЦІЙ ІЗ БІ-ВАРІАНТНОЮ ФУНКЦІЄЮ КОРИСНОСТІ В СЕРЕДОВИЩІ БАНКІВСЬКОГО ПОРТФОЛІО

©*2008 р. Богдан Ю. КИШАКЕВИЧ*[1],
Анатолій К. ПРИКАРПАТСЬКИЙ[1,2], Іван П. ТВЕРДОХЛІБ[3]

[1] Педагогічний Університет ім. Івана Франка,
м. Дрогобич, Україна
[2] Академія гірництва та металургії, факультет прикладної математики, м. Краків, Польща
[3]Львівський Національний Універсистет ім. Івана Франка,
Економічний факультет
м. Львів, 79000, Україна

Редакція отримала статтю 13 червня 2008 р.

Досліджується конкуренційна модель ринку акцій в середовищі банківського портфелю з бі-варіативною функцією цінності в умовах цейтнот-біржової поведінки клієнтів-покупців. Запропоновано метод асоційованих марковських процесів для знаходження оптимальної стратегії вибору найбільш цінного пакету акцій. При певних умовах на так званий банківський "промоційний" параметр щодо параметра "штрафу" за пропущену трансакцію купівлі пакету акцій при асимптотично значнім об"ємі пакетів в портфоліо отримано універсальне трансцендентне рівняння, що визначає найбільш оптимальну стратегію вибору найбільш цінного для клієнта-покупця пакета акцій з бі-варіативною функцією корисності при наявності конкуренції з боку інших клієнтів.

УДК 519.21+519.6, MSC 2000: 60J20

Вступ

При аналізі оптимальних стратегій конкуренційної портфельної моделі ринку акцій в банківському середовищі в праці [4] була досліджена цейтнот-біржова проблема вибору для двох клієнтів-покупців пакетів акцій, параметризованих тільки однією функцією корисності. Окрім цього припускалось, що клієнти не мають фінансових обмежень і володіють достатнім капіталом для придбання будь-якого пакета акцій. Якщо залишити останнє припущення незмінним і розглянути аналогічну проблему вибору за умови існування двох або більшого числа функцій корисності пакетів акцій, розподілених незалежно в межах портфелю, то її аналіз представляє значний інтерес для моделювання оптимальної поведінки клієнтів-покупців, а тим самим, і для забезпечення стабільності фінансово-економічних процесів.

В пропонованім дослідженні нами далі розвивається метод асоційованих марковських процесів для побудови оптимальної стратегії поведінки двох клієнтів-покупців описаної вище конкуренційної портфельної моделі із *a пріорі* заданими і розподіленими незалежно двома функціями корисності пакетів [1, 9, 10] акцій в банківському середовищі.

2 Попередні відомості: елементи теорії оптимальних зупинок

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ є деяким ймовірнісним простором [2, 3, 6, 7, 8] з імовірнісною мірою P на σ-алгебрі $\mathcal{F}$ підмножин з Ω, а $x_t : \Omega \to \mathcal{H}$ є деякий марковський процес для $t \in \mathbb{Z}_+$ або $t \in \mathbb{R}_+$. Для простоти далі вважатимемо, що $\mathcal{H}$ є деяким дискретним або скінченновимірним топологічним простором. Припустимо, що на просторі $\mathcal{H}$ задана деякі дві функції: $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, що інтерпретується як дохід у випадку зупинки процесу і $c : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, що інтерпретується як плата (або "fee") за чергове спостереження над процесом. Так, якщо агент спостерігає за траєкторією процесу $x_t : \Omega \to \mathcal{H}$ в моменти часу $t = \overline{0, n}$, і при $\tau = n \in \mathbb{Z}_+$ вирішує припинити спостереження, то його дохід буде, очевидно, рівний такому виразу:

$$f(x_n) - \sum_{j=0}^{n-1} c(x_j). \tag{2.1}$$

Оскільки величина (2.1) є випадковою, то необхідно розглянути її математичне сподівання і шукати такий момент часу $\tau := \tau^* \in \mathbb{Z}_+$, при якім буде виконуватись рівність

$$\tau^* = \arg\sup_{\tau}\{f(x_\tau) - \sum_{j=0}^{\tau-1} c(x_j)\}. \qquad (2.2)$$

Опишемо поняття "момента зупинки"$\tau \in \mathbb{Z}_+$, який є "стратегією" [1, 7, 10] агента-спостерігача. З цією метою на ймовірніснім просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ визначимо неспадну послідовність σ-алгебр $\mathcal{F}_n := \sigma\{x_1, x_2, ..., x_n\}, n \in \mathbb{Z}_+$, де в ролі $\mathcal{F}_n$ виступає найменша σ-алгебра, яка містить всеможливі множини вигляду $\{\omega : x_i(\omega) \in B, i \in \overline{0,n}\}$, де $B \subseteq \mathcal{H}$ є довільна борелівська множина.

Означення 2.1. *Марковським моментом називається випадкова величина $\tau = \tau(\omega)$, чиї значення лежать в множині $\mathbb{Z}_+$ і така, що для будь-якого $n \in \mathbb{Z}_+$*

$$\{\omega : \tau(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n. \qquad (2.3)$$

Ця умова означає, що рішення про закінчення спостережень в момент часу $n \in \mathbb{Z}_+$ ґрунтується лише на результатах спостережень $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ марковського процесу до моменту $n \in \mathbb{Z}_+$ включно.

Означення 2.2. *Марковський момент $\tau \in \mathbb{Z}_+$, для якого виконується умова $P\{\tau < \infty\} = 1$, або коли подія $\{\omega \in \Omega : t < \tau(\omega)\} \subset \mathcal{F}_t$ для всіх $t \in \mathbb{Z}_+$, називається моментом зупинки.*

Означення 2.3. *Величина*

$$V(x_0) := sup_\tau E_{x_0}\{f(x_0) - \sum_{j=0}^{\tau-1} c(x_j)\} \qquad (2.4)$$

називається "ціною" *задачі оптимальної зупинки.*

Розглянемо ситуацію, коли функція оплати $c : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ за спостереження висліду марковського процесу $x_t : \Omega \to \mathcal{H}$ із матрицею переходів $\mathcal{P} := \{p_{ij} : i, j = \overline{0,N}\}$ є нульовою, де ми врахували, що $card\ \ \mathcal{H} = N + 1$. Для зручності функцію $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ будемо вважати невідємною на $\mathcal{H}$. Введемо також для зручності аналізу величини (2.4) так званий коефіцієнт "переоцінки"$\alpha \in (0, 1]$, який враховує зміну вартості спостереження в часі. Тоді, якщо агент-спостерігач використовує в якості своєї стратегії марковський момент $\tau \in \mathbb{Z}_+$, його ціна оптимальної зупинки буде

$$V(x_0) := sup_\tau E_{x_0}\{\alpha^\tau f(x_\tau)\}, \qquad (2.5)$$

оскільки функція $c = 0$. Визначимо тепер для $i = \overline{0, N}$ операцію

$$(\mathcal{P}f)_i := \sum_{j=0}^{N} p_{ij} f(j), \tag{2.6}$$

де за визначенням, $f(j) := f(x_{n_j} = j)$ для деяких $n_j \in \mathbb{Z}_+, j \in \mathcal{H} \simeq \{0, 1, ..., N\}$. Дамо ще такі корисні для подальшого означення.

Означення 2.4. *Функція $g : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$ називаєтьcя* ексцесивною, *якщо*

$$g(x) \geq \alpha(\mathcal{P}g)(x) \tag{2.7}$$

для всіх $x \in \mathcal{H}$.

Означення 2.5. *Ексцесивна функція $g : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$ називаєтьcя* ексцесивною мажорантою *функції $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$, якщо*

$$g(x) \geq f(x) \tag{2.8}$$

для всіх $x \in \mathcal{H}$.

