16. *Langer H.* Über Lancaster's Zerlegung von Matrizenscharen.— Arch. Mech. and Anal., 1968, **29**, S. 75—80.
17. *Sylvester.* Sur les racines des matrices unitares.— C. r., 1882, **94**, p. 396—399.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 24.12.80

УДК 517.9 : 539

Б. Я. Андриюк, М. Ф. Стасюк, Р. М. Таций

ПОСТРОЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО РЯДА ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Основы качественной теории квазидифференциальных уравнений, в частности вопросы существования непрерывного решения задачи Коши, изложены в работе [1]. В настоящей статье предлагается конструктивный способ построения фундаментальной системы решений квазидифференциального уравнения второго порядка в виде рядов по параметру. Коэффициенты уравнения считаем кусочно-аналитическими функциями с разрывами первого рода в конечном числе точек интервала [0, 1].

На этом основании удается рекуррентным образом определить коэффициенты характеристического ряда соответствующей задачи на собственные значения, что в свою очередь позволяет применить двусторонние методы к определению ее собственных значений.

Рассмотрим квазидифференциальное уравнение

$$\left(\frac{1}{f(x)}y'\right)' + \lambda m(x) y = 0, \tag{1}$$

где коэффициенты $f(x)$ и $m(x)$ интегрируемые на [0, 1]; λ — параметр. Следуя работе [2], можно показать, что уравнение (1) эквивалентно такому:

$$y(x) = \varphi(x) - \lambda \int_0^x K(x, \alpha) m(\alpha) y(\alpha) d\alpha. \tag{2}$$

Здесь $\varphi(x)$ — произвольное решение уравнения

$$\left(\frac{1}{f(x)}y'\right)' = 0, \tag{3}$$

а $K(x, \alpha)$ — функция Коши квазидифференциального уравнения (3), имеющая вид

$$K(\alpha, \alpha) = 0, \quad K_x^{[1]}(\alpha, \alpha) \equiv \frac{1}{f(\alpha)} K'_x(\alpha, \alpha) = 1.$$

Отметим, что квазипроизводная $y^{[1]}(x) \equiv \frac{1}{f(x)} y'(x)$ является решением интегро-дифференциального уравнения

$$y^{[1]}(x) = \varphi^{[1]}(x) - \lambda \int_0^x K_x^{[1]}(x, \alpha) m(\alpha) y(\alpha) d\alpha. \tag{4}$$

Фундаментальную систему решений $y^i(x)$ $(i = 0, 1)$ уравнения (1) ищем в виде

$$y^i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \lambda^j y_j^i(x). \tag{5}$$

Тогда

$$y_0^i = \varphi_i, \quad y_{j+1}^i(x) = \int_0^x K(x, \alpha) m(\alpha) y_j^i(\alpha) d\alpha, \tag{6}$$

причем $\varphi_i(x)$ $(i = 0, 1)$ — фундаментальная система решений уравнения (3).

Для квазипроизводных $(y^i(x))^{[1]}$ справедливо аналогичное представление

$$(y^i(x))^{[1]} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \lambda^j (y_j^i)^{[1]}(x), \tag{7}$$

а

$$(y_0^i)^{[1]}(x) = \varphi_i^{[1]}, \quad (y_{j+1}^i)^{[1]}(x) = \int_0^x K_x^{[1]}(x, \alpha)\, m(\alpha)\, y(\alpha)\, d\alpha. \tag{8}$$

В дальнейшем заданные функции $f(x)$, $m(x)$ и искомые функции $y_j^i(x)$, $(y_j^i)^{[1]}(x)$, являющиеся кусочно-аналитическими с разрывами первого рода в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ отрезка $[0, 1]$ и непрерывными справа в этих же точках, будем представлять в виде

$$\begin{gathered} m(x) = \sum_{s=0}^{n} m_s(x)\,\theta_s, \quad f(x) = \sum_{s=0}^{n} f_s(x)\,\theta_s, \\ y_j^i(x) = \sum_{s=0}^{n} y_{sj}^i(x)\,\theta_s, \quad y_j^{i[1]}(x) = \sum_{s=0}^{n} y_{sj}^{i[1]}(x)\,\theta_s, \end{gathered} \tag{9}$$

где функции $m_s(x)$, $f_s(x)$, $y_{sj}^i(x)$, $y_{sj}^{i[1]}(x)$ допускают разложения в ряды Тейлора

$$\begin{gathered} m_s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} m_{sk}(x - x_s)^k, \quad f_s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{sk}(x - x_s)^k, \\ y_{sj}^i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} y_{sj}^{ik}(x - x_s)^k, \quad y_{sj}^{i[1]}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (y_{sj}^{ik})^{[1]}(x - x_s)^k \end{gathered} \tag{10}$$

с достаточно большим радиусом сходимости $R_s > |x_{s+1} - x_s|$; θ_s — характеристические функции интервалов $[x_s;\ x_{s+1}[$:

$$\theta_s = \begin{cases} 1, & x \in [x_s;\ x_{s+1}[, \\ 0, & x \bar{\in} [x_s;\ x_{s+1}[\end{cases} \qquad (s = \overline{0,\ n};\ x_0 = 0).$$

Нетрудно проверить, что функции, имеющие представление (9), обладают следующими необходимыми в дальнейшем свойствами.

