

1. Андриевский Р. А., Бойко Е. Б., Солодинин А. М. Авторадиографическое изучение самодиффузии водорода в гидриде циркония.— Физика металлов и металловедение, 1979, 48, вып. 2, с. 348—351.
2. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений.— М.: Мир, 1964.— 517 с.
3. Еремеев В. С. Феноменологический анализ диффузии в металлических сплавах.— Физика металлов и металловедение, 1976, 42, вып. 2, с. 231—239.
4. Еремеев В. С., Хромов Ю. Ф., Ляхов Д. М., Алексеева И. С. Кинетика взаимодействия Zr с графитом.— Изв. АН СССР. Неорганические материалы, 1977, 13, № 11, с. 2014—2018.
5. Зубарев П. В., Рыжов П. А. Ползучесть гидридов.— Изв. АН СССР. Неорганические материалы, 1979, 15, № 2, с. 247—250.
6. Ковригин В. Н., Еремеев В. С., Иванов В. К. Влияние напряженного состояния окисной пленки на характер окисления циркония.— В кн.: Ежегодная конференция преподавателей и студентов МИФИ. М., 1970, с. 47—53.
7. Мюллер В., Блэкледж Д., Либовиц Дж. Гидриды металлов.— М.: Атомиздат, 1973.— 431 с.
8. Подстригач Я. С. Диффузионная теория неупругости металлов.— Журн. прикл. механики и техн. физики, 1965, № 2, с. 67—72.
9. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем.— М.: Наука, 1971.— 552 с.
10. Фастов Н. С., Любов Б. Я. Влияние концентрационных напряжений на процесс диффузии в твердых растворах.— Докл. АН СССР, 1952, 84, № 5, с. 939—941.
11. Nathan M. E. Theoretical kinetics and stresses for delta-phase isothermal hydriding of uranium—zirconium. Canoga Park (Cal.), 1962.— 49 p. NAA—SR—6264—A division of North American aviation.

г. Москва

Поступила в редколлегию  
01.04.81

УДК 534.113

В. М. Флячок, Р. Н. Швец

**ВЛИЯНИЕ НЕРАВНОМЕРНОГО НАГРЕВА  
НА СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ  
АНИЗОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК**

Рассмотрим конечную ортотропную цилиндрическую оболочку, находящуюся в напряженном состоянии, обусловленном осесимметричными силовыми и температурными нагрузками. Это напряженное состояние принимаем как начальное, относительно которого происходят малые свободные колебания оболочки. Для исследования этих колебаний исходим из системы уравнений движения, учитывающих анизотропию материала, обусловленную низкой сдвиговой жесткостью и трансверсальной сжимаемостью [6]. Следуя работам [1, 3], учитываем также начальное напряженное состояние, которое предполагаем плоским и однородным. Данную систему записываем в виде

$$\sum_{j=1}^6 L_{ij} y_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6). \quad (1)$$

Здесь

$$L_{ij} = L_{ji}; \quad y_r = u_r; \quad y_{r+3} = \gamma_r \quad (r = 1, 2, 3);$$

$$L_{11} = c_{11} \partial_{11}^2 + c_{44} \partial_{22}^2 - c_{\tau} \partial_{\tau}^2 + \frac{1}{2h} [\partial_1 (N_1^0 \partial_1) + \partial_2 (N_2^0 \partial_2)];$$

$$L_{12} = (c_{12} + c_{44}) \partial_{12}^2; \quad L_{13} = c_{12} \partial_1; \quad L_{14} = L_{15} = 0; \quad L_{16} = c_{13} \partial_1;$$

$$L_{22} = c_{22} \partial_{22}^2 + c_{44} \partial_{11}^2 - c'_{66} - c_{\tau} \partial_{\tau}^2 + \frac{1}{2h} [\partial_1 (N_1^0 \partial_1) + \partial_2 (N_2^0 \partial_2) - N_2^0];$$

$$L_{23} = (c_{22} + c'_{66}) \partial_2 + \frac{1}{2h} (\partial_2 N_2^0 + 2N_2^0 \partial_2); \quad L_{24} = 0; \quad L_{25} = c'_{66};$$