Має місце [1, 10] наступна лема.

Лема 2.6. *Якщо $g : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$ є ексцесивною функцією і $\tau \in \mathbb{Z}_+$ є марковським моментом, то для $\alpha \in (0, 1]$*

$$g(x) \geq \alpha(\mathcal{P}g)(x) \tag{2.9}$$

для всіх $x \in \mathcal{H}$.

Доведення. Нехай $h := g - \alpha\mathcal{P}g$ і $\alpha \in (0, 1)$. Тоді, очевидно, $h(x) \geq 0$ для всіх $x \in \mathcal{H}$, оскільки з умови (2.7) випливає, що

$$g(x) \geq \alpha(\mathcal{P}g)(x). \tag{2.10}$$

Записуючи тепер вираз $h := g - \alpha\mathcal{P}g$ у вигляді

$$g := h + \alpha\mathcal{P}g, \tag{2.11}$$

легко отримуємо, що

$$g := h + \alpha\mathcal{P}h + \alpha^2\mathcal{P}^2 h + ... + \alpha^n\mathcal{P}^n h + ..., \tag{2.12}$$

$n \in \mathbb{Z}_+$, причому ряд (2.12) є збіжним за умови $\alpha \in (0,1)$. Окрім того, оскільки математичне сподівання

$$E_i\{h(x_n)\} = \sum_{j=0}^{N} \bar{p}_{ij}^{(n)} h(j), \tag{2.13}$$

де $\mathcal{P}^n := \{\bar{p}_{ij}^{(n)} : i,j = \overline{0,N}\}$, то вираз (2.11) можна еквівалентно переписати як

$$g(x) = E_x\{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n h(x_n)\}. \tag{2.14}$$

Тепер можна обчислити математичне сподівання

$$E_x\{\alpha^\tau g(x_\tau)\} = E_x\{\alpha^\tau E_{x_\tau}\{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n h(x_n)\}\} = E_x\{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{\tau+n} h(x_{\tau+n})\}. \tag{2.15}$$

Порівнюючи вираз (2.15) з (2.14), робимо висновок, що

$$g(x) \geq \alpha(\mathcal{P}g)(x) \tag{2.16}$$

для всіх $x \in \mathcal{H}$ і $\alpha \in (0,1)$. Переходячи до границі $\alpha \to 1$ в (2.16), отримуємо, що нерівність (2.9) вірна і для $\alpha = 1$, що й доводить лему.

Наступне твердження [10] є для подальшого аналізу визначальним.

Теорема 2.7. *Функція ціни (2.5) є найменшою ексцесивною мажорантою функції* $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$.

Доведення. Зауважимо, що з означення (2.5) одразу випливає, що ціна $V : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$ є ексцесивною мажорантою функції $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$. Справді, оскільки $V(x) = \sup_\tau E_x\{\alpha^\tau f(x_\tau)\}$, то для будь-якого $\epsilon > 0$ існує марковський момент $\tau_\epsilon \in \mathbb{Z}_+$ такий, що

$$E_x\{\alpha^{\tau_\epsilon} f(x_{\tau_\epsilon}\} > V(x) - \epsilon, \tag{2.17}$$

причому значення $x \in \mathcal{H}$ фіксоване. Оскільки $card\, \mathcal{H} = N+1$ є скінченна величина, то нерівність (2.17) матиме місце і для всіх $x \in \mathcal{H}$. Обчислимо тепер математичне сподівання

$$E_x\{\alpha^{\tau'} f(\tau')\} = \sum_{j=1}^{N} p_{x,j} E_j\{\alpha^{1+\tau_\epsilon} f(x_\tau)\} \geq \alpha \sum_{j=1}^{N} p_{x,j} V(j) - \alpha\epsilon, \tag{2.18}$$

де $\tau' := 1 + \tau_\epsilon \in \mathbb{Z}_+$. З нерівності (2.18) випливає, що

$$V(x) \geq E_x\{\alpha^{\tau'} f(\tau')\} \geq \alpha(\mathcal{P}V)(x) - \alpha\epsilon \tag{2.19}$$

для будь-якого $\epsilon > 0$. Переходячи в (2.19) до границі при $\epsilon \to 0$, отримуємо, що $V(x) \geq \alpha(\mathcal{P}V)(x)$ для всіх $x \in \mathcal{H}$, тобто ексцесивність функції ціни $V : \mathcal{H} \to \mathbb{Z}_+$.

Тепер на основі леми 1.6 для будь-якого марковського момента $\tau \in \mathbb{Z}_+$ маємо такі нерівності:

$$g(x) \geq E_x\{\alpha^\tau g(x_\tau)\} \geq E_x\{\alpha^\tau f(x_\tau)\} \tag{2.20}$$

для всіх $x \in \mathcal{H}$, Застосовуючи до (2.20) операцію *supremum* відносно $\tau \in \mathbb{Z}_+$, отримуємо, що

$$g(x) \geq \sup_\tau E_x\{\alpha^\tau f(x_\tau)\} = V(x)$$

для всіх $x \in \mathcal{H}$, що й доводить теорему.

З метою практичного обчислення ціни вибору $V : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$ використовується критерій, який сформулюємо як наступну теорему.

Теорема 2.8. *Ціна оптимального вибору $V : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$ є найменшим розв"язком рівняння*

$$V(x) = \max\{f(x), \alpha(\mathcal{P}V)(x)\} \tag{2.21}$$

для всіх $x \in \mathcal{H}$ і $\alpha \in (0, 1]$.

Доведення. Виходячи з виразу (2.21), визначимо для $x \in \mathcal{H}$ оператор і функцію $y : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$

$$(Q_\alpha y)(x) := \max\{f(x), \alpha(\mathcal{P}y)(x)\}. \tag{2.22}$$

Легко зауважити, що мають місце нерівності

$$y(x) \leq (Q_\alpha y)(x) \leq ... \leq (Q_\alpha^n y)(x) \tag{2.23}$$

для всіх $x \in \mathcal{H}$. Розглянемо границю

$$\tilde{V}(x) := \lim_{n\to\infty} (Q_\alpha^n f)(x) \tag{2.24}$$

і покажемо, що функція (2.24) задовольняє рівняння (2.21). Справді, так як

$$(Q_\alpha^n f)(x) = \max\{f(x), \alpha(\mathcal{P}Q_\alpha^{n-1} f(x)\} \tag{2.25}$$

для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$, то переходячи до границі при $n \to \infty$ отримуємо результат (2.21). Та оскільки кожний розв'язок рівняння (2.21) є ексцесивною мажорантою, то і розв'язок (2.24) є такою ж функцією. Залишилось лише показати, що вона є найменшою ексцесивною мінорантою функції $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$. Справді, на основі нерівності (2.21) та визначення операції Q, легко отримати, що для всіх $x \in \mathcal{H}$

$$\lim_{n\to\infty} (Q^n_\alpha g)(x) = g(x). \tag{2.26}$$

Оскільки $g(x) \geq f(x)$ для $x \in \mathcal{H}$, то також $(Q^n_\alpha g)(x) \geq (Q^n_\alpha f)(x)$ для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$. Переходячи в останній нерівності до границі при $n \to \infty$, отримуємо, що

$$g(x) \geq \lim_{n\to\infty} (Q^n_\alpha f)(x) = \tilde{V}(x) \tag{2.27}$$

для всіх $x \in \mathcal{H}$, тобто розв'язок (2.24) є найменшою ексцесивною мінорантою функції $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$. Отже, $V(x) = \tilde{V}(x), x \in \mathcal{H}$, що доводить теорему.

Ґрунтуючись тепер на властивостях розв'язку (2.24) задачі (2.21), встановлюється [7, 8, 10] справедливість такого твердження.

