19. *Спрингер Дж.* Введение в теорию римановых поверхностей.— М. : Изд-во иностр. лит., 1960.— 343 с.
20. *Титчмарш Э. И.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными операторами второго порядка.— М. : Изд-во иностр. лит., 1961.— Т. 2. 420 с.
21. *Date E.* On quasi-multisolitons of the field equations of the classical Massiv Thirring Model.— Progr. Theor. Phys., 1978, **59**, p. 265—273.
22. *Date E., Tanaka S.* Periodic multisolitons solutions of the Korteweg-de Vries equation and Toda lattice.— Prog. Theor. Phys. Suppl., 1976, **59**, p. 107—125.
23. *Gardner C., Green J., Kruskal M., Miura R.* A method for solving the Korteweg-de Vries equation.— Phys. Rev., Lett., 1967, **15**, p. 240—243.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР
Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
09.04.81

УДК 517.946

В. В. Фиголь

ЗАДАЧА ТИПА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В настоящей работе, являющейся развитием работ [3, 6], изучена задача типа Дирихле для гиперболического по Гордингу уравнения $2n$-го порядка с постоянными действительными коэффициентами в области $D = [0, T] \times \Omega_m$, где Ω_m — m-мерный тор, полученный отождествлением противоположных граней параллелепипеда $\{x \mid 0 \leqslant x_j \leqslant 2\pi,\ j = \overline{1, m}\}$, и установлены условия существования, единственности и корректности решения задачи.

Рассмотрим в области D задачу

$$\sum_{|l|\leqslant 2n} a_l \frac{\partial^{|l|} u(t, x)}{\partial t^{2l_0} \partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_m^{l_m}} = f(t, x), \tag{1}$$

$$\sum_{\substack{|s|\leqslant N \\ s_0 \leqslant n-1}} b_s^{(j)} \frac{\partial^{|s|} u(t, x)}{\partial t^{2s_0} \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_m^{s_m}} \Bigg|_{\substack{t=0 \\ t=T}} = 0 \, (j = \overline{1, n}), \tag{2}$$

где $a_{n,0,\ldots,0} = 1$; $a_l, b_s^{(j)} \in \mathbb{R}$; $l = (l_0, l_1, \ldots, l_m)$, $s = (s_0, s_1, \ldots, s_m)$, $|l| = 2l_0 + l_1 + \ldots + l_m$. Вид области D налагает условия 2π-периодичности по x на функции $u(t, x)$ и $f(t, x)$.

Предположим, что при любом фиксированном $s_0 = \overline{0, n-1}$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{|s'|\leqslant N-2s_0} [b_{s_0,s'}^{(j)}]^2 \neq 0. \tag{3}$$

Уравнение (1) гиперболическое по Гордингу, т. е. $\forall\, \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ корни $\lambda(\xi)$ уравнения

$$\sum_{|l|\leqslant 2n} a_l \lambda^{2l_0} (i\xi_1)^{l_1} \ldots (i\xi_m)^{l_m} = 0 \tag{4}$$

удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re} \lambda_j(\xi) < C \quad (j = \overline{1, 2n}). \tag{5}$$

В дальнейшем используем такие обозначения: $k = (k_1, \ldots, k_m)$, $|k| = |k_1| + \ldots + |k_m|$; $(k, x) = k_1 x_1 + \ldots + k_m x_m$; $s' = (s_1, \ldots, s_m)$; H_q ($q = 0, 1, 2, \ldots$) — гильбертово пространство 2π-периодических по всем переменным функций $v(x) = \sum_k v_k \exp\{i(k, x)\}$ со скалярным произведением, индуцирующим норму [1]:

$$\|v(x)\|_{H_q}^2 = (2\pi)^m \sum_{|k|\geqslant 0} [1 + \|k\|^2]^q |v_k|^2; \tag{6}$$

H_q^p ($q \geqslant p$) — гильбертово пространство функций $u(t, x)$ таких, что $\forall\, t \in$

