ПРО ПОЛІНОМІАЛЬНІСТЬ НАРІЗНО ПОЛІНОМІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ НА ДОБУТКАХ КОМПЛЕКСНИХ БАНАХОВИХ ПРОСТОРІВ

Василь КОСОВАН, Володимир МАСЛЮЧЕНКО

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
вул. Коцюбинського, 2, Чернівці, 58012

Редакція отримала статтю 17 жовтня 2008 р.

Доведено, що кожна нарізно поліноміальна функція $f : X \times Y \to \mathbb{C}$, що задана на добутку двох комплексних банахових просторів, є поліноміальною за сукупністю змінних.

1. Добре відомо (див. [1, с. 63], [2, с. 19]), що кожна нарізно поліноміальна функція $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, де $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$ – поле дійсних або комплексних скалярів, є поліноміальною за сукупністю змінних. В праці [3] зауважено, що це твердження залишається справедливим і для довільного поля K, а також показано, що для довільних підмножин X_1, $\dots$, $X_2 \subseteq K$ кожна нарізно поліноміальна функція $f\colon X_1 \times \dots X_n \to K$ буде поліноміальною тоді і лише тоді, коли щонайбільше одна з множин X_i є зліченною (див. також [4, 5]).

Поняття полінома допускає перенесення на випадок функцій, заданих на довільному векторному просторі X над полем K. А саме: функція $p\colon X \to K$ називається *n-однорідним алгебраїчним поліномом*, якщо існує така нарізно лінійна функція $f\colon X^n \to K$, що $p(x) = f(x, \dots, x)$ на X (при цьому 0-однорідні поліноми – це сталі функції на X зі значеннями в K). *Алгебраїчним поліномом* на X степеня n називається функція p: $X \to K$, яка подається у вигляді $p = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k$, де p_k – k-однорідний поліном

УДК 517.98, MSC 2000: 46G20, 46E50, 26C05

при $k = 0, 1, \ldots, n$ і $p_n \neq 0$. Якщо $K = \mathbb{K}$, X – топологічний векторний простір (коротко: ТВП) над $\mathbb{K}$ і функція f в означенні n-однорідного алгебраїчного полінома p: $X \to \mathbb{K}$ неперервна, то p називається просто *n-однорідним поліномом* на X. Сума $p = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k$ k-однорідних поліномів на X називається *поліномом* на топологічному векторному просторі X над полем $\mathbb{K}$. Властивості таких поліномів вивчені в працях [1, 2].

У зв'язку з цим природно виникають питання про дослідження умов на топологічний векторний простір X над $\mathbb{K}$, при яких кожна нарізно поліноміальна функція f: $X^n \to \mathbb{K}$ є поліномом на топологічному векторному просторі X^n і таке ж саме для нарізно алгебраїчно поліноміальних функцій f: $X^n \to K$, де X – векторний простір над довільним полем K. Можна поставити також загальніші задачі у дусі праць [3 – 5] чи розглядаючи функції $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to \mathbb{K}$, що задані на добутках топологічних векторних просторів, а також функції з векторними значеннями.

Ці задачі аналогічні до проблеми перенесення класичної теореми Гартоґса [6; 7, с. 41; 2, с. 265] про сукупну аналітичність нарізно аналітичних функцій від n комплексних змінних на випадок нарізно аналітичних функцій на топологічних векторних просторах. Певні результати на цю тему є в працях [8, с. 98] і [2, с. 271] і ними ми тут скористаємося.

У цій замітці ми досліджуємо комплексні нарізно поліноміальні функції f: $X \times Y \to \mathbb{C}$ на добутку двох банахових просторів над полем $\mathbb{C}$ і показуємо, що вони є поліноміальними за сукупністю змінних. Чи буде так і для $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ залишається поки що нез'ясованим. Первісний варіант цього результату було анонсовано в [9]. Автори вдячні А.В.Загороднюку і О.Б.Скасківу за надану можливість скористатися монографією [2], що дозволило покращити результат з [9], а також М.А.Митрофанову за допомогу при виготовленні копій статей [1, 8].