Теорема 2.9. *Марковський момент $\tau^* \in \mathcal{H}$, визначений умовою (2.2) як момент першого попадання процесу $x_t : \Omega \to \mathcal{H}, t \in \mathbb{Z}_+$, в множину $\Gamma_+ := \{x \in \mathcal{H} : V(x) = f(x)\}$, є оптимальним. Зокрема, $\lim_{n\to\infty} P_x\{\tau^* > n\} = 0$, а також $E_x\{\alpha^{\tau_n} V(x_{\tau_n})\} = V(x)$, де $\tau_n := \min(\tau^*, n), n \in \mathbb{Z}_+$, для всіх $x \in \mathcal{H}$.*

Розглянемо тепер випадок, коли плата за $c : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$ є ненульовою. Тоді функція ціни вибору має вигляд

$$V_\alpha(x) := \sup_\tau E_x\{\alpha^\tau f(x_\tau) - \sum_{i=0}^{\tau-1} \alpha^i c(x_i)\}, \tag{2.28}$$

де $x \in \mathcal{H}$ і $\alpha \in (0, 1]$. За аналогією з означенням 1.4 даємо наступне [10] означення.

Означення 2.10. *Функція $g : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$ називається ексцесивною, якщо*

$$g(x) \geq \alpha(\mathcal{P}g)(x) - c(x) \tag{2.29}$$

для всіх $x \in \mathcal{H}$

Покладемо, за означенням,

$$f_\alpha(x) := E_x\{\sum_{i=o}^{\infty} \alpha^i c(x_i)\}, \tag{2.30}$$

де $\alpha \in (0,1)$ і $x \in \mathcal{H}$. Тоді легко зауважити, що ціна вибору (2.28) має таке зображення:

$$V_\alpha(x) := \sup_\tau E_x\{\alpha^\tau [f(x_\tau) + f_\alpha(x_\tau)]\} - f_\alpha(x) \tag{2.31}$$

для всіх $x \in \mathcal{H}$. А це означає, що задача оптимальної зупинки з ненульовою платою $c : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$ зводиться до аналогічної задачі з нульовою платою за спостереження, а саме до задачі

$$\bar{V}_\alpha(x) = \sup_\tau E_x\{\alpha^\tau [f(x) + f_\alpha(x_\tau)]\}, \tag{2.32}$$

$x \in \mathcal{H}$, яка розв"язує рівняння

$$\bar{V}_\alpha(x) = \max\{f(x) + f_\alpha(x), \alpha(\mathcal{P}\bar{V}_\alpha)(x)\}. \tag{2.33}$$

А відповідним оптимальним марківським моментом є момент $\tau^* \in \mathcal{H}_+$ першого спостереження в множину $\Gamma_+ := \{x \in \mathcal{H} : \bar{V}_\alpha(x) = f(x) + f_\alpha(x)\}$. Причому, очевидно, $\Gamma_+ = \{x \in \mathcal{H} : V_\alpha(x) = f(x)\}$. Результат, сформульований вище, має місце лише при $\alpha \in (0,1)$. У випадку ж, коли $\alpha = 1$ функція $f_\alpha : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$ може бути не визначеною, через що постає необхідність пошуку іншого, більш адекватного методу знаходження розв"язку задачі (2.28).

Нехай тепер $\alpha = 1$ і розглянемо степені $\mathcal{P}^m$ матриці перехідних ймовірностей $\mathcal{P}$ при $m \to \infty$. Тоді за ергодичною теоремою А.А. Маркова [1, 6] має місце наступна асимптотична рівність: $\mathcal{P}^m = Z + h^m ||R_m||$, де $|h| < 1$ і для всіх $m \in \mathbb{Z}_+$ величина $\sup_{m\in\mathbb{Z}_+} ||R_m|| < \bar{r}$, а матриця $Z \in Hom(\mathbb{R}^{N+1})$ складається рівно з $N+1 \in \mathbb{Z}_+$ однакових вектор-стрічок $q^\intercal \in \mathbb{R}_+^{N+1}$ граничних ймовірностей. Таким чином, ціна вибору (2.28) при $\alpha = 1$ і стратегії вибору $\tau = n \in \mathbb{Z}_+$ становить

$$E_x\{f(x_\tau) - \sum_{i=0}^{\tau-1} c(x_i)\} = E_x\{f(x_n - c(x) - \sum_{j=1}^{N} p - xjc_j - ... \tag{2.34}$$
$$- \sum_{j=1}^{N} p_{xj}^{(n-1)} c_j\} = E_x\{f(x_n)\} - n\langle q, c\rangle - \sum_{j=1}^{N} r_{xj} c_j,$$

де через $\langle . \, , \, . \rangle$ ми позначили звичайний скалярний добуток в просторі $\mathbb{R}^{N+1}$. Як наслідок виразу (2.34) бачимо, що при $\langle q, c \rangle < 0$ ціну вибору можна зробити як завгодно великою, не зупиняючи процес спостереження. Якщо ж $\langle q, c \rangle \geq 0$, то ситуація є відмінною від попередньої, і можна показати [9], що величина (2.30) для $\alpha \in (\alpha_0, 1)$ і деякого $\alpha_0 \in (0,1)$ є обмеженою і додатною. А згідно з монотонністю дії оператора (2.22) виду $Q_{\beta_1}(x) \leq Q_{\beta_2}(x)$ для всіх $x \in \mathcal{H}$ і $\beta_1 \leq \beta_2 \in (0,1)$ існує послідовність $\{\alpha_n \in (0,1) : n \in \mathbb{Z}_+\}$ така, що $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1$ і $\lim_{n\to\infty} V_{\alpha_n}(x^*) = f(x^*)$ для деякого стану $x^* \in \mathcal{H}$. За умови $card\ \mathcal{H} = N+1 < \infty$ існує також границя $\lim_{n\to\infty} V_{\alpha_n}(x) = f(x)$ для кожного $x \in \mathcal{H}$. Таким чином, множина

$$\Gamma_+ := \{x \in \mathcal{H} : V(x) = f(x)\} \tag{2.35}$$

є непорожньою за необхідної умови $\langle q, c \rangle \geq 0$. Останнє означає оптимальність стратегії $\tau^* \in \mathcal{H}$ першого попадання спостережень агента в множину Γ_+.

Щоб тепер сформулювати кінцеве твердження для випадку $\alpha = 1$ розіб"ємо попередньо фазовий простір $\mathcal{H}$ станів марковського процесу $x_t : \Omega \to \mathcal{H}, t \in \mathbb{Z}_+$, на підмножину несуттєвих станів $\mathcal{H}_0$ та класи $\{\mathcal{H}_i : i = \overline{1, m_N}\}$ суттєвих станів з нетривіальними перехідними ймовірностями. Тоді кожному суттєвому класу $\mathcal{H}_i \subset \mathcal{H}, i = \overline{1, m_N}$, відповідають вектор граничних ймовірностей $q_i \in \mathbb{R}^{N+1}$ та вектор $c_i \in \mathbb{R}^{N+1}$, для котрих має місце таке твердження.

Твердження 1.11 *Якщо для деякого* $i \in \{\overline{1, m_N}\}$ *величина* $\langle q_i, c_i \rangle \geq 0$, *то оптимальною стратегією буде момент* $\tau^* \in \mathcal{H}$ *першого попадання в множину* Γ_+ *виду (2.35). Несуттєві стани* $x \in \mathcal{H}_0$, *з яких досягається хоч би одна множина* $\mathcal{H}_l \subset \mathcal{H}$, *для котрої* $\langle q_l, c_l \rangle < 0$, *належать фактично підмножині* $\mathcal{H}_0 \backslash \Gamma_+$.

В наступному розділі ми розглянемо проблему оптимального вибору конкуренційної портфельної моделі ринку акцій, чия функція ціни визначається конструктивним методом разом із асоційованим марковським процесом. Зазначимо тут, що подібні задачі розглядались також в праці [5], де використовувся метод марковських процесів прийняття рішень.

