5. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек.— Киев : Наук. думка, 1978.— 344 с.
6. *Швець Р. М., Флячок В. М.* Основні рівняння термопружних ортотропних оболонок з урахуванням поперечних зсувних і нормальних деформацій.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1976, № 6, с. 539–543.

Украинский полиграфический институт
Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 29.04.81

УДК 539.377

Н. И. Бугрий

К ПОСТРОЕНИЮ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА ЛАГРАНЖА

Пусть тонкостенная изотропная оболочка постоянной толщины $2h$, отнесенная к смешанной ортогональной криволинейной системе координат (α, β, γ), находится под действием заданных температурного поля $t(\alpha, \beta, \gamma, \tau)$, массовых $\vec{F}(\alpha, \beta, \gamma, \tau)$ и внешних поверхностных $\vec{f}_n(\alpha, \beta, \gamma, \tau)$ сил. При нулевых начальных условиях система уравнений и граничных условий динамической задачи несвязанной термоупругости оболочек, сформулированной относительно компонент вектора перемещений $\vec{U}(\alpha, \beta, \gamma, \tau) = (U_1, U_2, U_3)$, может быть получена минимизацией функционала

$$K[U_1, U_2, U_3] = \frac{1}{2E}\int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_{(V)}\int\limits_0^{\tau}\Big[\sigma_{\alpha\alpha}\overset{*}{\sigma}_{\alpha\alpha} + \sigma_{\beta\beta}\overset{*}{\sigma}_{\beta\beta} + \sigma_{\gamma\gamma}\overset{*}{\sigma}_{\gamma\gamma} - 2\nu(\sigma_{\alpha\alpha}\overset{*}{\sigma}_{\beta\beta} + \sigma_{\alpha\alpha}\overset{*}{\sigma}_{\gamma\gamma} + \sigma_{\beta\beta}\overset{*}{\sigma}_{\gamma\gamma}) + 2(1+\nu)(\sigma_{\alpha\beta}\overset{*}{\sigma}_{\alpha\beta} + \sigma_{\gamma\alpha}\overset{*}{\sigma}_{\gamma\alpha} + \sigma_{\beta\gamma}\overset{*}{\sigma}_{\beta\gamma}) - E\rho\left(\frac{\partial U_1}{\partial\xi}\frac{\partial U_1^*}{\partial\xi} + \frac{\partial U_2}{\partial\xi}\frac{\partial U_2^*}{\partial\xi} + \frac{\partial U_3}{\partial\xi}\frac{\partial U_3^*}{\partial\xi}\right) - 2E\rho(F_1^*U_1 + F_2^*U_2 + F_3^*U_3)\Big]\,d\xi\,dV\,d\tau - \int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_{(\Sigma)}\int\limits_0^{\tau}(f_1^*U_1 + f_2^*U_2 + f_3^*U_3)\,d\xi\,d\Sigma\,d\tau, \quad (1)$$

определенного на множестве функций U_1, U_2, U_3. Здесь (V) — область, занимаемая оболочкой; $(\Sigma) = (\Sigma^+) + (\Sigma^-) + (\Sigma')$ — поверхность оболочки, где $(\Sigma^\pm)$ — поверхность при $\gamma = \pm h$ соответственно; (Σ') — поверхность граничных сечений; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; F_i, f_i $(i = \overline{1, 3})$ — компоненты векторов $\vec{F}$ и $\vec{f}_n$ соответственно; σ_{ij} $(i, j = \overline{1, 3})$ — компоненты тензора напряжений, которые считаются представленными через компоненты вектора перемещений; τ — время; звездочкой обозначена операция смещения по времени, а именно: $g^*(\alpha, \beta, \gamma, p) = g(\alpha, \beta, \gamma, \tau - \xi)$; индексы $\overline{1, 3}$ соответствуют координатным линиям α, β, γ.

Функционал (1) является обобщением вариационного принципа Лагранжа в теории упругости и термоупругости [1, 3, 5—10]. Отметим, что в отличие от известных в литературе вариационных принципов динамической задачи теории упругости [2] и термоупругости [9] исходный функционал задан на множестве функций U_1, U_2, U_3.