$\in [0, T]$ $\frac{\partial^l u(t, x)}{\partial t^l}$ $(l = \overline{0, p})$ принадлежит пространству H_{q-l} и является непрерывной по t в норме H_{q-l}. В пространстве H_q^p норма определена формулой

$$\| u(t, x)\|^2_{H_q^p} = \int_0^T \sum_{l=0}^{p} \left\| \frac{\partial^l u(t, x)}{\partial t^l} \right\|^2_{H_{q-l}} dt. \tag{7}$$

Будем рассматривать решения задачи (1), (2) из пространства H_q^{2n}. При $q \geqslant 2n + \left[\frac{m}{2}\right] + 1$ согласно теореме Соболева о вложении пространств решение будет классическим.

Решение задачи (1), (2) ищем в виде ряда

$$u(t, x) = \sum_{|k| \geqslant 0} u_k(t) \exp\{i(k, x)\}. \tag{8}$$

Тогда для определения каждой функции u_k получаем краевую задачу

$$\sum_{|l| \leqslant 2n} a_l \prod_{\gamma=1}^{m} (ik_\gamma)^{l_\gamma} \frac{d^{2l_0} u_k(t)}{dt^{2l_0}} = f_k(t), \tag{9}$$

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} A_\alpha^{(j)}(k) \frac{d^{2\alpha} u_k(t)}{dt^{2\alpha}} \Bigg|_{\substack{t=0\\ t=T}} = 0 \; (j = \overline{1, n}). \tag{10}$$

Здесь $A_\alpha^{(j)}(k) = \sum_{|s'| \leqslant N-2\alpha} b_{\alpha,s'}^{(j)} \prod_{\gamma=1}^{m} (ik_\gamma)^{s_\gamma}$; $f_k(t) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\Omega_m} f(t, x) e^{i(k,x)} dx.$

Рассмотрим случай простых корней уравнения (4) при $\xi = k$. Тогда для каждого вектора k однородное уравнение

$$\sum_{|l| \leqslant 2n} a_l \prod_{\gamma=1}^{n} (ik_\gamma)^{l_\gamma} \frac{d^{2l_0} u_k(t)}{dt^{2l_0}} = 0 \tag{9*}$$

имеет фундаментальную систему решений

$$\{u_{k,j}(t) = \exp\{\lambda_j(k) t\},\ u_{k,n+j}(t) = \exp\{-\lambda_j(k) t\};\ j = (\overline{1, n})\},$$

где $\lambda_j(k)(j = \overline{1, n})$ — корни уравнения (4) при $\xi = k$.

Решение задачи (9*), (10) имеет вид

$$u_k(t) = \sum_{j=1}^{n} [c_{k,j} \exp\{\lambda_j(k) t\} + c_{k,n+j} \exp\{-\lambda_j(k) t\}],$$

где $c_{k,q}$ $(q = \overline{1, 2n})$ определяются из однородной системы уравнений, определитель которой

$$\Delta(k) = [A(k)]^2 \prod_{1 \leqslant p,r \leqslant n} [\lambda_p^2(k) - \lambda_r^2(k)]^2 \prod_{j=1}^{n} [\exp(-\lambda_j(k) T) - \exp \lambda_j(k) T].$$

Здесь $A(k) = \det \| A_\alpha^{(j)} \|$.

Теорема 1. Для единственности решения задачи (1), (2) в пространстве H_{2n}^{2n} необходимо и достаточно, чтобы ни одно из уравнений

$$1 - \exp 2\lambda_j(k) T = 0, \tag{10_1}$$

$$A(k) = 0 \tag{10_2}$$

не имело решений в целых числах $k_1, \ldots, k_m$.

Доказательство теоремы проводится по схеме доказательства теоремы 1 в работе [3].

Пусть для некоторых значений s_0 условие (3) не выполняется и количество таких s_0 составляет ν. Обозначим через $A_\nu(k)$ произвольный минор порядка $n - \nu$ матрицы $\| A_\alpha^{(j)} \|$. Тогда справедлива такая теорема.

