УДК 517.984.5

А. И. Балинский, Б. М. Подлевский

ВАРИАЦИОННАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Задачи на собственные значения возникают при рассмотрении многих теоретических и прикладных вопросов. Относительно полно изученными являются задачи о собственных значениях линейных операторов. Более трудными в математическом отношении и, следовательно, менее исследованными оказались задачи с нелинейной зависимостью от спектрального параметра. Важный класс таких задач составляют полиномиальные операторные пучки. Их исследование является актуальным, поскольку получаемые при этом результаты находят важные приложения (см., например, [3, 5]). В работе [7] было положено начало разработке вариационных методов характеризации спектров полиномиальных операторных пучков. В данной работе устанавливается вариационная характеристика собственных значений полиномиального пучка обыкновенных дифференциальных операторов. Обоснование осуществляется путем перехода к соответствующему линейному пучку с последующей его симметризацией.

Рассмотрим полиномиальный операторный пучок вида

$$L(\lambda) = \lambda^n L_0 + \lambda^{n-1} L_1 + \cdots + \lambda L_{n-1} + L_n \tag{1}$$

с самосопряженными операторами-коэффициентами L_i $(i = \overline{0, n})$, определенными дифференциальными выражениями

$$l_i(y) = \sum_{\nu=0}^{m_i} (-1)^\nu [p_{\nu_i}(x) \{y(x)\}^{(\nu)}]^{(\nu)} \quad (i = \overline{0, n}),$$

$m_n > m_i$ $(i = \overline{0, n-1})$ и краевыми условиями

$$U_\mu y(x) \equiv \sum_{k=0}^{2m_n-1} [\alpha_{\mu,k} y^{(k)}(a) + \beta_{\mu,k} y^{(k)}(b)] = 0 \quad (\mu = \overline{1, 2m_n}),$$

где λ — комплексный параметр.

Предполагаем, что

$$\begin{gathered}
(L_0 u, u) \geqslant \nu_0 (u, u), \quad \nu_0 > 0 \quad \forall u \in D, \\
(L_n u, u) \geqslant \nu_n (u, u), \quad \nu_n > 0 \quad \forall u \in D, \\
\exists \alpha_i (\alpha_i = \bar{\alpha}_i, \alpha_i > \alpha_{i+1}, \ i = \overline{1, n-2}), \\
(-1)^i (L(\alpha_i) u, u) \geqslant \gamma_i (u, u), \quad \gamma_i > 0 \quad \forall u \in D,
\end{gathered} \tag{2}$$

где

$$D = \{u(x) : u(x) \in C^{2m_n}[a, b]; \ U_\mu u(x) = 0 \ (\mu = 1, 2m_n)\}$$

— линейное многообразие вещественного гильбертового пространства

$$H = L_2[a, b]; \ (u, v) = \int_a^b u(x) v(x)\, dx.$$

Дополнение комплексной плоскости к множеству значений параметра, при которых существует ограниченный оператор $[L(\lambda)]^{-1}$, определенный на всем H, называемое спектром пучка L, обозначим через $\sigma(L)$. Число $\lambda_0 \in \sigma(L)$ называется собственным значением пучка, если уравнение $L(\lambda_0) y(x) = 0$ имеет нетривиальное решение. Последнее называется соответствующей λ_0 собственной функцией пучка. Пару $\langle \lambda_0, y_0 \rangle$ будем называть собственной парой пучка.

Рассуждая, как в работе [4], можно установить, что спектр пучка (1) состоит лишь из собственных значений. Отметим, что в силу второго условия

(2) существует ограниченный оператор L_n^{-1}, являющийся самосопряженным положительно определенным оператором. Пусть T — положительно определенный квадратный корень из L_n^{-1}. Образуем операторы $TL_i T$ $(i = \overline{0, n-1})$, определенные на плотном в H множестве

$$D_1 = \{z(x) : z(x) = Th(x),\ h(x) \in C[a, b]\},$$

и расширим их до самосопряженных операторов Гильберта — Шмидта, которые обозначим через K_{n-i}.