Для построения приближенной системы уравнений динамической термоупругости тонких оболочек принимается, что распределение перемещений по толщине оболочки представляется в виде разложения по некоторой полной системе функций $\{\varphi_m(\gamma)\}$, непрерывных на отрезке $[-h, h]$. При этом ограничимся конечным числом членов разложения функций U_1, U_2, U_3:

$$U_1 = u_m\varphi_m, \quad U_2 = v_m\varphi_m, \quad U_3 = w_m\varphi_m \quad (m = \overline{0, n}). \quad (2)$$

Здесь и в дальнейшем повторяющиеся индексы являются индексами суммирования.

Вариационная задача для функционала (1) с учетом (2) в качестве уравнений Остроградского — Эйлера и естественных граничных условий дает следующую систему дифференциальных уравнений в области (Σ_0) срединной поверхности оболочки:

$$\frac{\partial BM_{\alpha\alpha}^{(m)}}{\partial\alpha} + \frac{\partial AN_{\alpha\beta}^{(m)}}{\partial\beta} + M_{\alpha\beta}^{(m)}\frac{\partial A}{\partial\beta} - N_{\beta\beta}^{(m)}\frac{\partial B}{\partial\alpha} +$$

$$+ ABk_1M_{\gamma\alpha}^{(m)} + ABq_{1m} - ABQ_{\gamma\alpha}^{(m)} = \rho ABA_{lm}^0\frac{\partial^2 u_l}{\partial\tau^2},$$

$$\frac{\partial BM_{\alpha\beta}^{(m)}}{\partial\alpha} + \frac{\partial AN_{\beta\beta}^{(m)}}{\partial\beta} + N_{\alpha\beta}^{(m)}\frac{\partial B}{\partial\alpha} - M_{\alpha\alpha}^{(m)}\frac{\partial A}{\partial\beta} + ABk_2N_{\beta\gamma}^{(m)} +$$

$$+ ABq_{2m} - ABQ_{\beta\gamma}^{(m)} = \rho ABA_{lm}^0\frac{\partial^2 v_l}{\partial\tau^2}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial BM_{\gamma\alpha}^{(m)}}{\partial\alpha} + \frac{\partial AN_{\beta\gamma}^{(m)}}{\partial\beta} - AB\left(k_1M_{\alpha\alpha}^{(m)} + k_2N_{\beta\beta}^{(m)}\right) + ABq_{3m} -$$

$$- ABQ_{\gamma\gamma}^{(m)} = \rho ABA_{lm}^0\frac{\partial^2 w_l}{\partial\tau^2}$$

и граничных условий на контуре (Γ) срединной поверхности (Σ_0):

$$BM_{\alpha\alpha}^{(m)}\cos(\vec{n}, \vec{e}_1) + AN_{\alpha\beta}^{(m)}\cos(\vec{n}, \vec{e}_2) = f_{1m},$$

$$BM_{\alpha\beta}^{(m)}\cos(\vec{n}, \vec{e}_1) + AN_{\beta\beta}^{(m)}\cos(\vec{n}, \vec{e}_2) = f_{2m}, \tag{4}$$

$$BM_{\gamma\alpha}^{(m)}\cos(\vec{n}, \vec{e}_1) + AN_{\beta\gamma}^{(m)}\cos(\vec{n}, \vec{e}_2) = f_{3m},$$

где

$$M_{\alpha i}^{(m)} = \int_{-h}^{h}(1 + k_2\gamma)\,\sigma_{\alpha i}\varphi_m d\gamma;\quad N_{i\beta}^{(m)} = \int_{-h}^{h}(1 + k_1\gamma)\,\sigma_{i\beta}\varphi_m d\gamma;$$

$$Q_{i\gamma}^{(m)} = \int_{-h}^{h}(1 + k_1\gamma)(1 + k_2\gamma)\,\sigma_{i\gamma}\varphi_m' d\gamma;\quad A_{lm}^0 = \int_{-h}^{h}(1 + k_1\gamma)(1 + k_2\gamma)\,\varphi_l\varphi_m d\gamma;$$