$$L_{26} = c_{23} \partial_2; \quad L_{34} = -c'_{55} \partial_1; \quad L_{35} = -c'_{66} \partial_2; \quad L_{36} = c_{23};$$

$$L_{33} = - \left\{ c'_{55} \partial_{11}^2 + c'_{66} \partial_{22}^2 - c_{22} - c_{\tau} \partial_{\tau}^2 + \frac{1}{2h} [\partial_1 (N_1^0 \partial_1) + \partial_2 (N_2^0 \partial_2) - N_2^0] \right\};$$

$$L_{44} = (c_{11} \partial_{11}^2 + c_{44} \partial_{22}^2) \delta^2 - c'_{55} - \delta^2 c_{\tau} \partial_{\tau}^2; \quad L_{45} = \delta^2 (c_{12} + c_{44}) \partial_{12}^2;$$

$$L_{46} = \delta^2 c_{12} \partial_1; \quad L_{55} = (c_{44} \partial_{11}^2 + c_{22} \partial_{22}^2) \delta^2 - c_{66} - \delta^2 c_{\tau} \partial_{\tau}^2;$$

$$L_{66} = \delta^2 c_{22} \partial_2; \quad L_{66} = -[(c_{55} \partial_{11}^2 + c_{66} \partial_{22}^2 - c_{22}) \delta^2 - c_{33} - \delta^2 c_{\tau} \partial_{\tau}^2];$$

$$\partial_{\tau} = \partial / \partial \tau; \quad \partial_{ij}^2 = \partial^2 / \partial \alpha_i \partial \alpha_j; \quad c_{55} = c_{55} h'; \quad c_{66} = c_{66} h'; \quad \delta^2 = h^2 / 3R^2;$$

$c_{ij}$  — коэффициенты жесткости ортотропного тела;  $u_r, \gamma_r$  ( $r = 1, 2, 3$ ) — обобщенные перемещения срединной поверхности оболочки;  $2h$  — толщина оболочки;  $R$  — радиус срединной поверхности;  $\tau$  — безразмерное время.

Входящие в уравнения (1) начальные усилия  $N_i^0$  вызываются осесимметричным стационарным температурным полем оболочки при неравномерном ее нагреве. Для определения этого температурного поля необходимо решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений теплопроводности, которая в предположении о линейном законе изменения температуры по толщине имеет вид [5]

$$(h^2 \lambda_{11} / R^2 \lambda_{33}) T_{1,11} - \mu_1 T_1 + (h/R - \mu_2) T_2 = -(\mu_1 t_1^c + \mu_2 t_2^c), \quad (2)$$

$$(h^2 \lambda_{11} / R^2 \lambda_{33}) T_{2,11} - 3(1 + \mu_1) T_2 - 3\mu_2 T_1 = -3(\mu_2 t_1^c + \mu_1 t_2^c)$$

при граничных условиях

$$T_1 = t_3, \quad T_2 = t_4 \quad \text{при } \alpha_1 = 0, \quad (3)$$

$$T_1 = t_5, \quad T_2 = t_6 \quad \text{при } \alpha_1 = l/R.$$

Здесь  $\mu_i$  — относительные коэффициенты теплоотдачи с боковых поверхностей оболочки;  $t_i^c$  — температура окружающих сред, омывающих эти поверхности;  $T_i$  — интегральные характеристики температуры;  $\lambda_{ii}$  — коэффициенты теплопроводности;  $l$  — длина оболочки.