Рассмотрим операторный пучок

$$K(\mu) = \mu^n I + \mu^{n-1}K_1 + \cdots + \mu K_{n-1} + K_n \quad (\mu = \lambda^{-1}). \tag{3}$$

Нетрудно установить, что между собственными парами пучков (1) и (3) существует следующая связь.

Лемма 1. Пара $\langle \lambda_0, y_0 \rangle$ является собственной парой пучка (1) тогда и только тогда, когда $\langle \mu_0 = \lambda_0^{-1}, z_0 = T^{-1} y_0 \rangle$ — собственная пара пучка (3).

Определим гильбертово пространство $\tilde{H} = \overset{n}{\oplus} H$ с элементами $\tilde{y}(x) = \{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$, $\tilde{z}(x) = \{z_1(x), z_2(x), \ldots, z_n(x)\}$, ... и скалярным произведением $(\tilde{y}, \tilde{z}) = \sum_{i=1}^{n} (y_i, z_i)$; $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ — обозначения операторов в $\tilde{H}$.

Поставим пучку (3) в соответствие действующий в пространстве $\tilde{H}$ оператор

$$\tilde{K} : \tilde{K}\tilde{y} = \tilde{z}, \quad z_k = y_{k+1}\ (k = \overline{1, n-1}); \quad z_n = -\sum_{i=1}^{n} K_{n+1-i} y_i. \tag{4}$$

Лемма 2. Спектры пучка (3) и оператора (4) совпадают.

Это утверждение следует из соотношения

$$\tilde{S}_0(\mu\tilde{I} - \tilde{K}) = \tilde{B}(\mu)\,\mathrm{diag}\,(K(\mu), \quad \tilde{Q}_{n-1})\,\tilde{C}(\mu),$$

где

$$\tilde{S}_0 : \tilde{S}_0\tilde{y} = \tilde{z}; \quad z_k = \sum_{i=0}^{n-k} K_{n-k-i} y_{i+1}; \quad K_0 \equiv I \quad (k = \overline{1, n});$$

$$\tilde{Q}_{n-1} : \tilde{Q}_{n-1}\tilde{y} = \tilde{z}; \quad z_k = -\sum_{i=0}^{n-k} K_{n-k-i} y_{i+2}; \quad K_0 \equiv I \quad (k = \overline{2, n});$$

$$\tilde{B}(\mu) : \tilde{B}(\mu)\tilde{y} = \tilde{z}; \quad z_k = y_k - \mu y_{k+1} \quad (k = \overline{1, n-1}); \quad z_n = y_n;$$

$$\tilde{C}(\mu) : \tilde{C}(\mu)\tilde{y} = \tilde{z}; \quad z_1 = y_1; \quad z_k = -\mu^{k-1} y_1 + y_k \quad (k = \overline{2n}).$$

Легко видеть, что $(\tilde{K})^n$ — вполне непрерывный оператор. Поэтому спектр оператора $\tilde{K}$ состоит из счетного числа собственных значений конечной кратности, не имеющих ненулевых предельных точек [6]. В результате получаем такое утверждение.

Лемма 3. Спектр пучка K состоит из счетного множества собственных значений конечной кратности. При этом $\sigma(K) = \sigma(\tilde{K})$.

Соответствие между собственными парами пучка (3) и оператора (4) следующее.

Лемма 4. Пара $\langle \mu_0, y_0 \rangle$ является собственной парой пучка (3) тогда и только тогда, когда $\langle \mu_0, (y_0, \mu_0 y_0, \ldots, \mu_0^{n-1} y_0)^t \rangle$ — собственная пара пучка $\tilde{K}\tilde{y} - \mu\tilde{y}$.