$$q_{jm} = (1 + k_1h)(1 + k_2h)\,\varphi_m(h)\,f_j^{(+)} - (1 -$$

$$- k_1h)(1 - k_2h)\,\varphi_m(-h)\,f_j^{(-)} + \rho\int_{-h}^{h}(1 + k_1\gamma)(1 + k_2\gamma)\,F_j\varphi_m d\gamma;$$

$$f_{jm} = \int_{-h}^{h} f_j\varphi_m d\gamma\quad (m,\ l = \overline{0,\ n}),\quad (j = \overline{1,\ 3}); \tag{5}$$

A, B — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности (Σ_0); k_1, k_2 — главные кривизны поверхности (Σ_0); $f_j^{(\pm)}$ — значение функций f_j при $\gamma = \pm h$ соответственно; штрихом обозначена производная по γ от $\varphi_m(\gamma)$.

Используя представление (2), записываем соотношения Коши [4, 9] в виде

$$e_{\alpha\alpha} = \frac{\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(m)}\varphi_m}{1 + k_1\gamma},\quad e_{\beta\beta} = \frac{\varepsilon_{\beta\beta}^{(m)}\varphi_m}{1 + k_2\gamma},\quad e_{\gamma\gamma} = w_m\varphi_m',$$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_{1\alpha\beta}^{(m)}\varphi_m}{1 + k_1\gamma} + \frac{\varepsilon_{2\alpha\beta}^{(m)}\varphi_m}{1 + k_2\gamma}\right),\quad e_{\gamma\alpha} = \frac{1}{2}\left(u_m\varphi_m' + \frac{\varepsilon_{\gamma\alpha}^{(m)}\varphi_m}{1 + k_1\gamma}\right), \tag{6}$$

$$e_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(v_m\varphi_m' + \frac{\varepsilon_{\beta\gamma}^{(m)}\varphi_m}{1 + k_2\gamma}\right)\quad (m = \overline{0,\ n}).$$

Здесь

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(m)} = \frac{1}{A}\frac{\partial u_m}{\partial \alpha} + \frac{v_m}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta} + k_1 w_m; \quad \varepsilon_{1\alpha\beta}^{(m)} = \frac{1}{A}\frac{\partial v_m}{\partial \alpha} - \frac{u_m}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta};$$

$$\varepsilon_{\beta\beta}^{(m)} = \frac{1}{B}\frac{\partial v_m}{\partial \beta} + \frac{u_m}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha} + k_2 w_m; \quad \varepsilon_{2\alpha\beta}^{(m)} = \frac{1}{B}\frac{\partial u_m}{\partial \beta} - \frac{v_m}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha};$$

$$\varepsilon_{\gamma\alpha}^{(m)} = \frac{1}{A}\frac{\partial w_m}{\partial \alpha} - k_1 u_m; \quad \varepsilon_{\beta\gamma}^{(m)} = \frac{1}{B}\frac{\partial w_m}{\partial \beta} - k_2 v_m. \tag{7}$$

Найдем связь между коэффициентами (7) разложения (6) и величинами $M_{\alpha i}^{(m)}$, $N_{i\beta}^{(m)}$, $Q_{i\gamma}^{(m)}$. Для этого используем выражение плотности свободной энергии [9]

$$f = F_0 + \frac{E\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)} e^2 + \frac{E}{2(1+\nu)} e_{ij}^2 - \frac{c_V t}{2T} - \frac{\alpha_T E}{1-2\nu} et. \tag{8}$$

При этом

$$df = -sdT + \delta W, \tag{9}$$

где

$$\delta W = \sigma_{\alpha\beta} de_{\alpha\beta}. \tag{10}$$

Здесь c_V — теплоемкость системы при постоянном объеме; s — удельная энтропия; F_0 — начальное значение свободной энергии; e, e_{ij}^2 — первый и второй инварианты тензора деформаций соответственно; T — абсолютная температура; α_T — линейный коэффициент температурного расширения.