3 Математична модель конкуренційної версії ринку акцій з бі-варіативною функцією корисності

За основу візьмемо математичну модель банківського портфелю акцій і процесу вибору клієнтом-покупцем пакету акцій, описану в праці [4]. Вважатимемо, що є два клієнти-покупці, конкуруючих між собою під час процесу вибору найбільш цінного пакета акцій із скінченним числом $N \in \mathbb{Z}_+$ елементів. Всі пакети акцій $A_i, i = \overline{1, N}$, є *apriori* пронумеровані в такий спосіб, що

$$W_1(A_i) < W_1(A_2) < ... < W_1(A_N),$$

$$W_2(A_{\sigma(1)}) < W_2(A_{\sigma(2)}) < ... < W_2(A_{\sigma(N)}), \tag{3.1}$$

де $\{W_i(A_j) \in [0,1], j = \overline{1, N}\}, \quad i = \overline{1, 2}$, є відповідні набори величин корисності пакетів акцій, значення котрих розподілені незалежно в межах заданого портфелю, тобто перестановка $\sigma \in S_N$ впорядкованого набору чисел $\{1, 2, ..., N\}$ є цілком випадковою. Ймовірнісний простір Ω складається із всеможливих пар перестановок $\{\omega_1, ..., \omega_N\} \times \{\sigma(\omega_1), ..., \sigma(\omega_N)\}$ набору чисел $\{1, 2, ..., N\}$, причому вважається, що всі вони є рівноймовірними. Таким чином, результат вибору за -им переглядом клієнтами-покупцями пакета акцій $A_n, n = \overline{1, N}$, будемо позначати $\Omega_n^{(s)} := (X_n^{(s)}(\omega), (Y_n^{(s)}(\omega))) \in \{1, 2, ..., N^{(x)} := N\} \times \{\sigma(1), \sigma(2), .., \sigma(N^{(y)} := N\}, s = \overline{1, 2}$, а через $\tau_s(\omega) \in \mathcal{H} := \{0, 1, 2, .., N\}, s = \overline{1, 2}$, позначатимемо моменти зупинки марковського процесу вибору найбажанішого пакета акцій клієнтами-покупцями, при котрих будуть найбільші значення математичних сподівань відповідних функцій ціни вибору. Функцію ціни вибору для першого клієнта-покупця вибираємо у такій формі:

$$\begin{aligned} V_{\tau_1}^{(1)}(\tau_2) \;&=\; c_\alpha[E\{1_{\{\Omega_{\tau_1}^{(1)}=(N^{(x)},N^{(y)}),\Omega_{\tau_2}^{(2)}\neq(N^{(x)},N^{(y)})\vee\Omega_{\tau_1}^{(1)}=} \\ &{}_{(\sigma^{-1}(N^{(x)}),N^{(y)}),\Omega_{\tau_2}^{(2)}\neq(\sigma^{-1}(N^{(x)}),N^{(y)})\}}\} + E\{1_{\{\Omega_{\tau_1}^{(1)}=(N^{(x)},N^{(y)}),} \\ &{}_{\Omega_{\tau_2}^{(2)}=(N^{(x)},N^{(y)}),\tau_1<\tau_2\vee\Omega_{\tau_1}^{(1)}=(\sigma^{-1}(N^{(x)}),N^{(y)}),\Omega_{\tau_2}^{(2)}=(\sigma^{-1}(N^{(x)}),N^{(y)}),\tau_1<\tau_2\}}\}- \\ &-\alpha\textstyle\sum_{k=1}^{\tau_1-1}\frac{k}{N^2}[E\{1_{\{\Omega_{\tau_1}^{(1)}\neq(N^{(x)},N^{(y)}),\Omega_{\tau_2}^{(2)}\neq(N^{(x)},N^{(y)})\vee\Omega_k^{(1)}\neq(\sigma^{-1}(N^{(x)}),N^{(y)}),\Omega_{\tau_2}^{(2)}\neq} \\ &{}_{(\sigma^{-1}(N^{(x)}),N^{(y)})\}}\} + E\{1_{\{\Omega_k^{(1)}\neq(N^{(x)},N^{(y)}),\Omega_{\tau_2}^{(2)}\neq(N^{(x)},N^{(y)}),k<\tau_2\vee\Omega_k^{(1)}\neq} \\ &{}_{(\sigma^{-1}(N^x),N^y),\Omega_{\tau_2}^{(2)}=(\sigma^{-1}(N^{(x)}),N^{(y)}),k<\tau_2\}}\}], \end{aligned} \tag{3.2}$$

де $c_\alpha > 0$ є відповідним банківським "gift" -коефіцієнтом, а $\alpha > 0$ є "fee" -коефіцієнтом "штрафу" за невиконану трансакцію купівлі-продажу пакета акцій. Функція ціни вибору другого клієнта отримується цілком аналогічно. Щоб обчислити, наприклад, величину

$$\tau_1^* := \arg\sup_{\tau_1 \in \mathcal{H}} V_{\tau_1}^{(1)}(\tau_2), \tag{3.3}$$

що характеризує найбільш оптимальну стратегію вибору пакета акцій першим клієнтом-покупцем, необхідно збудувати [1, 4, 10] базисні асоційовані марковської послідовності

$$x_{n+1}^{(s)} := \min\{t > x_n^{(s)} : X_t^{(s)} > \max(X_{t-1}^{(s)}, ..., X_1^{(s)}) \vee (Y_t^{(s)} > \max(Y_{t-1}^{(s)}, ..., Y_1^{(s)})\}, \tag{3.4}$$

де величини $x_n^{(s)} \in \mathcal{H}, n = \overline{1, N}, s = \overline{1, 2}$, означають моменти вибору найбільш цінного пакета акцій відповідними клієнтами-покупцями. Марковські послідовності (3.4) характеризує [1, 9, 10] наступна лема, результат якої отримуємо простими обчисленнями.

Лема 3.1. *Цілочисельні послідовності (3.4) є дискретними ланцюгами Маркова на фазовім просторі $\mathcal{H}$ з перехідними ймовірностями*

$$p_{ij}^{(s)} = \begin{cases} \frac{[2j(j-1)-i]i^2}{j^2(j-1)^2(2i-1)}, \ 1 \le i < j; \quad 0, \quad i \ge j \ge 0; \\ 1, \quad i = 0, \quad j = 1; \quad 0, \quad i = 0, j > 1, \qquad 0; \\ 1 - \sum_{k=i+1}^{N} \frac{[2k(k-1)-i]i^2}{k^2(k-1)^2(2i-1)}, \quad j = 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

для $s = \overline{1, 2}$ та $i, j \in \mathcal{H}$.

Отже, нами сконструйовані дві марковські послідовності (3.4), асоційовані з процесом вибору клієнтами-покупцями найбільш цінного пакета акцій, з допомогою яких можна обчислити величину (3.3), грунтуючись наступним критерієм. А саме, справедлива наступна теорема [9].

Теорема 3.2. *Нехай матриця $\mathcal{P} := \{p_{ij}^{(1)} : i, j \in \mathcal{H}\}$ перехідних ймовірностей є такою, що $p_{ij}^{(1)} = 0$ для всіх $i \in \mathcal{H}_+, j \in \mathcal{H}_-$, де*

$$\mathcal{H}_+ := \{j \in \mathcal{H} : (\mathcal{P}V^{(1)}(\tau_2))_j > V_j^{(1)}(\tau_2)\},$$

$$\mathcal{H}_- := \{j \in \mathcal{H} : (\mathcal{P}V^{(1)}(\tau_2))_j \le V_j^{(1)}(\tau_2)\}. \tag{3.6}$$

Тоді отримана марковська послідовність (3.4) для оптимального вибору найбільш цінного пакету акцій першим клієнтом-покупцем має бути зупинена в момент $\tau_1(l) = l = x^{(1)}_{\hat{\tau}_1(l)} \in \mathcal{H}$, який можна знайти, розв'язавши визначальні нерівності (3.6).