1. Если

$$f(x) = \sum_{s=0}^{n} f_s(x)\,\theta_s, \quad g(x) = \sum_{s=0}^{n} g_s(x)\,\theta_s,$$

то $fg = f_0 g_0 \theta_0 + f_1 g_1 \theta_1 + \ldots + f_n g_n \theta_n$, т. е. функции f и g перемножаются покомпонентно.

2. $$\int_0^x [f_0(\alpha)\,\theta_0 + \cdots + f_n(\alpha)\,\theta_n]\, d\alpha = F_0(x)\,\theta_0 + \cdots + F_n(x)\,\theta_n,$$

где
$$F_0(x) = \int_0^x f_0(\alpha)\, d\alpha,$$

а

$$F_s(x) = F_{s-1}(x_s) + \int_{x_s}^x f_s(\alpha)\, d\alpha \quad (s = \overline{1, n})$$

— правило интегрирования функций вида (9).

3. Если $x \in [x_s, x_{s+1}[$, то $f(x) = f_s(x)$. В частности, $f(1) = f_n(1)$.

Для функций $y_0^i = \varphi_i(x)$, используя второе свойство, получаем

$$y_0^0 = 1, \quad y_0^1 = \int_0^x [f_0\theta_0 + \cdots + f_n\theta_n]\, d\alpha =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} F_{0,k} x^k\right)\theta_0 + \cdots + \left(\sum_{k=0}^{\infty} F_{n,k}(x - x_n)^k\right)\theta_n,$$

где

$$F_{0,k}=\frac{f_{0,k}}{k};\quad F_{s,0}=\sum_{l=0}^{\infty}F_{s-1,l}(x_s-x_{s-1})^l;\quad F_{s,k}=\frac{f_{s,k-1}}{k}. \tag{11}$$

Далее, методом математической индукции легко определить вид функций $y_{j+1}^i(x)$ и $y_{j+1}^{i[1]}(x)$, поскольку рекуррентные формулы (6), (8) включают операции умножения и интегрирования только над функциями вида (9). Находим

$$y_{j+1}^i(x)=\left(\sum_{k=2j+i+2}^{\infty}y_{0,j+1}^{i,k}x^k\right)\theta_0+\cdots+\left(\sum_{k=0}^{\infty}y_{s,j+1}^{i,k}(x-x_s)^k\right)\theta_s. \tag{12}$$

Здесь коэффициенты $y_{s,j+1}^{i,k}$ $(k=2(j+1)+i,\ 2(j+1)+i+1,\ \ldots;\ s=\overline{0,\,n})$ определяются рекуррентными формулами, причем следует различать три случая:

1) $s=0$,

$$y_{0,j+1}^{i,k}=\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-2j-i+2}\frac{f_{0,r}}{k-2j-i-r-2}\left(\sum_{l=0}^{k-4j-2i-3}m_{0,l}y_{0,j}^{i,k-4j-2l-l-3}\right); \tag{13}$$

2) $s=1$,

$$\begin{aligned}y_{1,j+1}^{i,0}&=y_{0,j+1}^i(x_1)=\sum_{r=2j+i+2}^{\infty}y_{0,j+1}^{i,r}x^r,\\ y_{1,j+1}^{i,k}&=(y_{0,j+1}^i)^{[1]}(x_1)+\sum_{r=1}^{k-1}\frac{f_{i,k-r-1}}{r}\left(\sum_{l=0}^{r-1}m_{0,l}y_{0,j}^{i,r-1}\right);\end{aligned} \tag{14}$$

3) $s=\overline{2,\,n}$,

$$\begin{aligned}y_{s,j+1}^{i,0}&=y_{s-1,j+1}^i(x_s)=\sum_{r=0}^{\infty}y_{s-1,j+1}^{i,r}(x_s-x_{s-1})^r,\\ y_{s,j+1}^{i,k}&=(y_{s-1,j+1}^i)^{[1]}(x_s)f_{s,k-1}+\sum_{r=1}^{k-1}\frac{f_{i,k-r-1}}{r}\left(\sum_{l=0}^{r-1}m_{s,l}y_{s,i}^{i,r-s-1}\right).\end{aligned} \tag{15}$$