Используя формулы (5), (6), (8) — (10), нетрудно показать, что

$$M_{\alpha\alpha}^{(m)} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(m)}}, \quad M_{\alpha\beta}^{(m)} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{1\alpha\beta}^{(m)}}, \quad M_{\gamma\alpha}^{(m)} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{\gamma\alpha}^{(m)}}, \quad N_{\alpha\beta}^{(m)} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{2\alpha\beta}^{(m)}},$$

$$N_{\beta\beta}^{(m)} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{\beta\beta}^{(m)}}, \quad N_{\beta\gamma}^{(m)} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{\beta\gamma}^{(m)}}, \quad Q_{\gamma\alpha}^{(m)} = \frac{\partial F}{\partial u_m}, \quad Q_{\beta\gamma}^{(m)} = \frac{\partial F}{\partial v_m},$$

$$Q_{\gamma\gamma}^{(m)} = \frac{\partial F}{\partial w_m} \quad (m = \overline{0, n}), \tag{11}$$

где

$$F = \int_{-h}^{h} (1 + k_1\gamma)(1 + k_2\gamma) f d\gamma \tag{12}$$

есть свободная энергия элемента оболочки, рассчитанная на единицу площади срединной поверхности. С учетом выражений (6) — (12) имеем

$$M_{\alpha\alpha}^{(m)} = \frac{E}{1+\nu}\left[A_{ml}\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(l)} + \frac{\nu}{1-2\nu}(A_{ml}\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(l)} + D_{ml}\varepsilon_{\beta\beta}^{(l)} + P_{ml}w_l)\right] - \frac{\alpha_T E}{1-2\nu} T_m^{(2)},$$

$$M_{\alpha\beta}^{(m)} = \frac{E}{4(1+\nu)}(A_{ml}\varepsilon_{1\alpha\beta}^{(l)} + D_{ml}\varepsilon_{2\alpha\beta}^{(l)}), \quad M_{\gamma\alpha}^{(m)} = \frac{E}{4(1+\nu)}(A_{ml}\varepsilon_{\gamma\alpha}^{(l)} + P_{ml}u_l),$$

$$N_{\alpha\beta}^{(m)} = \frac{E}{4(1+\nu)}(B_{ml}\varepsilon_{2\alpha\beta}^{(l)} + D_{ml}e_{1\alpha\beta}^{(l)}), \tag{13}$$

$$N_{\beta\beta}^{(m)} = \frac{E}{1+\nu}\left[B_{ml}\varepsilon_{\beta\beta}^{(l)} + \frac{\nu}{1-2\nu}(B_{ml}\varepsilon_{\beta\beta}^{(l)} + D_{ml}\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(l)} + R_{ml}w_l)\right] - \frac{\alpha_T E}{1-2\nu} T_m^{(1)},$$

$$N_{\beta\gamma}^{(m)} = \frac{E}{4(1+\nu)}(B_{ml}\varepsilon_{\beta\gamma}^{(l)} + R_{ml}v_l), \quad Q_{\gamma\alpha}^{(m)} = \frac{E}{4(1+\nu)}(C_{ml}u_l + P_{lm}\varepsilon_{\gamma\alpha}^{(l)}),$$

$$Q_{\beta\gamma}^{(m)} = \frac{E}{4(1+\nu)}(C_{ml}v_l + R_{lm}\varepsilon_{\beta\gamma}^{(l)}),$$

$$Q_{\gamma\gamma}^{(m)} = \frac{E}{1+\nu}\left[C_{ml}w_l + \frac{\nu}{1-2\nu}(C_{ml}w_l + P_{lm}\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(l)} + R_{lm}\varepsilon_{\beta\beta}^{(l)})\right] - \frac{\alpha_T E}{1-2\nu} T_m^{(12)},$$