Разрешающие уравнения для определения начального напряженного состояния в цилиндрической оболочке, вызванного найденным из системы (2), (3) температурным полем, получим, подставив в уравнения равновесия

$$N_{1,1}^0 = 0, \quad Q_{1,1}^0 - N_2^0 = 0, \quad M_{1,1}^0 - RQ_1^0 = 0, \quad M_{13,1}^0 - M_2^0 - RN_3^0 = 0 \quad (4)$$

следующие соотношения упругости:

$$N_1^0 = (2h/R) (c_{11} u_{1,1}^0 + c_{12} u_3^0 + c_{13} R \gamma_3^0 - \beta_{11} R T_1),$$

$$N_2^0 = (2h/R) (c_{12} u_{1,1}^0 + c_{22} u_3^0 + c_{23} R \gamma_3^0 - \beta_{22} R T_1);$$

$$N_3^0 = (2h/R) (c_{13} u_{1,1}^0 + c_{23} u_3^0 + c_{33} R \gamma_3^0 - \beta_{33} R T_1), \quad (5)$$

$$Q_1^0 = (2h/R) c_{55} (u_{3,1}^0 + R \gamma_1^0), \quad M_{13}^0 = (2h^3/3R) c_{55} \gamma_{3,1}^0,$$

$$M_1^0 = (2h^3/3R) (c_{11} \gamma_{1,1}^0 + c_{12} \gamma_3^0 - \beta_{11} T_2 R/h),$$

$$M_2^0 = (2h^3/3R) (c_{12} \gamma_{1,1}^0 + c_{22} \gamma_3^0 - \beta_{22} T_2 R/h),$$

где  $N_1^0, N_2^0, N_3^0, Q_1^0, M_1^0, M_2^0, M_{13}^0$  — начальные усилия и моменты;  $u_r^0, \gamma_r^0$  ( $r = 1, 2, 3$ ) — обобщенные перемещения, соответствующие начальному напряженному состоянию;  $\beta_{rr}$  — коэффициенты, связанные с линейным тепловым расширением ортотропного тела.

Уравнения (4) с учетом (5) представляют собой систему неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций  $u_1^0, u_3^0, \gamma_1^0, \gamma_3^0$ . Решение этой системы состоит из общего решения однородных уравнений, зависящего от корней характеристического уравнения, и частного решения неоднородной системы, зависящего от вида температурных характеристик  $T_1, T_2$ . Входящие в решение константы определяем, удовлетворяя граничным условиям на торцах оболочки. Подставляя найденные решения в соотношения (5), находим напряженное состояние, возникающее в осесимметричной цилиндрической оболочке при неравномерном ее нагреве.

Для исследования свободных колебаний осесимметрично нагретой цилиндрической оболочки исходим из системы однородных уравнений (1), содержащих лишь начальное окружное  $N_2^0$  и осевое  $N_1^0$  усилия, поскольку,

как показано в работах [1, 3, 4], моментность начального докритического напряженного состояния почти не влияет на величины собственных частот. Решения уравнений движения (1) ищем в виде

$$\begin{aligned} \{u_1; \gamma_1\} &= \sum_{n,m} \{U_{1nm}; \Gamma_{1nm}\} \chi_{1n}(\lambda_n \alpha_1) \cos m\alpha_2 \cos \omega t, \\ \{u_2; \gamma_2\} &= \sum_{n,m} \{U_{2nm}; \Gamma_{2nm}\} \chi_{2n}(\lambda_n \alpha_1) \sin m\alpha_2 \cos \omega t, \\ \{u_3; \gamma_3\} &= \sum_{n,m} \{U_{3nm}; \Gamma_{3nm}\} \chi_{3n}(\lambda_n \alpha_1) \cos m\alpha_2 \cos \omega t, \end{aligned} \quad (6)$$

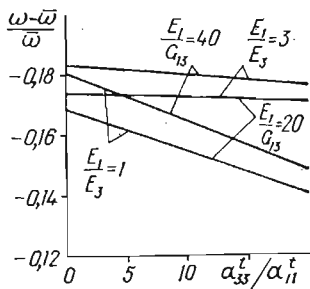


Рис. 1

где  $\lambda_n = \pi n R / l$ ;  $\chi_{1n} = \chi_{2n,1}$ ;  $\omega$  — безразмерная круговая частота;  $n$  — число полуволн по длине оболочки;  $m$  — количество волн по окружности поперечного сечения.

