Если $$|\operatorname{Im}\lambda_j(k)| > C_4 |k|^{-m+\varepsilon},$$ то

$$|1 - e^{2\lambda_j(k)T}| > C_5 |\sin(2T \operatorname{Im}\lambda_j(k))| > C_5 \left| \frac{T}{\pi} \operatorname{Im}\lambda_j(k) - m(k) \right|,$$ где

$$m(k) \in \mathbb{Z} : || \operatorname{Im}\lambda_j(k) T | - m(k)\pi| < \frac{\pi}{2}.$$

Учитывая лемму 2 [5] и то, что $|\lambda_j(k)| = O(|k|)$ при $|k| \to \infty$, получаем

$$|1 - e^{2\lambda_j(k)T}| > C_5 |k| \frac{T}{\pi} \left| \frac{|\operatorname{Im}\lambda_j(k)|}{|k|} - \frac{\pi}{T} \frac{m(k)}{|k|} \right| > C_6 |k|^{-m+\varepsilon} \qquad (16)$$

для почти всех чисел $\frac{\pi}{T}$. Объединяя неравенства (15) и (16), получаем доказательство теоремы 6.

1. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными.— М. : Мир, 1966.— 351 с.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М. : Наука, 1966.— 576 с.
3. *Жук В. Й., Пташник Б. Й.* Про одну крайову задачу для нестрого гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами.— В кн.: Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь.— К. : Наук. думка, 1977, с. 23—29.
4. *Костюченко А. Г., Саргсян И. С.* Распределение собственных значений.— М. : Наука, 1979.— 364 с.
5. *Полищук В. Н., Пташник Б. И.* О периодической краевой задаче для системы гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами.— Укр. мат. журн., 1978, 30, № 3, с. 326—333.
6. *Пташник Б. Й.* Про одну крайову задачу для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1971, № 6, с. 522—526.
7. *Скоробогатько В. Я.* Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными.— Киев : Наук. думка, 1980.— 244 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 30.01.81

УДК 518 : 517.392

И. М. Ковальчик

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ОДНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ИНТЕГРАЛА ПО МЕРЕ ВИНЕРА

Известно, что континуальные интегралы являются удобным математическим аппаратом в квантовой механике, теории поля, статистической гидромеханике и других разделах науки. Применение этих интегралов к решению различных прикладных задач требует наличия методов их точного и приближенного вычисления. Приближенному вычислению интегралов по гауссовой (в частности, винеровской) мере посвящена работа [7], содержащая обширную библиографию по данному вопросу. В статье [3] предложен метод приближенного вычисления интегралов Винера путем разложения подынтегрального функционала по формуле Тейлора. Для определенного класса функционалов такой способ является более эффективным.

Пусть C — пространство непрерывных функций $x(\cdot)$, заданных на сегменте $[0; 1]$ и удовлетворяющих условию $x(0) = 0$. Пусть, далее, $f(x)$ — заданный на C измеримый функционал. Интеграл по мере Винера от данного функционала (определение см., например, в работе [1]) обозначается символом $\int\limits_C f(x)\, d_W x$.

В работе [3] показано, что если $f(x)$ $(x \in C)$ — интегрируемый по Винеру функционал, обладающий для всех $x \in C$ функциональными производными до $(2n-1)$-го порядка включительно, то справедлива формула

$$\int\limits_C f(x)\, d_W x = f(0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(2k)!} \int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 b(t_1, \ldots, t_{2k})\, c(t_1, \ldots, t_{2k}) \times$$
$$\times\, dt_1 \ldots dt_{2k} + \int\limits_C R_{2n-1}(x)\, d_W x. \qquad (1)$$

Здесь $b(t_1, \ldots, t_{2k})$ — известные функции, а $c(t_1, \ldots, t_{2k})$ — функциональные производные от функционала $f(x)$ в точке $x = 0$:

$$c(t_1, \ldots, t_{2k}) = \frac{\delta^{2k} f(0)}{\delta x(t_1) \ldots \delta x(t_{2k})}.$$

Если функциональная производная $(2n-1)$-го порядка равномерно ограничена по модулю константой M, то для остаточного члена в представлении (1) справедлива оценка

$$\left| \int_C R_{2n-1}(x)\, d_W x \right| \leqslant \frac{M}{(2n-1)!} \int_C \left[\int_0^1 |x(t)|\, dt \right]^{2n-1} d_W x. \tag{2}$$

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы дать более эффективную оценку, чем (2). Данная задача нетривиальна, так как при вычислении континуальных интегралов от функционалов вида $f(|x(\cdot)|)$ встречаются значительные трудности (см. примеры и библиографию в работе [4]).

Приведенное ниже вычисление интегралов по мере Винера представляет, по-видимому, и самостоятельный интерес.

Теорема. Для остаточного члена в разложении (1) справедлива оценка

$$\left| \int_C R_{2n-1}(x)\, d_W x \right| \leqslant \frac{2M}{(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)(2n+1)\sqrt{\pi}}. \tag{3}$$

Доказательство. Установим две леммы.