2. Нагадаємо потрібні нам властивості поліномів і аналітичних функцій на абстрактних просторах, доведення яких можна знайти у працях [1, 2, 8].

Нехай X – топологічний векторний простір над полем $\mathbb{K}$. Позначимо символом $P_n(X)$ сукупність усіх поліномів p: $X \to \mathbb{K}$, степінь яких не перевищує числа $n = 0, 1, 2, \ldots$. Як і в працях [1, 8], ми будемо вважати, що розглядувані ТВП є гаусдорфовими.

Теорема А [1, с. 63]. *Нехай $p \in P_n(X)$, $a \in X$ і $q(x) = p(x + a)$ на X. Тоді $q \in P_n(X)$.*

Для функції $f\colon X \to \mathbb{K}$ і елементів a, b з X покладемо

$$f_{a,b}(\lambda) = f(a + \lambda b)$$

для довільного $\lambda \in \mathbb{K}$. З теореми A негайно випливає, що коли $f \in P_n(X)$, то $g_{a,b} \in P_n(\mathbb{K})$ для довільних a і b з простору X.

Нехай $P(X) = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} P_n(X)$ – сукупність усіх поліномів на X. Зрозуміло, що коли $f \in P(X)$, то і $f_{a,b} \in P(\mathbb{K})$ для будь-яких a, $b \in X$. Цікаво, що це твердження часом можна обернути.

Теорема B [1, с. 67]. *Нехай X – берівський топологічний векторний простір і $f\colon X \to \mathbb{K}$ – неперервне відображення, таке, що $f_{a,b} \in P(\mathbb{K})$ для довільних a і b з X. Тоді $f \in P(X)$.*

Функція $f\colon X \to \mathbb{K}$ називається *аналітичною* /*G-аналітичною*/, якщо вона неперервна /не обов'язково неперервна/ і для кожної точки $x \in X$ існує такий окіл нуля U в X і така послідовність n-однорідних /алгебраїчних/ многочленів p_n, що

$$f(x + h) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(h)$$

для кожного $h \in U$ [8, с. 90]. Сукупність усіх аналітичних на X функцій ми позначатимемо чрез $H(X)$.

Теорема C [8, с. 93]. *Якщо $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то функція $f\colon X \to \mathbb{C}$ є G-аналітичною тоді й тільки тоді, коли для довільних точок a і b з X функція $f_{a,b}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ є аналітичною.*

Теорема D [8, с. 97]. *Якщо $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ і $f \in H(X)$ / f є G-аналітичною на X/, то існує едина послідовність n-однорідних /алгебраїчних/ поліномів p_n на X, така, що*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)$$

на X.

Теорема E [8, с. 97]. *Нехай X – берівський топологічний векторний простір над $\mathbb{C}$ і $f\colon X \to \mathbb{C}$ – G-аналітична функція. Тоді f буде неперервною тоді й лише тоді, коли f неперервна хоча б в одній точці $x_0 \in X$.*

Таким чином, у цьому випадку кожна G-аналітична функція $f\colon X \to \mathbb{C}$ буде аналітичною, якщо вона неперервна хоча б в одній точці $x_0 \in X$.

Наведемо також два аналоги теореми Гартоґса для абстрактних просторів.

Теорема F [8, с. 98]. *Нехай X – берівський топологічний векторний простір над $\mathbb{C}$, Y – метризований топологічний векторний простір над $\mathbb{C}$ і $f\colon X\times Y\to\mathbb{C}$ – нарізно аналітична функція. Тоді $f\in H(X\times Y)$.*

Теорема G [2 с. 271]. *Нехай $X_1, \ldots, X_n$ – банахові простори над $\mathbb{C}$ і $f\colon X_1\times\cdots\times X_n\to\mathbb{C}$ – нарізно аналітична функція. Тоді $f\in H(X_1\times\cdots\times X_n)$.*

Зауважимо, що в працях [2, 8] насправді розглядався загальніший випадок векторнозначних функцій, заданих на деякій відкритій множині.