Оператор $\tilde{K}$ не является самосопряженным. Покажем, что при определенных условиях он допускает симметризацию. Используя результаты работы [1], построим для $\tilde{K}$ положительно определенный симметризатор. По оператору

$$\tilde{G}_{[k]} = \mathrm{diag}\,(\tilde{Q}_k, \tilde{Q}_{n-k}) \qquad (k = \overline{0, n}),$$

где

$$\tilde{Q}_k : \tilde{Q}_k \tilde{y} = \tilde{z}; \quad z_m = -\sum_{i=1}^{m} K_{n-m+i} y_{n+k-i-1} \qquad (m = \overline{1, k},\ k > 0);$$

$$\tilde{Q}_{n-k} : \tilde{Q}_{n-k} \tilde{y} = \tilde{z}; \quad z_m = \sum_{i=0}^{n-m} K_{n-m-i} y_{i+k+1} \qquad (m = \overline{k+1, n},\ k < n);$$

и многочлену

$$q(\mu) = \mu^{n-1} + g_1 \mu^{n-2} + \cdots + g_{n-2}\mu + g_{n-1}$$

с корнями β_i $(\beta_i > \beta_{i+1},\ i = \overline{1, n-2})$ такими, что

$$(-1)^i (K(\beta_i)\ y,\ y) \geqslant \delta_i (y, y),\ \delta_i > 0 \qquad \forall y \in H, \tag{5}$$

строим оператор

$$\tilde{S} = \sum_{i=1}^{n} g_{i-1} G_{[n-i]}, \quad g_0 \equiv 1.$$

Это — самосопряженный оператор, симметризующий слева оператор $\tilde{K}$.

Покажем, что оператор $\tilde{S}$ положительно определен, т. е.

$$(\tilde{S}\tilde{y},\ \tilde{y}) \geqslant \gamma (\tilde{y},\ \tilde{y}),\ \gamma > 0 \qquad \forall \tilde{y} \in \tilde{H}.$$

Теорема 1. Условия (5) являются необходимыми и достаточными для положительной определенности оператора $\tilde{S}$.

Доказательство достаточности. Представим оператор $\tilde{S}$ в виде

$$\tilde{S} = \tilde{b}^* \tilde{P}(\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_{n-1}) \tilde{b},$$

где

$$\tilde{b} : \tilde{b}\tilde{y} = \tilde{z}; \quad z_k = \sum_{i=1}^{k} g_{k-i} y_i; \quad g_0 \equiv 1 \qquad (k = \overline{1, n}),$$

$\tilde{P}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}))$ — разделенная разность $(n-2)$-го порядка (с системой узлов β_i $(i = \overline{1, n-1})$) для оператора $\tilde{P}(\mu)$, имеющего матричное представление

$$\tilde{P}(\mu) = \mathrm{diag}(-P_{n-1}(\mu),\ P_1(\mu)).$$

Здесь

$$P_{n-1}(\mu) : P_{n-1}(\mu)\, y = z; \quad z_k = \sum_{i=1}^{n-1} \mu^{2n-2-k-i} K(\mu)\, y_i \qquad (k = \overline{1, n-1});$$

$$P_1(\mu) = \mu^{n-2} I.$$

Нетрудно убедиться, что для произвольного вектора

$$(\tilde{P}(\beta_i)\, \tilde{b}\tilde{y},\ \tilde{b}\tilde{y}) = \left(K(\beta_i) \sum_{j=1}^{n-1} \beta_i^{n-1-j} z_j,\ \sum_{j=1}^{n-1} \beta_i^{n-1-j} z_j\right) + \beta_i^{n-2} (z_n,\ z_n). \tag{6}$$

Отсюда следует, что при выполнении условий (5)

$$(\tilde{S}\tilde{y},\ \tilde{y}) \geqslant \gamma (\tilde{y},\ \tilde{y}),\ \gamma > 0 \qquad \forall \tilde{y} \in \tilde{H}.$$