Відповідна функція ціни вибору пакета акцій в (3.6) дається таким виразом:

$$\begin{aligned}
V_n^{(1)}(\tau_2) = c_\alpha[P\{X_n^{(1)} = N^{(x)}, X_{\tau_2}^{(2)} \neq N^{(x)} \vee Y_n^{(1)} = N^{(y)}, Y_{\tau_2}^{(2)} \neq N^{(y)}\}+ \\
+P\{X_n^{(1)} = N^{(x)}, X_{\tau_2}^{(2)} = N^{(x)}, n < \tau_2 \vee Y_n^{(1)} = N^{(y)}, Y^{(2)} \neq N^{(y)}\}+ \\
+P\{X_n^{(1)} = N^{(x)}, X_{\tau_2}^{(2)} \neq N^{(x)} \vee Y_n^{(1)} = N^{(y)}, Y_{\tau_2}^{(2)} = N^{(y)}, n < \tau_2\}+ \\
+P\{X_n^{(1)} = N^{(x)}, X_{\tau_2}^{(2)} = N^{(x)}, n < \tau_2 \vee Y_n^{(1)} = N^{(y)}, Y_{\tau_2}^{(2)} = N^{(y)}, n < \tau_2\}- \\
-\alpha \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{N^2}[P\{X_k^{(1)} \neq N^{(x)}, X_{\tau_2}^{(2)} \neq N^{(x)} \wedge Y_k^{(1)} \neq N^{(y)}, Y_{\tau_2}^{(2)} \neq N^{(y)}, n < \tau_2\}+ \\
+P\{X_k^{(1)} \neq N^{(x)}, X_{\tau_2}^{(2)} \neq N^{(x)} \wedge Y_k^{(1)} \neq N^{(y)}, Y_{\tau_2}^{(2)} = N^{(y)}, k < \tau_2\}+ \\
+P\{X_k^{(1)} \neq N^{(x)}, X_{\tau_2}^{(2)} = N^{(x)}, k < \tau_2 \wedge Y_k^{(1)} \neq N^{(y)}, Y_{\tau_2}^{(2)} \neq N^{(y)}\}+ \\
+P\{X_k^{(1)} \neq N^{(x)}, X_{\tau_2}^{(2)} = N^{(x)}, k < \tau_2 \wedge Y_k^{(1)} \neq N^{(y)}, Y_{\tau_2}^{(2)} = N^{(y)}, k < \tau_2\}],
\end{aligned} \tag{3.7}$$

причому банківський "gift" -параметер $c_\alpha > 0$ вибирається з необхідної умови $V_n^{(1)}(\tau_2) > 0$ для всіх $n = \overline{1, N}$. Таким чином, обчисливши величину функції (3.7) ціни вибору найбільш цінного пакета акцій першим клієнтом-покупцем на основі Теореми 2.2 необхідно дослідити структуру множин $\mathcal{H}_+$ та $\mathcal{H}_-$ стосовно перехідних ймовірностей (3.5), що складає предмет наступного розділу.

4 Метод асоційованих марковських процесів та структурний аналіз моделі

Враховуючи структуру сімей незалежних асоційованих σ-алгебр $\{\mathcal{F}_n^{(s)}, n = \overline{1, \tau_1}\}, s = \overline{1, 2}$, перепишемо вираз (3.7) у такій формі:

$$\begin{aligned}
V_n^{(1)}(\tau_2) = c_\alpha[P\{X_n^{(1)} = N^{(x)}, X_{\tau_2}^{(2)} \neq N^{(x)}\} + P\{Y_n^{(1)} = N^{(y)}, Y_{\tau_2}^{(2)} \neq N^{(y)}\}- \\
-P\{X_n^{(1)} = N^{(x)}, X_{\tau_2}^{(2)} \neq N^{(x)}\}P\{Y_n^{(1)} = N^{(y)}, Y_{\tau_2}^{(2)} \neq N^{(y)}\}+
\end{aligned}$$

$$+P\{X_n^{(1)}=N^{(x)},X_{\tau_2}^{(2)}=N^{(x)},n<\tau_2\}+P\{Y_n^{(1)}=N^{(y)},Y^{(2)}\neq N^{(y)}\}-$$

$$-P\{X_n^{(1)}=N^{(x)},X_{\tau_2}^{(2)}=N^{(x)},n<\tau_2\}P\{Y_n^{(1)}=N^{(y)},Y^{(2)}\neq N^{(y)}\}+$$

$$+P\{X_n^{(1)}=N^{(x)},X_{\tau_2}^{(2)}\neq N^{(x)}\}+P\{Y_n^{(1)}=N^{(y)},Y_{\tau_2}^{(2)}=N^{(y)},n<\tau_2\}-$$

$$-P\{X_n^{(1)}=N^{(x)},X_{\tau_2}^{(2)}\neq N^{(x)}\}P\{Y_n^{(1)}=N^{(y)},Y_{\tau_2}^{(2)}=N^{(y)},n<\tau_2\}+$$

$$+P\{X_n^{(1)}=N^{(x)},X_{\tau_2}^{(2)}=N^{(x)},n<\tau_2\}+P\{Y_n^{(1)}=N^{(y)},Y_{\tau_2}^{(2)}=N^{(y)},n<\tau_2\}-$$

$$-P\{X_n^{(1)}=N^{(x)},X_{\tau_2}^{(2)}=N^{(x)},n<\tau_2\}P\{Y_n^{(1)}=N^{(y)},Y_{\tau_2}^{(2)}=N^{(y)},n<\tau_2\}-$$

$$-\alpha\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{N^2}[P\{X_k^{(1)}\neq N^{(x)},X_{\tau_2}^{(2)}\neq N^{(x)}\}P\{Y_k^{(1)}\neq N^{(y)},Y_{\tau_2}^{(2)}\neq N^{(y)}\}+$$

$$+P\{X_k^{(1)}\neq N^{(x)},X_{\tau_2}^{(2)}\neq N^{(x)}\}P\{Y_k^{(1)}\neq N^{(y)},Y_{\tau_2}^{(2)}=N^{(y)},k<\tau_2\}+$$

$$+P\{X_k^{(1)}\neq N^{(x)},X_{\tau_2}^{(2)}=N^{(x)},k<\tau_2\}P\{Y_k^{(1)}\neq N^{(y)},Y_{\tau_2}^{(2)}\neq N^{(y)}\}+$$

$$+P\{X_k^{(1)}\neq N^{(x)},X_{\tau_2}^{(2)}=N^{(x)},k<\tau_2\}P\{Y_k^{(1)}\neq N^{(y)},Y_{\tau_2}^{(2)}=N^{(y)},k<\tau_2\}]. \tag{4.1}$$