Координатную функцию  $\chi_{in}(\lambda_n \alpha_1)$  выбираем в зависимости от граничных условий на торцах оболочки. При шарнирном опирании  $\chi_{2n}(\lambda_n \alpha_1) = \chi_{3n}(\lambda_n \alpha_1) = \sin \lambda_n \alpha_1$ , при жестком защемлении [2]  $\chi_{2n}(\lambda_n \alpha_1) = \chi_{3n}(\lambda_n \alpha_1) = \cos \lambda_n \alpha_1 - \cos \frac{(n+2)\pi R}{l} \alpha_1$ .

Подставляя решение (6) и найденные выражения для нормальных усилий  $N_1^0, N_2^0$  в уравнения (1) и интегрируя их по методу Бубнова — Галеркина, получаем бесконечную систему линейных однородных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов  $U_{rnm}, \Gamma_{rnm}$  ( $r = 1, 2, 3$ ). Условие нетривиальности решения этой системы служит для определения частот собственных колебаний. Если в решениях (6) ограничиться одним любым членом, то частотное уравнение можно представить в виде

$$\det (A_{ij} - \delta_i^j \omega^2) = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6). \quad (7)$$

Здесь  $\delta_i^j$  — символ Кронекера;  $A_{ij}$  — известные выражения.

С целью изучения влияния анизотропных свойств материала и начальных температурных напряжений на частоты собственных колебаний защемленной цилиндрической оболочки проведены численные расчеты при  $\nu_{1,2} = \nu_{21} = 0,15, \nu_{31} = 0,3, E_1/E_2 = 1, \mu_2 = 0, \mu_1 = 1$  и различных значениях других параметров. При этом предполагалось, что торцы оболочки поддерживаются при нулевой температуре, а температуры окружающих сред, омывающих внешнюю и внутреннюю поверхности, соответственно равны 80 и 0° С. Изменение собственной частоты низшего изгибного типа колебаний нагретой оболочки ( $\omega$ ) по отношению к частоте ненагретой оболочки ( $\bar{\omega}$ ) для широкого диапазона геометрических и физических параметров показано на рис. 1—3.

Как следует из проведенного вычислительного анализа и рисунков, влияние тепловых деформаций на частоты колебаний существенным образом зависит от анизотропии механических и теплофизических свойств материала, температуры нагрева, толщины оболочки, ее длины и числа волн по окружности оболочки. Для данного способа нагрева и закрепления торцов наблюдали понижение собственных частот по сравнению с такой же ненагретой оболочкой при всех рассматриваемых нами параметрах. При этом снижение частот обусловлено в основном действием осевого температурного усилия. В нагретой цилиндрической оболочке число волн по окружности, соответствующее минимальной частоте, больше чем в ненагретой. Жесткости в поперечном направлении  $\frac{E_1}{G_{13}}, \frac{E_1}{E_3}$  и коэффициент поперечного линейного расширения  $\frac{\alpha'_{33}}{\alpha''_{11}}$  неодинаково оказывают влияние на величину  $\frac{\omega - \bar{\omega}}{\bar{\omega}}$  при различных толщинах и длинах оболочек.

Для коротких оболочек ( $\lambda_n > 3$ ) с возрастанием отношения  $E_1/G_{13}$  величина относительной разности частот увеличивается (см. рис. 2 при  $\lambda_n = 10$ ;  $m = 5$ ;  $E_1 = E_3$ ;  $\alpha_{11}^t = \alpha_{33}^t$ ). При фиксированной сдвиговой жесткости  $(\frac{E_1}{G_{13}})$  влияние поперечного линейного расширения на относительную разность частот с уменьшением отношения  $\frac{E_1}{E_3}$  усиливается (см. рис. 1). Увеличение жесткости в продольном направлении