Нарешті, нам буде потрібний ще один наслідок з теореми єдиності [8, с. 102].

Теорема H. *Нехай X – топологічний векторний простір над полем $\mathbb{K}$, $f\in H(X)$ і $p\in P(X)$, причому $f(x)=p(x)$ для всіх точок x з деякої непорожньої відкритої множини U в X. Тоді $f=p$.*

3. Приступимо тепер до викладу основного результату.

Для відображення $f\colon X\times Y\to Z$ і точки $(x,y)\in X\times Y$ покладемо $f^x(y)=f_y(x)=f(x,y)$. Нехай X і Y – топологічні векторні простори над полем $\mathbb{K}$. Функція $f\colon X\times Y\to\mathbb{K}$ називається *нарізно поліноміальною*, якщо $f^x\in P(Y)$ і $f_y\in P(X)$ для довільних $x\in X$ і $y\in Y$, і *поліноміальною за сукупністю змінних* чи *сукупно поліноміальною*, якщо вона є поліномом на топологічному векторному просторі $T=X\times Y$, що є добутком просторів X і Y. Сукупність усіх нарізно поліноміальних функцій $f\colon X\times Y\to\mathbb{K}$ ми позначимо символом $PP(X\times Y)$.

Лема 1. *Нехай X і Y – топологічні векторні простори над полем $\mathbb{K}$, $f\in PP(X\times Y)$, $T=X\times Y$, $t=(x,y)\in T$ і $s=(u,v)\in T$.* Тоді формулою $g(\lambda,\mu)=f(x+\lambda u,y+\mu v)$ визначається поліном на $\mathbb{K}^2$.

Доведення. Перевіримо, що $g\colon\mathbb{K}^2\to\mathbb{K}$ є нарізно поліноміальною функцією. Справді, оскільки $f_{y+\mu v}$ – це деякий поліном p на X, то функція $q(z)=p(x+z)$ теж є поліномом на X на основі теореми A. Тому

$$q(z)=\sum_{k=0}^{n}q_k(z),$$

де q_k – k-однорідний поліном на X при $k=0,1,\ldots n$. В такому разі

$$g_\mu(\lambda)=g(\lambda\mu)=q(\lambda u)=\sum_{k=0}^{n}q_k(\lambda u)=\sum_{k=0}^{n}\lambda^k q_k(u)=\sum_{k=0}^{n}a_k\lambda^k,$$

де $a_k = q_k(u) \in \mathbb{K}$. Таким чином, функція $g_\mu \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ є поліномом для кожного $\mu \in \mathbb{K}$. Так само перевіряється і поліноміальність функції g^λ для кожного $\lambda \in \mathbb{K}$.

Таким чином, функція $g \colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$ є нарізно поліноміальною, а значить, і сукупно поліноміальною, як це негайно випливає зі сказаного у п.1.

Лема 2. *Нехай X і Y – топологічні векторні простори над $\mathbb{K}$, $f \in PP(X \times Y)$ і $t = (x, y)$, $s = (u, v)$ – довільні точки з добутку $T = X \times Y$. Тоді функція $f_{t,s} \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ є поліномом.*

Доведення. У позначеннях леми 1 маємо, що

$$f_{t,s}(\lambda) = g(\lambda, \lambda) = f(x + \lambda u, y + \lambda v)$$

для кожного $\lambda \in \mathbb{K}$. Але за лемою 1 функція g є поліномом від двох змінних λ і μ з $\mathbb{K}$, тобто

$$g(\lambda, \mu) = \sum_{k,j=0}^{N} c_{k,j} \lambda^k \mu^j.$$

В такому разі

$$f_{t,s}(\lambda) = \sum_{k,j=0}^{N} c_{k,j} \lambda^{k+j} = \sum_{m=0}^{M} c_m \lambda^m$$

для деяких чисел c_m. Отже, $f_{t,s} \in P(\mathbb{K})$.