где

$$T_m^{(i)} = \int_{-h}^{h} (1 + k_i\gamma)\varphi_m t d\gamma; \quad T_m^{(12)} = \int_{-h}^{h} (1 + k_1\gamma)(1 + k_2\gamma)\varphi_m t d\gamma;$$

$$A_{ml} = \int_{-h}^{h} \frac{1+k_2\gamma}{1+k_1\gamma} \varphi_m\varphi_l d\gamma; \quad B_{ml} = \int_{-h}^{h} \frac{1+k_1\gamma}{1+k_2\gamma} \varphi_m\varphi_l d\gamma;$$

$$C_{ml} = \int_{-h}^{h} (1+k_1\gamma)(1+k_2\gamma)\varphi_m'\varphi_l' d\gamma; \quad D_{ml} = \int_{-h}^{h} \varphi_m\varphi_l d\gamma; \tag{14}$$

$$R_{ml} = \int_{-h}^{h} (1+k_1\gamma)\varphi_m\varphi_l' d\gamma; \quad P_{ml} = \int_{-h}^{h} (1+k_2\gamma)\varphi_m\varphi_l' d\gamma.$$

Подставив выражения (13) в (3), (4) с учетом (7), (14), получим замкнутую систему дифференциальных уравнений и граничных условий относительно неизвестных функций u_m, v_m, w_m разложения (2). Выбирая в качестве системы $\{\varphi_m\}$ функции

$$1, \ \cos a_1\gamma, \ \cos a_2\gamma, \ \ldots, \ \cos a_n\gamma, \tag{15}$$

где $a_m = \frac{\pi m}{h}$, можно построить приближенную систему уравнений динамической термоупругости тонких оболочек. Для этого с точностью до членов порядка k_1h, k_2h в соотношениях (3), (13) можно принять, что матрицы коэффициентов A_{ml}, $\overset{0}{A}_{ml}$, B_{ml}, D_{ml} диагональные с элементами, равными $2h$ при $m = l = 0$ и h при $m = l \neq 0$; матрица коэффициентов C_{ml} диагональная с элементами по диагонали, равными $\frac{\pi^2 m^2}{h}$; матрицы коэффициентов R_{ml}, P_{ml} нулевые.

Отметим, что при линейном представлении перемещений по толщине оболочки в рамках классической теории Кирхгофа — Лява система (3) совпадает с приведенной, например, в работе [9].

1. *Абовский Н. П., Андреев Н. П., Деруга А. П.* Вариационные принципы в теории упругости и теории оболочек.— М. : Наука, 1978.— 287 с.
2. *Айнола Л. Я.* Вариационные принципы динамики теории оболочек.— Докл. АН СССР, 1967, **172**, № 6, с. 1296—1298.
3. *Алумяэ М. А.* Одна вариационная формула для исследования тонкостенных упругих оболочек в послекритической стадии.— Прикл. математика и механика, 1950, **14**, вып. 2, с. 197—202.
4. *Власов В. З.* Избранные труды.— М. : Изд-во АН СССР, 1962.— Т. 1. 528 с.
5. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем.— М. : Наука, 1967.— 984 с.
6. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости.— Киев : Наук. думка, 1970.— 307 с.
7. *Муштари Х. М., Галимов К. З.* Нелинейная теория упругих оболочек.— Казань : Таткнигоиздат, 1957.— 431 с.
8. *Огибалов П. М., Колтунов М. А.* Оболочки и пластины.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1969.— 695 с.
9. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек.— Киев : Наук. думка, 1978.— 343 с.
10. *Тимошенко С. П., Гудьер Д.* Теория упругости.— М. : Наука, 1979.— 560 с.

Львовский университет

Поступила в редколлегию 14.04.81

УДК 536.12

О. В. Побережный

О ВЛИЯНИИ ВЕЛИЧИНЫ ОБЛАСТИ ДЕЙСТВИЯ ТЕМПЕРАТУРНОЙ НАГРУЗКИ НА КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ПЛАСТИНЫ С ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ РАЗРЕЗОМ

В настоящее время имеется незначительное количество работ, посвященных исследованию влияния частичной загрузки берегов разреза на коэффициенты интенсивности напряжений [1, 3, 4], причем в работах [3, 4] предполагалось, что пластина термоизолирована с боковых поверхностей. В данной работе исследуется влияние нестационарности температурного поля,