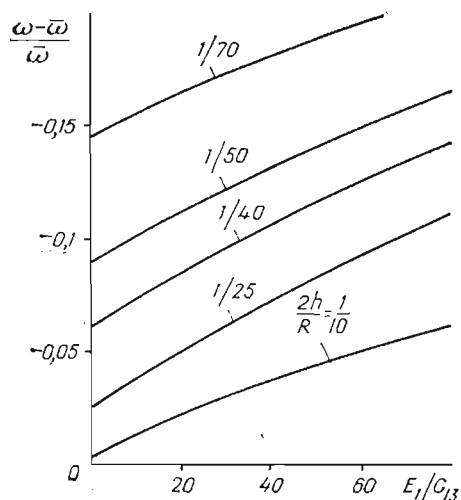


Рис. 2

( $\frac{E_1}{E_3}$ ) приводит также к усилению влия-

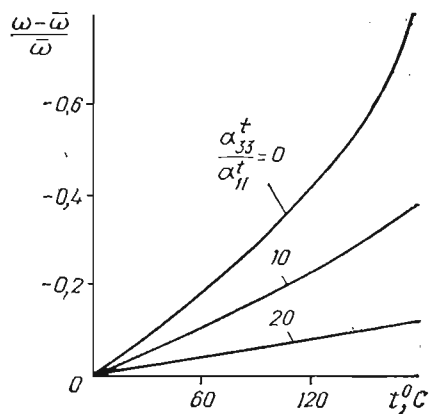


Рис. 3

ния температурных напряжений на собственные частоты в сторону их понижения. Это же наблюдаем при уменьшении толщины оболочки (см. рис. 2), а также при увеличении температуры ее нагрева (см. рис. 3). Из рис. 3 видно, что учет основными уравнениями изменения длины нормального элемента, обусловленного тепловым расширением, значительно повышает влияние температурных деформаций на частоты собственных колебаний. Так, если при рассматриваемых значениях параметров частота колебаний за счет нагрева до  $80^\circ\text{C}$  при  $\frac{\alpha_{33}^t}{\alpha_{11}^t} = 0$  снизилась на 25%, а при  $\frac{\alpha_{33}^t}{\alpha_{11}^t} = 10$  — на 14%, то при  $\frac{\alpha_{33}^t}{\alpha_{11}^t} = 20$  — всего лишь на 5%.

Для изучения собственных колебаний предварительно напряженной цилиндрической оболочки при совместном действии силовых и температурных нагрузок величины  $N_1^0$  и  $N_2^0$ , входящие в исходные уравнения (1), необходимо разделить на две составляющие, соответственно  $N_1^T + N_1^c$  и  $N_2^T + N_2^c$ , которые отвечают температурным и силовым нагрузкам.

Из проведенного вычислительного анализа следует, что влияние температурных напряжений на частоту колебаний становится более ощутимым, если кроме них на оболочку действуют еще сжимающие осевые или окружные усилия.

1. Арменакас А. Е. Влияние начальных напряжений на колебания свободно опертых круговых цилиндрических оболочек. — Ракет. техника и космонавтика, 1964, № 9, с. 115—122.
2. Емельяненко В. В. Собственные колебания слоистых анизотропных оболочек под действием внешнего гидростатического давления. — Прикл. механика, 1975, 11, вып. 8, с. 57—63.
3. Киричок И. Ф. Динамика тонких упругих оболочек с начальными напряжениями. — Прикл. механика, 1970, 6, вып. 3, с. 16—24.
4. Киричок И. Ф. Влияние начальных температурных напряжений на собственные колебания ортотропных цилиндрических оболочек. — Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1970, вып. 9, с. 281—290.

5. Подстригач Я. С., Швець Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. — Киев : Наук. думка, 1978. — 344 с.
6. Швець Р. М., Флячок В. М. Основні рівняння термопружних ортогопних оболонок з урахуванням поперечних зсувних і нормальних деформацій. — Доп. АН УРСР. Сер. А, 1976, № 6, с. 539—543.