При отриманні (4.1) ми скористались тим, що відповідні висліди обох спостережень значень корисності є розподілені незалежно. Ґрунтуючись тепер на результатах праці [4], можна переписати вираз (4.1) як

$$\begin{aligned}
V_n^{(1)}(\tau_2) &= c_\alpha\{2P\{X_n^{(1)}=N^{(x)}|\mathcal{F}_n^{(1)}\vee\mathcal{F}_n^{(2)}\}[P\{X_{\tau_2}^{(2)}\neq N^{(x)}\}+\\
+P\{X_{\tau_2}^{(2)} &= N^{(x)},n<\tau_2\}]+2P\{Y_n^{(1)}=N^{(y)}|\mathcal{F}_n^{(1)}\vee\mathcal{F}_n^{(2)}\}\times\\
\times[P\{Y_{\tau_2}^{(2)} &\neq N^{(y)}\}+P\{Y_{\tau_2}^{(2)}=N^{(y)},n<\tau_2\}]-\\
-P\{X_n^{(1)} &= N^{(x)}|\mathcal{F}_n^{(1)}\vee\mathcal{F}_n^{(2)}\}P\{Y_n^{(1)}=N^{(y)}|\mathcal{F}_n^{(1)}\vee\mathcal{F}_n^{(2)}\}\times\\
\times[P\{X_{\tau_2}^{(2)} &\neq N^{(x)}\}+P\{X_{\tau_2}^{(2)}=N^{(x)},n<\tau_2\}]\times\\
\times[P\{Y_{\tau_2}^{(2)} &\neq N^{(y)}\}+P\{Y_{\tau_2}^{(2)}=N^{(y)},n<\tau_2\}]\}- \qquad (4.2)\\
-\alpha\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{N^2}P\{X_k^{(1)} &\neq N^{(x)}\}P\{Y_k^{(1)}\neq N^{(y)}\}[P\{X_{\tau_2}^{(2)}\neq N^{(x)})+\\
+P\{X_k^{(1)} &\neq N^{(x)},X_{\tau_2}^{(2)}=N^{(x)},k<\tau_2\}]\times\\
\times[P\{Y_{\tau_2}^{(2)} &\neq N^{(y)}\}+P\{Y_{\tau_2}^{(2)}=N^{(y)},k<\tau_2\}],
\end{aligned}$$

або в еквівалентній формі

$$\begin{aligned}
V_n^{(1)}(\tau_2) &= c_\alpha\{2P\{X_n^{(1)} = N^{(x)}|\mathcal{F}_n^{(1)} \vee \mathcal{F}_n^{(2)}\}[P\{X_{\tau_2}^{(2)} \neq N^{(x)}\} + \\
+P\{X_{\tau_2}^{(2)} &= N^{(x)}, n < \tau_2\}] + 2P\{Y_n^{(1)} = N^{(y)}|\mathcal{F}_n^{(1)} \vee \mathcal{F}_n^{(2)}\} \times \\
\times[P\{Y_{\tau_2}^{(2)} &\neq N^{(y)}\} + P\{Y_{\tau_2}^{(2)} = N^{(y)}, n < \tau_2\}] - \\
-P\{X_n^{(1)} &= N^{(x)}|\mathcal{F}_n^{(1)} \vee \mathcal{F}_n^{(2)}\}P\{Y_n^{(1)} = N^{(y)}|\mathcal{F}_n^{(1)} \vee \mathcal{F}_n^{(2)}\} \times \\
\times[P\{X_{\tau_2}^{(2)} &\neq N^{(x)}\} + P\{X_{\tau_2}^{(2)} = N^{(x)}, n < \tau_2\}] \times \\
\times[P\{Y_{\tau_2}^{(2)} &\neq N^{(y)}\} + P\{Y_{\tau_2}^{(2)} = N^{(y)}, n < \tau_2\}]\} - \qquad (4.3) \\
-\alpha\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{N^2}P\{X_k^{(1)} &\neq N^{(x)}\}P\{Y_k^{(1)} \neq N^{(y)}\}[P\{X_{\tau_2}^{(2)} \neq N^{(x)}) + \\
+P\{X_k^{(1)} &\neq N^{(x)}, X_{\tau_2}^{(2)} = N^{(x)}, k < \tau_2\}] \times \\
\times[P\{Y_{\tau_2}^{(2)} &\neq N^{(y)}\} + P\{Y_{\tau_2}^{(2)} = N^{(y)}, k < \tau_2\}].
\end{aligned}$$

Зауважимо тепер, що для $n = \overline{1, \tau_1}$ умовні ймовірності

$$\begin{aligned}
P\{X_n^{(1)} &= N^{(x)}|\mathcal{F}_n^{(1)} \vee \mathcal{F}_n^{(2)}\} = P\{X_n^{(1)} : X_n^{(1)} > \max(X_{n-1}^{(1)}, ..., X_1^{(1)})\} = \\
&= P\{X_n^{(1)} = N^{(x)}\}/P\{X_n^{(1)} > \max(X_{n-1}^{(1)}, ..., X_1^{(1)})\} = \\
&= \frac{1}{N}/(\frac{(n-1)!}{n!}) = \frac{n}{N}1_{\{X_n^{(1)} > \max(X_{n-1}^{(1)}, ..., X_1^{(1)})\}}, \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

аналогічно,

$$P\{Y_n^{(1)} = N^{(x)}|\mathcal{F}_n^{(1)} \vee \mathcal{F}_n^{(2)}\} = \frac{n}{N}1_{\{X_n^{(1)} > \max(X_{n-1}^{(1)}, ..., X_1^{(1)})\}}. \qquad (4.5)$$

Легко обчислити також, що для кожного $k = \overline{1, n}$ умовні ймовірності

$$P\{X_{\tau_2}^{(2)} \neq N^{(x)}\} + P\{X_{\tau_2}^{(2)} = N^{(x)}, k < \tau_2\} = 1 - P\{X_{\tau_2}^{(2)} = N^{(x)}, \tau_2 \leq k\},$$

$$P\{Y_{\tau_2}^{(2)} \neq N^{(y)}\} + P\{Y_{\tau_2}^{(2)} = N^{(y)}, k < \tau_2\} = 1 - P\{X_{\tau_2}^{(2)} = N^{(x)}, \tau_2 \leq k\}. \qquad (4.6)$$

Таким чином, підставляючи вирази (4.3)-(4.5) в (4.2) для всіх $n = \overline{1, \tau_1}$, отримуємо:

$$V_n^{(1)}(\tau_2) = c_\alpha[\frac{2n}{N}(1 - P\{X_{\tau_2}^{(2)} = N^{(x)}, \tau_2 \leq n\})$$

$$+\frac{2n}{N}(1 - P\{Y_{\tau_2}^{(2)} = N^{(y)}, \tau_2 \leq n\}) - \qquad (4.7)$$

$$-\frac{n^2}{N^2}(1-P\{X^{(2)}_{\tau_2}=N^{(x)},\tau_2\le n\})(1-P\{Y^{(2)}_{\tau_2}=N^{(y)},\tau_2\le n\})]-$$

$$-\frac{\alpha(N-1)^2}{N^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{N^2}(1-P\{X^{(2)}_{\tau_2}=N^{(x)},\tau_2\le k\})(1-P\{Y^{(2)}_{\tau_2}=N^{(y)},\tau_2\le k\}).$$

Щоб обчислити вираз (4.7), необхідно попередньо знайти умовні ймовірності $P\{X^{(2)}_{\tau_2}=N^{(x)},\tau_2\le k\}$ та $P\{Y^{(2)}_{\tau_2}=N^{(y)},\tau\le k\}$ для кожного $k=\overline{1,n}$, ґрунтуючись на базовій марковській послідовності (3.4) узгодженій з перехідними ймовірностями (3.5). Аналогічно до методу праці [4] отримуємо, що ймовірності з пороговою стратегією $\tau_2(l)\hat{}\in\mathcal{H}$.

$$P\{X^{(2)}_{\tau_2}=N^{(x)},\tau_2\le k\}:=P\{X^{(2)}_{\tau_2(l)}=N^{(x)},\tau_2(l)\le k\}=0 \tag{4.8}$$

для $k=\overline{1,l-1}$ при умові оптимального вибору, коли $\tau_1(l)=x^{(1)}_{\hat{\tau}_1(l)}=l$, а $\tau_2:=\tau_2(l)>l\in\mathcal{H}$. Якщо ж $k=\overline{l,N}$, то

$$\begin{aligned}
P\{X^{(2)}_{\tau_2(l)} &= N^{(x)},\tau_2(l)\le k\}=\sum_{j=l}^{k}P\{X^{(2)}_{\tau_2(l)}=N^{(x)},\tau_2(l)\le j\}=\\
&= \sum_{j=l}^{k}P\{X^{(2)}_{\tau_2(l)}=N^{(x)}|\tau_2(l)=j\}P\{\tau_2(l)=j\}=\\
&= \sum_{j=l}^{k}P\{X^{(2)}_{\tau_2(l)}=N^{(x)}|\mathcal{F}^{(1)}_j\vee\mathcal{F}^{(2)}_j\}P\{\tau_2(l)=j\}=\\
&= \sum_{j=l}^{k}P\{X^{(2)}_{j}=N^{(x)}|\mathcal{F}^{(1)}_j\vee\mathcal{F}^{(2)}_j\}P\{\tau_2(l)=j\}=\\
&= \sum_{j=l}^{k}\frac{j}{N}P\{\tau_2(l)=j\},
\end{aligned} \tag{4.9}$$