Теорема 2. Для того чтобы два решения задачи (1), (2) из пространства H^{2n}_{2n} отличались на функцию $P(t)\exp\{i(k, x)\}$, где $P(t)$ — произвольный полином степени $2\nu - 1$, необходимо и достаточно, чтобы ни одно из уравнений (10_1) и $A_\nu(k) = 0$ не имело решений в целых числах $k_1, \ldots, k_m$.

Доказательство осуществляется аналогично доказательству теоремы 1 с использованием теоремы Бине — Коши об умножении определителей [2] и леммы 1.1 из работы [4].

В дальнейшем будем считать, что имеет место единственность решения задачи (1), (2). Тогда для каждого вектора k существует единственная функция Грина $G_k(t, \tau)$ задачи (9), (10), с помощью которой решение этой задачи представляем в виде

$$u_k(t) = \int_0^T G_k(t, \tau) f_k(\tau)\, d\tau$$

и для решения задачи (1), (2) получаем выражение

$$u(t, x) = \sum_{|k| \geqslant 0} \int_0^T G_k(t, \tau) f_k(\tau)\, d\tau \exp\{i(k, x)\}. \tag{11}$$

В квадрате $K: \{0 \leqslant t, \tau \leqslant T\}$ (за исключением сторон $\tau = 0$ и $\tau = T$) функция $G_k(t, \tau)$ определена формулой

$$G_k(t, \tau) = g_k(t, \tau) + \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^\nu \{(e^{-\lambda_\nu T} + e^{\lambda_\nu T})[(-1)^n e^{\lambda_\nu(\tau - t)} + e^{-\lambda_\nu(\tau - t)}] +$$
$$+ 2[(-1)^n e^{-\lambda_\nu(\tau + t - T)} - e^{\lambda_\nu(\tau + t - T)}]\} \times$$
$$\times \left\{\lambda_\nu(k)(e^{-\lambda_\nu T} - e^{\lambda_\nu T}) \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq \nu}}^{n} [\lambda_p^2 - \lambda_\nu^2]\right\}^{-1},$$

где $g_k(t, \tau)$ — фундаментальное решение уравнения (9*). На стороне $\tau = 0$ ($\tau = T$) квадрата K функция $G_k(t, \tau)$ доопределена по непрерывности справа (слева). Выражения

$$\lambda_\nu(k), \quad \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq \nu}}^{n} [\lambda_p^2(k) - \lambda_\nu^2(k)], \quad 1 - e^{2\lambda_\nu(k) T} \ (\nu = \overline{1, n}),$$

будучи отличными от нуля, могут становиться как угодно малыми для бесконечного множества целочисленных векторов k. Поэтому вопрос о сходимости ряда (11) связан с проблемой малых знаменателей.

Теорема 3. Пусть существуют константа M и натуральные числа ω_1, ω_2, ω_3 такие, что для всех (за исключением конечного числа) совокупностей целых чисел $k_1, \ldots, k_m$ выполняются неравенства

$$|1 - e^{2\lambda_j(k) T}| \geqslant M |k|^{-(\omega_1 + \varepsilon/3)}, \tag{12}$$

$$|\lambda_j(k)| \geqslant M |k|^{-(\omega_2 + \varepsilon/3)}, \tag{13}$$

$$\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^{n} |\lambda_p^2(k) - \lambda_j^2(k)| \geqslant M |k|^{-(\omega_3 + \varepsilon/3)} \ (j = \overline{1, n}) \tag{14}$$

$(0 < \varepsilon < 1)$ и пусть $f(t, x) \in H^0_\sigma$, где $\sigma = q + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + 1$.

Тогда существует решение задачи (1), (2), которое принадлежит пространству H^{2n}_q $(q \geqslant 2n)$ и является корректным относительно функции $f(t, x)$.

Доказательство. Из формулы (11) и оценок (12) — (14) получаем для нормы функции $u(t, x)$ в пространстве H^{2n}_q такую оценку:

$$\|u(t, x)\|_{H^{2n}_q} \leqslant C \|f(t, x)\|_{H^0_\sigma},$$

где $C = C(n, m)$. Из последнего неравенства следует доказательство теоремы.