Доказательство необходимости. Рассуждая от противного, допускаем, что условия (5) не выполняются, например, в точке β_i. Это означает существование в H такой последовательности $\{y^j\}_1^\infty$ нормированных векторов, что

$$(-1)^i (K(\beta_i)\, y^j,\ y^j) = \Delta_j \xrightarrow[j \to \infty]{} \Delta < 0.$$

По каждому из векторов y^i определим вектор $\tilde{y}_i = \{y_1^i, y_2^i, \ldots, y_{n-1}^i, 0\}$ как решение системы

$$\sum_{k=1}^{n-1} \beta_l^{n-k-1} z_k^i = \begin{cases} y^i & \text{при } l = i, \\ 0 & \text{при } l \neq i \end{cases} \qquad (i = \overline{1, n-1})$$

и образуем последовательность $\{y_i\}_1^\infty$.

Учитывая соотношение (6), убеждаемся, что

$$(\tilde{S}\tilde{y}, \tilde{y}) = (-1)^i (K(\beta_i) y^i, y^i)/|q'(\beta_i)| = \Delta_i/|q'(\beta_i)| \xrightarrow[i\to\infty]{} \Delta < 0.$$

Последнее противоречит свойству положительной определенности оператора $\tilde{S}$. Теорема доказана.

Если в пространстве $\tilde{H}$ с помощью оператора $\tilde{S}$ ввести новое скалярное произведение $[\tilde{x}, \tilde{y}] = (\tilde{S}\tilde{x}, \tilde{y})$ (топологически эквивалентное исходному), то по отношению к нему оператор $\tilde{K}$ является самосопряженным. Следовательно, применим метод вариационной характеристики собственных значений (см., например, [2]).

По отношению к исходной задаче получается следующий результат.

Теорема 2. Если пучок (1) удовлетворяет условиям (2), то для $\forall m \geqslant 1$

$$\lambda_m = \min\left\{\left(\sum_{k=1}^{n} a_{n-k} \sum (z_j^k, y_j)\right)\Big/\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1-k} \sum_{j=1}^{n} (z_j^k, y_j)\right),\right.$$

$$\forall y_1, y_2, \ldots, y_n \in D \qquad \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1-k} \sum \lambda^{j-1} (z_j^k, f^i) = 0$$

$$\left.(1 < i \leqslant m-1)\right\},$$

где

$$z_j^k = \begin{cases} -\sum_{i=1}^{j} L_{n-j+i} y_{k+1-i}, & j \leqslant k, \\ \sum_{i=1}^{n+1-j} L_{n+1-j-i} y_{k+i}, & j > k \end{cases}$$

и $\langle \lambda_m, f^m \rangle$ — собственная пара пучка (1).

П р и м е р. Рассмотрим задачу поперечных колебаний упругого призматического стержня длиной l с учетом кручения и изменения угла элемента стержня с шарнирно закрепленными концами. Как известно [5], такие колебания описываются дифференциальным уравнением

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \left(\frac{\gamma J}{g} + \frac{EJ\gamma}{gk'G}\right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\gamma J}{g} \frac{\gamma}{gk'G} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0$$

и краевыми условиями

$$y(x, t)|_{x=0} = 0, \quad y_x''(x, t)|_{x=0} = 0,$$

$$y(x, t)|_{x=l} = 0, \quad y_x''(x, t)|_{x=l} = 0.$$

Здесь $y(x, t)$ — прогиб; EJ — изгибная жесткость; γ — масса единицы объема материала стержня; A — площадь поперечного сечения; k' — числовой коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения; G — модуль сдвига; g — ускорение свободного падения.