Аналогично для $(y_{j+1}^i)^{[1]}(x)$ справедливы представление

$$(y_{j+1}^i)^{[1]}(x)=$$
$$=\left(\sum_{k=2j+i+1}^{\infty}(y_{0,j+1}^{i,k})^{[1]}x^k\right)\theta_0+\cdots+\left(\sum_{k=0}^{\infty}(y_{s,j+1}^{i,k})^{[1]}(x-x_s)^k\right)\theta_s \tag{16}$$

и соответствующие рекуррентные формулы:

1) $s=0$,

$$(y_{0,j+1}^{i,k})^{[1]}=\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-2j-i-1}m_{0,r}y_{0,j}^{i,k-2j-i-1-r}; \tag{17}$$

2) $s=\overline{1,\,n}$,

$$\begin{aligned}(y_{s,j+1}^{i,0})^{[1]}&=(y_{s-1,j+1}^i)^{[1]}(x_s)=\sum_{r=0}^{\infty}(y_{s-1,j+1}^{i,r})^{[1]}(x_s-x_{s-1})^r,\\ (y_{s,j+1}^{i,k})^{[1]}&=\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}m_{s,r}y_{s,j}^{i,k-r-1}.\end{aligned} \tag{18}$$

Пусть теперь уравнение (1) рассматривается при краевых условиях

$$\begin{aligned}y(0)+ay^{[1]}(0)&=0,\\ y(1)+by^{[1]}(1)&=0,\end{aligned} \tag{19}$$

где a, b — некоторые числа (параметры). Учитывая, что $(y^i)^{[l]}(0) = \delta_{ie}$ (δ_{ie} — символ Кронекера), для задачи (1), (19) записываем характеристическое уравнение

$$[ay^0(1) - y^1(1)] + b[a(y^0)^{[1]}(1) - (y^1)^{[1]}(1)] = 0. \qquad (20)$$

Используя третье свойство и представления (12), (16), переписываем левую часть уравнения (20) в виде ряда по параметру λ:

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \lambda^j \sum_{k=0}^{\infty}\{[ay_{n,j}^{0,k} - y_{n,j}^{1,k}] + b[a(y_{n,j}^{0,k})^{[1]} - (y_{n,j}^{1,k})^{[1]}(1-x_n)^k]\} = 0. \qquad (21)$$

Здесь коэффициенты под знаком суммы определяются рекуррентными формулами (13) — (15) и (18) — (19).

При определенных условиях (действительность спектра) структура характеристического уравнения (21) дает возможность строить известными [3] способами последовательности двусторонних оценок собственных значений задачи (1), (19). Это условие выполняется, например, во многих задачах о колебаниях и устойчивости дискретно-континуальных систем.

x	Значение λ_1		
	снизу	сверху	известное решение
0	3,1713	3,2671	3,3342
0,25	3,4084	3,4132	—
0,5	3,2538	3,2792	—
0,75	2,8674	2,8897	—
1	2,4660	2,4675	$\frac{\pi^2}{4} = 2,4674\ldots$

В качестве примера рассмотрим задачу о продольных колебаниях консольного стержня кругового сечения, составленного из цилиндра и параболоида вращения:

$$\left(\frac{1}{f(x)}y'\right)' + \lambda F(x)\,y = 0, \quad y^{[1]}(0) = y(1) = 0, \qquad (22)$$

где $F(x) = F_0\theta_0 + F_0\left(1 + \frac{x - x_0}{e}\right)\theta_1$; $f(x) = F_0F^{-1}(x)$; $\lambda = \frac{\mu^2\rho}{EF_0}$; μ — частота колебаний; ρ — плотность материала; E — модуль Юнга; F_0 — площадь поперечного сечения цилиндра; x_0 — точка сопряжения; $l \equiv 1 - x_0$.

Полагая $y^0(1) \equiv y(1)$ (в силу специфики задачи один индекс можно опустить), записываем характеристическое уравнение в виде

$$1 - \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 - \lambda^3 y_3 + \cdots + (-1)^j \lambda^j y_j + \cdots = 0, \qquad (23)$$

где $y_j = \sum_{k=0}^{\infty} y_{j,k}$, а коэффициенты $y_{j,k}$ задаются рекуррентными формулами типа (13) — (15):

$$y_{j+1,0} = \frac{x_0^{2j+2}}{(2j+2)!}; \quad y_{j+1,1} = l\frac{x_0}{(2j+1)!};$$
$$y_{j+1,k} = \frac{l}{k}\left\{(-1)^{j-1}\frac{x_0^{2j+1}}{(2j+1)!} + l\sum_{s=1}^{k-1}\frac{(-1)^{k-s-1}}{s}(y_{j,s-1} + y_{j,s-2})\right\}. \qquad (24)$$