Лема 3. *Нехай X і Y – топологічні векторні простори над $\mathbb{C}$ і $f \in PP(X \times Y)$. Тоді f є G-аналітичною функцією на добутку $T = X \times Y$.*

Доведення. Це негайно випливає з леми 2 і теореми С.

Лема 4. *Нехай X і Y – такі топологічні векторні простори над $\mathbb{C}$, що їх добуток $T = X \times Y$ є берівським простором, простір Y задовольняє першу аксіому зліченності і $f \in PP(X \times Y)$. Тоді $f \in H(T)$.*

Доведення. Згідно з попередньою лемою функція f є G-аналітичною. Далі функція f є нарізно неперервною, оскільки поліноми – це неперервні функції. Тому, як добре відомо (див., наприклад, [10]), для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f)$ всіх тих точок $x \in X$, що f є неперервною в точці (x, y) за сукупністю змінних, є множиною першої категорії в просторі X, який буде берівським, оскільки T є таким. Звідси, зокрема, випливає, що f має хоча б одну точку неперервності, а тоді з теореми Е ми отримуємо, що функція f неперервна, а значить, аналітична.

Теорема 1. *Нехай X і Y – такі топологічні векторні простори над $\mathbb{C}$, що їх добуток $T = X \times Y$ є берівським простором, простір Y задовольняє першу аксіому зліченності і $f \in PP(X \times Y)$. Тоді $f \in P(T)$.*

Доведення. Це негайно випливає з лем 2 і 4 і теореми B.

Наслідок 1. *Нехай X і Y – повнометризовні топологічні векторні простори над $\mathbb{C}$ і $f \in PP(X \times Y)$. Тоді $f \in P(X \times Y)$.*

Доведення. Добуток повнометризовних ТВП залишається повнометризовним ТВП, а значить, за теоремою Бера про категорію, він буде берівським. Крім того, метризовний простір задовольняє першу аксіому зліченності. Отже, наше твердження негайно випливає з теореми 1.

З цього наслідку безпосередньо отримуємо

Наслідок 2. *Нехай X і Y – комплексні банахові простори і функція $f\colon X \times Y \to \mathbb{C}$ є нарізно поліноміальною. Тоді f – поліном на $X \times Y$.*

4. Теорему 1 для метризовного простору Y можна вивести і з теореми F, адже кожна нарізно поліноміальна функція є нарізно аналітичною. Зауважимо, що умова метризовності ТВП Y рівносильна тому, що він задовольняє першу аксіому зліченності, адже ми припускаємо, що розглядувані ТВП гаусдорфові.

Крім того, для комплексних скалярів можна подати і такий аналог теореми B.

Теорема 2. *Нехай X – берівський ТВП над $\mathbb{C}$, $f\colon X \to \mathbb{C}$ – така аналітична функція, що для кожного $x \in X$ функція $g(\lambda) = f(\lambda x)$ є поліномом на $\mathbb{C}$. Тоді і f – це поліном на X.*

Доведення. З аналітичності f випливає за теоремою D, що

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x)$$

на просторі X, де p_k – це k-однорідний поліном для кожного k. З другого боку, за умовою $f(\lambda x)$ – це поліном, тобто

$$f(\lambda x) = \sum_{k=0}^{n(x)} a_k \lambda^k$$

на $\mathbb{K}$. Таким чином,

$$\sum_{k=0}^{n(x)} a_k \lambda^k = f(\lambda x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x) \lambda^k$$

для кожного $\lambda \in \mathbb{K}$, звідки, на основі теореми єдиності для степеневих рядів отримуємо, що $p_k(x) = 0$ при $k > n(x)$.