Лемма 1. Пусть $p \geqslant 0$ целое. Тогда

$$\int_C |x(t)|^p\, d_W dx = \sqrt{\frac{t^p}{\pi}}\, \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right).$$

Так как подынтегральный функционал зависит от значений функции в одной точке, то [6]

$$\int_C |x(t)|^p\, d_W x = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^p e^{-\frac{u^2}{t}}\, du.$$

Проделаем элементарные преобразования так, что

$$\int_C |x(t)|^p\, d_W x = 2\sqrt{\frac{t^p}{\pi}} \int_0^{+\infty} z^p e^{-z^2} dz.$$

Последний интеграл вычисляется (см. [2]) так:

$$\int_0^{+\infty} z^p e^{-z^2} dz = \begin{cases} \dfrac{(2k-1)!!}{2^{k+1}}\sqrt{\pi} & \text{при} \quad p = 2k, \\[2ex] \dfrac{(k-1)!}{2} & \text{при} \quad p = 2k-1. \end{cases}$$

Оба эти выражения могут быть записаны в виде одной формулы

$$\int_0^{+\infty} z^p e^{-z^2} dz = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right).$$

Следовательно,

$$\int_C |x(t)|^p\, d_W x = \sqrt{\frac{t^p}{\pi}}\, \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right).$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $p \geqslant 0$ целое. Тогда

$$\int_C \left[\int_0^1 |x(t)|^p\, dt \right] d_W x = \frac{2}{(p+2)\sqrt{\pi}}\, \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right). \tag{4}$$

Данное равенство является следствием леммы 1. Действительно, по теореме Фубини и на основании леммы 1

$$\int\limits_C \left[\int\limits_0^1 |x(t)|^p\,dt\right] d_W x = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_C |x(t)|^p\,d_W x\right] dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\int\limits_0^1 \sqrt{t^p}\,dt =$$

$$= \frac{2}{(p+2)\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right).$$

Вернемся к доказательству теоремы. Воспользуемся неравенством Гельдера для произведения двух непрерывных функций, заданных на сегменте [0, 1], в предположении, что один из сомножителей — тождественная единица. Тогда

$$\left[\int\limits_0^1 |x(t)|\,dt\right]^p \leqslant \int\limits_0^1 |x(t)|^p\,dt \quad (p > 1).$$

Теперь из оценки (2) вытекает, что

$$\left|\int\limits_C R_{2n+1}(x)\,d_W x\right| \leqslant \frac{M}{(2n-1)!}\int\limits_C \left[\int\limits_0^1 |x(t)|^{2n-1}\,dt\right] d_W x.$$

К последнему интегралу применим формулу (4). Отсюда уже немедленно следует оценка (3). Теорема доказана.

Сделаем несколько замечаний о рассмотренных здесь функциональных интегралах.

При вычислении континуальных интегралов, фигурирующих в леммах 1 и 2, предполагалось, что винеровский процесс задается корреляционной функцией вида $K(t, s) = \frac{1}{2}\min(t, s)$. Однако часто полагают $K(t, s) = \min(t, s)$. Тогда

$$\int\limits_C \left[\int\limits_0^1 |x(t)|^p\,dt\right] d_W x = \frac{2}{p+2}\sqrt{\frac{2^p}{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right).$$

Пусть C_m — пространство непрерывных функций m переменных $x(\mathbf{t}) = x(t_1, \ldots, t_m)$, определенных на m-мерном кубе $Q_m = \{\mathbf{t} : 0 \leqslant t_i \leqslant 1,\ i = \overline{1, m}\}$ и удовлетворяющих условиям $x(t_1, \ldots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \ldots, t_m) = 0$ $(i = \overline{1, m})$, а $w(\mathbf{t})$ — винеровская случайная функция от m параметров [5]. Тогда, как и выше,

$$\int\limits_{C_m} \left[\int\limits_{Q_m} |x(\mathbf{t})|^p\,d\mathbf{t}\right] d_W x = \sqrt{\frac{2^p}{\pi}}\left(\frac{2}{p+2}\right)^m \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right).$$

Так же оценивается погрешность аппроксимации интеграла по обобщенной мере Винера в пространстве C_m.

1. *Гельфанд И. М., Яглом А. М.* Интегрирование в функциональных пространствах и его применение в квантовой физике.— Успехи мат. наук, 1956, **11**, № 1, с. 77—114.
2. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М. : Физматгиз, 1963.— 1100 с.
3. *Данилович В. П., Ковальчик И. М.* О приближенном вычислении континуальных интегралов.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1976, вып. 14, с. 25—34.
4. *Ковальчик И. М.* Интеграл Винера.— Успехи мат. наук, 1963, **18**, № 1, с. 97—134.
5. *Ченцов Н. Н.* Винеровские случайные поля от нескольких параметров.— Докл. АН СССР, 1956, **106**, № 4, с. 607—609.
6. *Шилов Г. Е.* Интегрирование в бесконечномерных пространствах и интеграл Винера.— Успехи мат. наук, 1963, **18**, № 2, с. 99—120.
7. *Янович Л. А.* Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам.— Минск : Наука и техника, 1976.— 384 с.

Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию 06.03.80