Полагая $y(x, t) = u(\xi) \exp i\omega t$, где $\xi l = x$, ω — параметр частоты, и обозначая $\omega^2 = \lambda$, приходим к операторному пучку

$$L(\lambda) = \lambda^2 L_0 + \lambda L_1 + L_2,$$

где L_i $(i = 0, 1, 2)$ определяются соответственно дифференциальными выражениями

$$l_0(u) = c_3 u(\xi), \quad l_1 = c_2 u''(\xi) - u(\xi), \quad l_2 = c_1 u^{(\mathrm{IV})}(\xi),$$

$$c_1 = EJg/\gamma A, \quad c_2 = (1 + E/k'G) J/A, \quad c_3 = J\gamma/Agk'G$$

и краевыми условиями

$$u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0. \tag{7}$$

Нетрудно убедиться, что операторы L_i ($i = 0, 1, 2$) самосопряженные и удовлетворяют условиям (2). В частности, в третьем условии (2) можно положить $\alpha_1 = (c_2\pi^2 + 1)/2c_3$. Следует отметить, что для удовлетворения условиям (2) не потребовалось никаких дополнительных ограничений на физические параметры задачи.

Таким образом, на основании теоремы 2 получаем

$$\lambda_1 \leqslant \frac{a_1[(L_0y_2, y_2) - (L_2y_1, y_1)] - a_0[(L_1y_2, y_2) + 2(L_2y_1, y_2)]}{a_1[(L_1y_1, y_1) + 2(L_0y_1, y_2)] + a_0[(L_0y_2, y_2) - (L_2y_1, y_1)]}$$

для любых четырежды непрерывно дифференцируемых функций y_1 и y_2, удовлетворяющих граничным условиям (7).

Если положить $y_1 = \sin \pi x$, $y_2 = 2\pi \sin \pi x$ и $a_0 = 1$, $a_1 = -(c_2\pi^2 + 1)/2c_3$, то при $c_1 = c_3 = 1$, $c_2 = 2$ получим $\lambda_1 \leqslant 8{,}130359$ (ошибка $\approx 0{,}6\%$).

1. *Балинский А. И.* Некоторые способы исследования обобщенных задач на собственные значения. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Львов, 1972.— 12 с.
2. *Гулд С.* Вариационные методы в задачах о собственных значениях. — М. : Мир, 1970.— 328 с.
3. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения (с техническими приложениями).— М. : Наука, 1968.— 504 с.
4. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы.— М. : Наука, 1969.— 400 с.
5. *Тимошенко С. Г.* Колебания в инженерном деле.— М. : Физматгиз, 1959.— 440 с.
6. *Треногин В. А.* Функциональный анализ.— М. : Наука, 1980.— 496 с.
7. *Duffin R.* A minimax theory for overdamped network.— J. Ration. Mech. Anal., 1955, 4, N 2, p. 221—233.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 14.04.81

УДК 517.53

Д. В. Покыньброда, Л. И. Философ

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ ЭКСПОНЕНТЫ

В настоящей статье с помощью аппроксимационного метода Дзядыка [1] исследуется скорость стремления к нулю разности между функцией e^z и ее аппроксимациями Паде $\pi_{m,n}(z)$ при $(m + n) \to \infty$. Изучению вопросов сходимости аппроксимаций Паде этой функции посвящен целый ряд работ (см., например, библиографию в работе [2]).

Обозначим через $\mathcal{R}_{m,n}$ класс всех несократимых рациональных дробей вида p_m/q_n, где p_m и q_n — алгебраические многочлены степеней не выше m и n соответственно.

Рациональная дробь $\pi_{m,n} \in \mathcal{R}_{m,n}$ осуществляет аппроксимацию Паде порядка $[m, n]$ голоморфной в точке $z = 0$ функции f, если $\pi_{m,n}$ имеет максимальный (в классе $\mathcal{R}_{m,n}$) порядок касания с f в начале координат.

Перрон [5] установил, что для функции e^z каждый из полиномов Паде $\pi_{m,n}$ имеет вид

$$\pi_{m,n}(z) = \frac{\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (m+n-k)!\, z^k}{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (m+n-k)!\, (-z^k)}. \tag{1}$$

Луке [4] и независимо от него В. К. Дзядык и Л. И. Философ [2] для каждого $z \in \mathbb{C}$ установили асимптотическое равенство

$$e^z - \pi_{n,n}(z) = (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} e^z \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{2}$$