і аналогічно,

$$P\{Y^{(2)}_{\tau_2(l)}=N^{(y)},\tau_2(l)\le k\}=\sum_{j=l}^{k}\frac{j}{N}P\{\tau_2(l)=j\} \tag{4.10}$$

для $k=\overline{l,N}$. Для обчислення ймовірностей $P\{\tau_2(l)=j\},j\in\mathcal{H}$, зауважимо, що згідно з Теоремою 2.2 у відповідності із пороговою стратегією

$\tau_2(l)\hat{} \in \mathcal{H}$ на основі прямого рівняння Колмогорова із співвідношень

$$P\{x^{(2)}_{\hat{\tau}_2} = j\} = \begin{cases} 1, & j = 1, \\ \sum\limits_{i=1}^{j-1} P\{x^{(2)}_{\hat{\tau}_2} = i\} p^{(1)}_{ij}; & j = \overline{2, l-1}, \\ \sum\limits_{i=1}^{l-1} P\{x^{(2)}_{\hat{\tau}_2} = i\} p^{(1)}_{ij}; & j = \overline{l, N}, \end{cases} \tag{4.11}$$

можна легко отримати з (4.11), що

$$P\{x^{(2)}_{\hat{\tau}_2} = j\} = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{j-1} (\mathcal{P}^k)_{1,j}; & j = \overline{2, l-1}, \\ \sum\limits_{s=1}^{l} \sum\limits_{k=1}^{s-1} (\mathcal{P}^k)_{1,s} p^{(2)}_{s,j}; & j = \overline{l, N}, \end{cases} \tag{4.12}$$

де ми позначили через $\mathcal{P} := \{p^{(2)}_{ij} : i, j = \overline{0, N}\}$ матрицю перехідних ймовірностей (3.5) асоційованого марковського процесу для вибору найбажанішого пакета акцій першим клієнтом-покупцем. Позначивши для зручності величину $P\{\tau_2(l) = j\} := h_j, j = \overline{0, N}$, визначену за допомогою (4.12), оскільки $P\{\tau_2(l) = j\} = 0$ для всіх $j = \overline{1, l-1}$, для функції ціни оптимального вибору (4.7) знаходимо такий вираз:

$$\begin{aligned} V^{(1)}_n &= c_\alpha\Big[\frac{4n}{N}\Big(1 - \sum_{j=l}^{n} \frac{j}{N} h_j\Big) - \frac{n^2}{N^2}\Big(1 - \sum_{j=l}^{n} \frac{j}{N} h_j\Big)^2\Big] - \\ &\quad - \frac{\alpha(N-1)^2}{N^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{N^2}\Big(1 - \sum_{j=l}^{n} \frac{j}{N} h_j\Big)^2 \end{aligned} \tag{4.13}$$

для всіх $n = \overline{1, \tau_1}$. Ґрунтуючись на твердженні Теореми 2.2, визначаємо величину $l \in \mathcal{H}$, яка задовольняє нерівності (3.6), котрі перепишемо в такій зручній для обчислення формі:

$$V^{(1)}_{l-1} < (\mathcal{P}V^{(1)})_{l-1}, (\mathcal{P}V^{(1)})_l \leq V^{(1)}_l. \tag{4.14}$$

Відповідні визначальні нерівністі даються наступними аналітичними виразами:

$$c_\alpha \sum_{k=l}^{N} \tfrac{(l-1)^2[2k(k-1)-1]}{(2l-3)k^2(k-1)^2} \left[\tfrac{4k}{N}(1 - \sum_{j=l}^{k} \tfrac{j}{N} h_j) - \tfrac{k^2}{N^2}(1 - \sum_{j=l}^{k} \tfrac{j}{N} h_j)^2 \right] -$$
$$- \tfrac{\alpha(N-1)^2}{N^2} \sum_{k=l}^{N} \tfrac{(l-1)^2[2k(k-1)-1]}{(2l-3)k^2(k-1)^2} \sum_{s=1}^{k-1} \tfrac{s}{N^2}(1 - \sum_{j=l}^{s} \tfrac{j}{N} h_j)^2 > \tag{4.15}$$
$$> c_\alpha(\tfrac{4(l-1)}{N} - \tfrac{(l-1)^2}{N^2}) - \tfrac{\alpha(N-1)^2}{N^2} \sum_{k=1}^{l-1} \tfrac{k}{N^2}(1 - \sum_{j=l}^{k} \tfrac{j}{N} h_j)^2$$

та

$$c_\alpha \sum_{k=l}^{N} \tfrac{l^2[2k(k-1)-1]}{(2l-1)k^2(k-1)^2} \left[\tfrac{4k}{N}(1 - \sum_{j=l}^{k} \tfrac{j}{N} h_j) - \tfrac{k^2}{N^2}(1 - \sum_{j=l}^{k} \tfrac{j}{N} h_j)^2 \right] -$$
$$- \tfrac{\alpha(N-1)^2}{N^2} \sum_{k=l}^{N} \tfrac{l^2[2k(k-1)-1]}{(2l-1)k^2(k-1)^2} \sum_{s=1}^{k-1} \tfrac{s}{N^2}(1 - \sum_{j=l}^{s} \tfrac{j}{N} h_j)^2 \le \tag{4.16}$$
$$\le c_\alpha(\tfrac{4l}{N} - \tfrac{l^2}{N^2}) - \tfrac{\alpha(N-1)^2}{N^2} \sum_{k=1}^{l-1} \tfrac{k}{N^2}(1 - \sum_{j=l}^{k} \tfrac{j}{N} h_j)^2.$$

Нехай тепер величина $l \in \mathcal{H}$ задовольняє нерівності (4.15) та (4.16). Як наслідок, отримуємо наступне алгебраїчне рівняння:

$$\tfrac{2c_\alpha l}{2l-1} \Big[4\tfrac{l}{N} \ln \tfrac{N}{l} - \tfrac{2l^2}{N^2} \ln^2 \tfrac{N}{l} - \tfrac{(N-l)l}{N^2} + \tfrac{2l^3}{N^3}(\tfrac{N}{l} \ln \tfrac{N}{l} - \tfrac{N}{l} + 1) -$$
$$- \tfrac{l^4}{N^4}(\tfrac{N}{l} \ln^2 \tfrac{N}{l} - \tfrac{2N}{l} \ln \tfrac{N}{l} + \tfrac{N}{l} - 1) \Big] -$$
$$-\alpha \Big[\tfrac{l^2(N-l)}{2N^3} + \tfrac{l(N-l)^2}{2N^3} - \tfrac{l^2}{N^2} \ln \tfrac{N}{l} + \tfrac{l^2(N-l)}{N^3} + \tfrac{l^2(N-l)^2}{2N^4} + \tag{4.17}$$
$$+ \tfrac{l^4}{2N^4}(\tfrac{N}{l} \ln^2 \tfrac{N}{l} - \tfrac{3N}{l} \ln \tfrac{N}{l} + \tfrac{7N}{2l} - 4 + \tfrac{l}{2N}) \Big] =$$
$$= c_\alpha(\tfrac{4l}{N} - \tfrac{l^2}{N^2}) - \tfrac{\alpha(N-1)^2(l-1)l}{2N^4},$$

де ми врахували при виведенні, що згідно з (4.13) величина $h_j = (j - 1)p_{1j}^{(2)}, j = \overline{l, N}$. Тоді за допомогою звичайної перевірки встановлюється справедливість наступного твердження.