Для вычисления двусторонних оценок параметра λ основной частоты колебаний λ_1 использовались полиномы третьей и четвертой степеней [3]. Зависимость параметра λ_1 от размещения точки $x_0 \in [0, 1]$ приведена в таблице. Случай чисто параболоидального стержня ($x_0 = 0$) рассмотрен, например, в работе [4]. Приведенное в правом столбце таблицы $\lambda_1 \approx 3,3342$ было найдено там методом Галеркина. В случае $x_0 = 1$ (цилиндрический стержень) решение задачи (22) легко находится точно.

Отметим, что приведенная выше схема построения общего решения уравнения (1) может быть аналогично [2] обобщена на случай квазидифференциального уравнения произвольного порядка.

1. *Балинский А. И., Зорий Л. М.* К исследованию зависимости низших частот деформируемых систем от параметров.— Физ.-хим. механика материалов, 1971, № 3, с. 36—39.
2. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы.— М. : Наука, 1969.—526 с.
3. *Светлицкий В. А., Стасенко И. В.* Сборник задач по теории колебаний.— М. : Высш. школа, 1973.— 450 с.
4. *Таций Р. М.* К построению характеристических рядов многопараметрических континуальных систем.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1976, № 9, с. 819—821.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
27.05.81

УДК 532.6

В. Н. Юзевич

БАЛАНСОВЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ДЕФОРМИРУЕМЫХ ЭЛЕКТРОПРОВОДНЫХ СРЕДАХ С ФИЗИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ РАЗДЕЛА

Термодинамическое описание поверхностных процессов без учета влияния соседних объемов наиболее полно представлено в работах [3, 9]. Взаимосвязь поверхностных и объемных явлений учитывают, в частности, моделируя приконтактный слой физической поверхностью [2, 9]. В данной работе в отличие от громоздкого операторного метода [2] и метода обобщенных функций [5, 7, 10], который математически не вполне обоснован, предлагается метод получения уравнений, описывающих поверхностные и объемные явления в деформируемых электропроводных телах, основанный на использовании обобщенных теорем Остроградского — Гаусса, Стокса и транспортной.

Пусть в материальном континууме задано поле произвольной экстенсивной скалярной величины, плотность которой a, и векторное поле $\vec{b}$. Тогда для произвольного материального объема $V = V^+ + V^-$, ограниченного замкнутой поверхностью $A = A^+ + A^-$ и разделенного несубстанциональной физической поверхностью $A^п$, наделенной приведенными величинами $a^п$, $\vec{b}^п$ согласно методике, предложенной в работе [4], получим

$$\int_V \vec{b} \cdot d\vec{A} = \int_V \nabla \cdot \vec{b} dV + \int_{A^п} ([\vec{b}] \cdot \vec{N} + \nabla \cdot \vec{b}^п) dA, \tag{1}$$

$$\frac{d}{d\tau} \int_V a dV = \int_V \left(\frac{da}{d\tau} + a\nabla \cdot \vec{v} \right) dV + \int_{A^п} \left\{ [a(\vec{v} - \vec{v}^п)] \cdot \vec{N} + \frac{da^п}{d\tau} + a^п \nabla \cdot \vec{v}^п \right\} dA. \tag{2}$$

Здесь и в дальнейшем величины с индексами (+), (—), (п) определены в объемах V^+, V^- и на поверхности $A^п$; $[\vec{b}] = \vec{b}^+ - \vec{b}^-$; $[a(\vec{v} - \vec{v}^п)] = [a^+ (\vec{v}^+ - \vec{v}^п) - a^- (\vec{v}^- - \vec{v}^п)$; $\vec{N}$ — нормаль к поверхности раздела $A^п$, направленная из V^+ в V^-; $\vec{v}^\pm$, $\vec{v}^п$ — скорости центров масс [7]; τ — время.

Отметим, что из соотношений (1), (2) как частные случаи следуют известные теоремы Остроградского — Гаусса и транспортная [6, 8].

Интегральное уравнение баланса массы компонента k для произвольного материального объема V_k имеет вид

$$\frac{d}{d\tau} \int_{V_k} \rho_k dV = \sum_{j=1}^{r} \int_{V_k} \nu_{kj} \zeta_j dV, \tag{3}$$

где ρ_k —плотность компонента k; ζ_j, ν_{kj} — производство массы и стехиометрические коэффициенты j-й химической реакции.