Покладемо $X_n = \{x \in X : (\forall k > n)(p_k(x) = 0)\}$ для кожного n. Оскільки поліноми p_k неперервні, то для кожного k множини $p_k^{-1}(0)$ є замкненими, а значить, і множина X_n буде замкненою, бо $X_n = \bigcap\limits_{k>n} p_k^{-1}(0)$.

Крім того, за доведеним вище $X = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} X_n$. Оскільки простір X берівський, то існує такий номер n, що множина X_n десь щільна, тобто відкрита множина $U = \operatorname{int} X_n$ не порожня. Але для кожного $x \in U$ маємо

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x) = p(x).$$

Таким чином, аналітична функція f і поліном p збігаються на відкритій непорожній множині U, отже, $f = p$ за теоремою H.

Зрозуміло, що при доведенні теореми 1 ми могли б замість теореми B спиратися на теорему 2, як це і було при первісному доведенні ослабленого варіанту теореми 1.

Нарешті, зауважимо, що з теореми G чи з теореми B можна вивести і такий результат:

Теорема 3. *Нехай $X_1, \ldots, X_n$ – комплексні банахові простори і $f\colon X_1 \times \cdots \times X_n \to \mathbb{C}$ – нарізно поліноміальне відображення. Тоді f – це поліном на добутку $X = X_1 \times \cdots \times X_n$.*

Втім, нарізно поліноміальним функціям n змінних буде присвячена наступна публікація авторів.

[1] Bochnak J., Siciak J. Polynomials and multilinear mappings in topological vector spaces // Stud. Math. – 1971. – **39**. – P. 59-76.

[2] Mujica J. Complex analysis in Banach spaces. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland, 1986. – 434 p.

[3] Косован В.М., Маслюченко В.К. Нарізно поліноміальні функції // Наук. вісн. Чернів. унт-ту. В. 374. Математика. - Чернівці: Рута, 2008. – С. 66-74.

[4] Косован В., Маслюченко В. Нарізно поліноміальні функції на добутках підмножин довільного поля // Міжнар. конф. Аналіз і Топологія. Львів, 26 травня - 7 червня, 2008. Тези доповідей. – Львів: 2008. – С. 81-82.

[5] Косован В.М., Маслюченко В.К. Нарізно поліноміальні функції на довільних підмножинах $\mathbb{R}^n$ // IV Всеукр. конф. Нелінійні проблеми аналізу (10-12 вересні 2008 року, Івано-Франківськ). Тези доповідей. – Івано-Франківськ: 2008. – С. 51.

[6] Hartogs F. Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Varänderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten // Math. Ann. – 1906. – **62**. – S. 1 - 88.

[7] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч.II. – М.: Наука, 1976. – 400 с.

[8] Bochnak J., Siciak J. Analytic function in topological vector spaces // Stud. Math. – 1971. – **39**. – P. 77-112.

[9] Косован В., Маслюченко В. Нарізно поліноміальні функції на добутках банахових просторів // Міжнар. конф. Аналіз і Топологія. Львів, 26 травня - 7 червня, 2008. Тези доповідей. – Львів: 2008. – С. 80-81.

[10] Calbrix J., Troallic J.-P. Applications séparément continues // C.R. Acad. Sc. Paris. Sér. A. – 1979. – **288**. – P. 647-648.

ON THE POLYNOMIALITY OF SEPARATELY POLYNOMIAL MAPS ON PRODUCTS OF COMPLEX BANACH SPACES

Vasyl' KOSOVAN, Volodymyr MASLYUCHENKO

Yuriy Fed'kovych Chernivtsi National University,
2 Kotsjubynskyi Str., Chernivtsi 58012, Ukraine

We prove that every separately polynomial function $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ defined on a product of complex Banach spaces is jointly polynomial.