Рассмотрим случай кратных корней уравнения (4) при $\xi = k$. Пусть уравнение (4) имеет $2q$ корней $\pm \lambda_1 (k), \ldots, \pm \lambda_q (k)$ с кратностями соответственно $m_1, \ldots, m_q$ $(m_1 + \ldots + m_q = n)$. Считаем, что $\lambda_j (k) \neq 0$ $(j = \overline{1, q})$. (Наличие нулевого корня не вносит существенных изменений в формулировку результатов рассматриваемой задачи.) Решение задачи (9*), (10) в этом случае имеет вид

$$u_k (t) = \sum_{p=1}^{q} \sum_{s_p=1}^{m_p} [c^{+}_{k,s_p} e^{\lambda_p(k)t} + c^{-}_{k,s_p} e^{-\lambda_p(k)t}]\, t^{s_p-1},$$

где коэффициенты c^{+}_{k,s_p}, c^{-}_{k,s_p} определяются из системы уравнений, определитель которой

$$\tilde{\Delta} (k) = c (k) \prod_{1 \leqslant l < p \leqslant q} [\lambda_l^2 (k) - \lambda_p^2 (k)]^{2m_l m_p} \prod_{p=1}^{q} (e^{-\lambda_p T} - e^{\lambda_p T})^{m_p}.$$

Здесь $c(k) = [A (k)]^2 \prod_{r=1}^{q} \left\{ \prod_{j=1}^{m_r} [(2j-2)!!]^2 \lambda_r(k)^{m_r(m_r-1)} \right\}$.

В квадрате K для функции Грина $\tilde{G}_k (t, \tau)$ задачи (9), (10) и ее производных по t справедливы оценки

$$\left| \frac{\partial^l \tilde{G}_k (t, \tau)}{\partial t^l} \right| \leqslant \sum_{r=1}^{q} \frac{A_r \, | k |^{l+m_r-2n} \, | 1 - e^{2\lambda_r T} |^{-m_r}}{| \lambda_r (k)|^{m_r} \prod\limits_{1 \leqslant \nu \leqslant q} | \lambda_\nu^2 (k) - \lambda_r^2 (k)|^{m_\nu}},$$

где A_r $(r = \overline{1, q})$ — положительные константы, не зависящие от k.

Из изложенного следует, что в случае кратных корней характеристического уравнения (4) теоремы существования и единственности решения задачи (1), (2) формулируются и доказываются аналогично теоремам 1 и 3.

Приведем некоторые теоретико-числовые результаты. Сформулированные и доказанные ниже теоремы покажут, что оценки (12) — (14) достигаются для почти всех (в смысле меры Лебега) чисел $\frac{\pi}{T}$ и векторов, составленных из коэффициентов уравнения (1).

Теорема 4. Для почти всех (в смысле меры Лебега пространства $\mathbb{R}^Q$) векторов, составленных из коэффициентов $a_{0, l_1, \ldots, l_m}$ уравнения (1), где Q — количество коэффициентов, неравенства (13) справедливы для всех $| k | > K (a_{0,l'})$ при $\omega_2 = m$.

Доказательство теоремы осуществляется аналогично доказательству теоремы 4.19 в работе [7].

Теорема 5. При $\omega_3 = \frac{mn}{2}$ оценки (14) выполняются для почти всех (в смысле меры Лебега пространства $\mathbb{R}^s$) векторов, составленных из коэффициентов a_l уравнения (1), для всех $| k | > K (a_l)$, где s — количество коэффициентов.

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 4.15 из работы [7], если ввести обозначение $\mu_j (k) = \lambda_j^2 (k)$ $(j = \overline{1, n})$.

Теорема 6. Для почти всех (в смысле меры Лебега пространства $\mathbb{R}^{Q+1}$) векторов A_v, составленных из коэффициентов $a_{0,l'}$ уравнения (1) и числа $\frac{\pi}{T}$, оценки (12) достигаются для всех $| k | > K \left(a_{0,l'}, \frac{\pi}{T}\right)$ при $\omega_1 = m$.