Теорема 4.1. *Для прогресивно-лінійної і узгодженої з обсягом портфеля акцій дисципліни штрафування покупця марковські послідовності (3.4) допускають розбиття фазового простору $\mathcal{H}$ в пряму суму підпросторів $\mathcal{H}_+ = \{\overline{0, l-1}\}$ та $\mathcal{H}_- = \{\overline{l, N}\}$ за необхідної умови, що промоційний параметр* $c_\alpha \ge \alpha/8 > 0$.

Оскільки отриманий алгебраїчний вираз (4.17) є досить складним, коли величина $N \in \mathbb{Z}_+$ є скінченна, нижче проведемо його асимптотичний аналіз за умови існування границі $\lim_{N\to\infty} l(N)/N := z \in (0,1)$, де $l(N) \in \mathcal{H}$ є відповідний розв"язок даного рівняння.

5 Асимптотичний аналіз оптимальної стратегії вибору пакета акцій

При виконанні умови $\lim_{N\to\infty} l(N)/N = z \in (0,1)$ із алгебраїчного виразу (4.17) отримуємо наступне трансцендентне рівняння:

$$\beta(4z\ln z + 2z^2\ln^2 z + 2z^2\ln z + z^3\ln^2 z + 2z^3\ln z + 5z - z^3 - z^4) + \\ +(2z + 2z^2\ln z + 2z^2(1-z)^2 + 2z^3\ln^2 z + 3z^3\ln z + 10z^3 - z^4 + z^5) = 0, \tag{5.1}$$

де ми позначили $4c_\alpha/\alpha := \beta \geq 1/2$. Трансцендентне рівняння (5.1) допускає тільки один розв'язок на відрізку $(0,1)$, котрий можна знайти числовими методами.

Наближені значення розв'язків рівняння (5.1) на інтервалі $(0,1)$ для ряду значень величини $\beta \in [0.5, 1.5]$ показані у Таблиці 1.

Таблиця 1. Дійсні розв'язки рівняння (5.1) при різних величинах коефіцієнта β.

β	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
z^*	0.155	.171	.186	.199	.210	.220	.228	.236

β	1.3	1.4	1.5
z^*	.243	.249	.254

Як наслідок, приходимо до формулювання наступної оптимальної стратегії поведінки клієнта-покупця на ринку акцій при умові їх бі-варіативної корисності: *при досить значному обсягу $N \in \mathbb{Z}_+$ пакетів акцій у портфелі банку оптимальною стратегією поведінки першого покупця при виборі найціннішого пакета акцій буде перегляд на відносну порівняльну цінність $l = z^*N \in \mathbb{Z}_+$ акцій, а потім вибір першого у ряді пакета акцій, бі-варіативна корисність якого перевищує всі попередньо проглянуті.*

6 Висновки

Розглянута конкуренційна модель ринку акцій в середовищі банківського портфеля в умовах цейтнот-біржового процесу з бі-варіативною функцією ціни вибору клієнтами-покупцями потенційно найбільш цінного пакету акцій адекватно описується спеціальним дискретним марковським процесом на фазовім просторі $\mathcal{H} = \{0, 1, ..., N\}$. Як було також показано, оптимальна стратегія покупця при виборі ним найбільш цінного пакета акцій визначається при достатньо великій кількості пакетів у портфелі універсальним трансцендентним рівнянням (5.1), залежним від величини параметра $\beta := 4c_\alpha/\alpha \geq 1/2$, котрий характеризує співвідношення банківських параметрів заохочення та штрафу. Умовою найменшого ризику втрат банку-продавця акцій, очевидно, є рівність $\beta = 1/2$, що приводить до інваріантної форми рівняння (5.1) стосовно цього параметра. В цьому випадку покупцю досить проглянути $\simeq 15.54\%$ пакетів акцій з портфеля для оптимального вибору найбільш цінного пакета акцій в ряді наступних пакетів після вже проглянутих.

Необхідно також зазначити, що досліджена модель цейтнот-біржової поведінки клієнтів-покупців акцій з бі-варіативною функцією корисності при умові відсутності апріорної інформації про якісні характеристики портфеля є дещо спрощеною версією реальної ситуації. Окрім того, нами свідомо припускалось, що кожен клієнт володіє достатнім фінансовим капіталом для придбання будь-якого пакету акцій з банківського портфеля. Якщо ж є наявні обмеження на фінансові засоби клієнтів-покупців стосовно цін пропонованих банком пакетів акцій або ж є значне число конкуруючих клієнтів-покупців та параметрів корисності стосовно величини портфеля, то відповідні оптимальні стратегії поведінки таких покупців суттєво ускладнюються, що потребує окремого аналізу та подальшого розвитку запропонованого методу дослідження.

[1] *Березовский Б.А., Гнедин А.В.* Задача наилучшего выбора.- М.: Наука, 1984. - 197 с.

[2] *Ховард Р.* Динамическое программирование и марковские процессы. М.: Советское радиої, 1964. - 192 с.

[3] *Майн Х., Осаки С.* Марковские процессы принятия решений. М.: Наука, 1977. - 176 с.

[4] *Кишакевич Ю.Л., Прикарпатський А.К., Твердохліб І.П.* Аналіз оптимальних стратегій портфельної конкуренційної моделі ринку акцій// Доповіді Академії Наук, інформатика, 2008.

[5] *Бобиляк А.* Метод пошуку оптимальних стратегій марковського процесу прийняття рішення на основі властивостей власного вектора // Математичний вісник НТШ, т. 4, 2007. - С. 17 - 29

[6] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В двух томах. Т.1 Пер. с англ. - М.: Мир, 1984. - 528 с.

[7] *Morette de Witt C. and Elworthy K.D.* A stepping stone in stochastic analysis // Physics Reports. - 1981.- 77/3. - P. 125-167

[8] *Arnold L.* Qualitive theory of stochastic systems and its application in physics // Physics Reports. - 1981.- 77/3.- P. 215-219

[9] *Пресман Є.Л., Сонин И.М.* Игровые задачи оптимальной остановки. Существование и единственность точек равновесия. Вероятностные проблемы управления в экономике. - М.: Наука, 1977. - С. 115-144

[10] *Мазалов В.В., Винниченко С.В.* Моменты остановки и управляемые случайные блуждания. - Новосибирск: Наука, 1992. -112 с.

[11] *Федорюк М. В.* Асимптотические методы.- М.: Наука, 1985.-270 с.

ASSOCIATED MARKOV PROCESSES METHOD FOR STUDYING THE COMPETITIVE STOCKS MARKET MODELS WITH BI-VARIANT QUALITY FUNCTION WITHIN A BANK PORTFOLIO

Bogdan Y. KYSHAKEVYCH[1], *Anatoliy K. PRYKARPATSKY*[1,2], *Ivan P. TVERDOKHLIB*[3]

[1]The Ivan Franko State Pedagogical University, Drohobych, Lviv region, Ukraine
Email: peles@mail.ru
[2] The AGH University of Science and Technology, Department of Applied Mathematics,
Krakow 30059 Poland
Email: pryk.anat@ua.fm, prykanat@cybergal.com
[3]The Ivan Franko National University, Lviv, 79000, Ukraine
Email: i_tverdok@franko.lviv.ua

A competitive share market model within a bank portfolio with a bi-variant value function under time restricted agents behavior is studied. An associated Markov process method for finding optimal share choice strategy is devised. Under some conditions imposed on a so-called "promotion" parameter for a missed buying transaction of a share within the asymptotically large portfolio a universal transcendental equation, deciding of the most optimal share choice strategy under the agent competitiion is obtained.