Украинский полиграфический институт  
Институт прикладных проблем механики  
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию  
29.04.81

УДК 539.377

Н. И. Бугрий

**К ПОСТРОЕНИЮ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ  
ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА ЛАГРАНЖА**

Пусть тонкостенная изотропная оболочка постоянной толщины  $2h$ , отнесенная к смешанной ортогональной криволинейной системе координат  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , находится под действием заданных температурного поля  $t(\alpha, \beta, \gamma, \tau)$ , массовых  $\vec{F}(\alpha, \beta, \gamma, \tau)$  и внешних поверхностных  $\vec{f}_n(\alpha, \beta, \gamma, \tau)$  сил. При нулевых начальных условиях система уравнений и граничных условий динамической задачи несвязанной термоупругости оболочек, сформулированной относительно компонент вектора перемещений  $\vec{U}(\alpha, \beta, \gamma, \tau) = (U_1, U_2, U_3)$ , может быть получена минимизацией функционала

$$\begin{aligned}
 K[U_1, U_2, U_3] = & \frac{1}{2E} \int_0^{\tau_0} \int_0^{\tau} \int_0^{\tau} \left[ \sigma_{\alpha\alpha} \sigma_{\alpha\alpha}^* + \sigma_{\beta\beta} \sigma_{\beta\beta}^* + \sigma_{\gamma\gamma} \sigma_{\gamma\gamma}^* - 2\nu (\sigma_{\alpha\alpha} \sigma_{\beta\beta}^* + \right. \\
 & \left. + \sigma_{\alpha\alpha} \sigma_{\gamma\gamma}^* + \sigma_{\beta\beta} \sigma_{\gamma\gamma}^*) + 2(1+\nu) (\sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}^* + \sigma_{\gamma\alpha} \sigma_{\gamma\alpha}^* + \sigma_{\beta\gamma} \sigma_{\beta\gamma}^*) - E\rho \left( \frac{\partial U_1}{\partial \xi} \frac{\partial U_1^*}{\partial \xi} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\partial U_2}{\partial \xi} \frac{\partial U_2^*}{\partial \xi} + \frac{\partial U_3}{\partial \xi} \frac{\partial U_3^*}{\partial \xi} \right) - 2E\rho (F_1^* U_1 + F_2^* U_2 + F_3^* U_3) \right] d\xi dV d\tau - \\
 & - \int_0^{\tau_0} \int_0^{\tau} \int_0^{\tau} (f_1^* U_1 + f_2^* U_2 + f_3^* U_3) d\xi d\Sigma d\tau, \quad (1)
 \end{aligned}$$

определенного на множестве функций  $U_1, U_2, U_3$ . Здесь  $(V)$  — область, занимаемая оболочкой;  $(\Sigma) = (\Sigma^+) + (\Sigma^-) + (\Sigma')$  — поверхность оболочки, где  $(\Sigma^\pm)$  — поверхность при  $\gamma = \pm h$  соответственно;  $(\Sigma')$  — поверхность граничных сечений;  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $F_i, f_i$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) — компоненты векторов  $\vec{F}$  и  $\vec{f}_n$  соответственно;  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = \overline{1, 3}$ ) — компоненты тензора напряжений, которые считаются представленными через компоненты вектора перемещений;  $\tau$  — время; звездочкой обозначена операция смещения по времени, а именно:  $g^*(\alpha, \beta, \gamma, p) = g(\alpha, \beta, \gamma, \tau - \xi)$ ; индексы  $\overline{1, 3}$  соответствуют координатным линиям  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Функционал (1) является обобщением вариационного принципа Лагранжа в теории упругости и термоупругости [1, 3, 5—10]. Отметим, что в отличие от известных в литературе вариационных принципов динамической задачи теории упругости [2] и термоупругости [9] исходный функционал задан на множестве функций  $U_1, U_2, U_3$ .

Для построения приближенной системы уравнений динамической термоупругости тонких оболочек принимается, что распределение перемещений по толщине оболочки представляется в виде разложения по некоторой полной системе функций  $\{\varphi_m(\gamma)\}$ , непрерывных на отрезке  $[-h, h]$ . При этом ограничимся конечным числом членов разложения функций  $U_1, U_2, U_3$ :

$$U_1 = u_m \varphi_m, \quad U_2 = v_m \varphi_m, \quad U_3 = w_m \varphi_m \quad (m = \overline{0, n}). \quad (2)$$