Доказательство. На основании теоремы 4 имеем $| \lambda_j (k) | > C_1 | k |^{-m+\varepsilon}$. Предположим, что $| \operatorname{Re} \lambda_j (k) | > C_1 | k |^{-m+\varepsilon}$. Тогда $|1 - \exp (2\lambda_j (k) T)| > C_2 | \operatorname{Re} \lambda_j (k)| > C_3 | k|^{-m+\varepsilon}$ $(0 < \varepsilon < 1,\ j = \overline{1, n})$. (15)

Если $$|\operatorname{Im}\lambda_j(k)| > C_4 |k|^{-m+\varepsilon},$$ то

$$|1 - e^{2\lambda_j(k)T}| > C_5 |\sin(2T \operatorname{Im}\lambda_j(k))| > C_5 \left| \frac{T}{\pi} \operatorname{Im}\lambda_j(k) - m(k) \right|,$$ где

$$m(k) \in \mathbb{Z} : \| \operatorname{Im}\lambda_j(k) T| - m(k)\pi| < \frac{\pi}{2}.$$

Учитывая лемму 2 [5] и то, что $|\lambda_j(k)| = O(|k|)$ при $|k| \to \infty$, получаем

$$|1 - e^{2\lambda_j(k)T}| > C_5 |k| \frac{T}{\pi} \left| \frac{|\operatorname{Im}\lambda_j(k)|}{|k|} - \frac{\pi}{T} \frac{m(k)}{|k|} \right| > C_6 |k|^{-m+\varepsilon} \qquad (16)$$

для почти всех чисел $\frac{\pi}{T}$. Объединяя неравенства (15) и (16), получаем доказательство теоремы 6.

1. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными.— М. : Мир, 1966.— 351 с.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М. : Наука, 1966.— 576 с.
3. *Жук В. Й., Пташник Б. Й.* Про одну крайову задачу для нестрого гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами.— В кн.: Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь.— К. : Наук. думка, 1977, с. 23—29.
4. *Костюченко А. Г., Саргсян И. С.* Распределение собственных значений.— М. : Наука, 1979.— 364 с.
5. *Полищук В. Н., Пташник Б. И.* О периодической краевой задаче для системы гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами.— Укр. мат. журн., 1978, 30, № 3, с. 326—333.
6. *Пташник Б. Й.* Про одну крайову задачу для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1971, № 6, с. 522—526.
7. *Скоробогатько В. Я.* Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными.— Киев : Наук. думка, 1980.— 244 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 30.01.81

УДК 518 : 517.392

И. М. Ковальчик

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ОДНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ИНТЕГРАЛА ПО МЕРЕ ВИНЕРА

Известно, что континуальные интегралы являются удобным математическим аппаратом в квантовой механике, теории поля, статистической гидромеханике и других разделах науки. Применение этих интегралов к решению различных прикладных задач требует наличия методов их точного и приближенного вычисления. Приближенному вычислению интегралов по гауссовой (в частности, винеровской) мере посвящена работа [7], содержащая обширную библиографию по данному вопросу. В статье [3] предложен метод приближенного вычисления интегралов Винера путем разложения подынтегрального функционала по формуле Тейлора. Для определенного класса функционалов такой способ является более эффективным.

Пусть C — пространство непрерывных функций $x(\cdot)$, заданных на сегменте $[0; 1]$ и удовлетворяющих условию $x(0) = 0$. Пусть, далее, $f(x)$ — заданный на C измеримый функционал. Интеграл по мере Винера от данного функционала (определение см., например, в работе [1]) обозначается символом $\int\limits_C f(x)\, d_W x$.

В работе [3] показано, что если $f(x)$ $(x \in C)$ — интегрируемый по Винеру функционал, обладающий для всех $x \in C$ функциональными производными до $(2n-1)$-го порядка включительно, то справедлива формула

$$\int\limits_C f(x)\, d_W x = f(0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(2k)!} \int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 b(t_1, \ldots, t_{2k})\, c(t_1, \ldots, t_{2k}) \times$$
$$\times\, dt_1 \ldots dt_{2k} + \int\limits_C R_{2n-1}(x)\, d_W x. \qquad (1)$$