$$A_{ml} = \int_{-h}^{h} \frac{1+k_2\gamma}{1+k_1\gamma} \varphi_m\varphi_l d\gamma; \quad B_{ml} = \int_{-h}^{h} \frac{1+k_1\gamma}{1+k_2\gamma} \varphi_m\varphi_l d\gamma;$$

$$C_{ml} = \int_{-h}^{h} (1+k_1\gamma)(1+k_2\gamma)\varphi'_m\varphi'_l d\gamma; \quad D_{ml} = \int_{-h}^{h} \varphi_m\varphi_l d\gamma; \tag{14}$$

$$R_{ml} = \int_{-h}^{h} (1+k_1\gamma)\varphi_m\varphi'_l d\gamma; \quad P_{ml} = \int_{-h}^{h} (1+k_2\gamma)\varphi_m\varphi'_l d\gamma.$$

Подставив выражения (13) в (3), (4) с учетом (7), (14), получим замкнутую систему дифференциальных уравнений и граничных условий относительно неизвестных функций u_m, v_m, w_m разложения (2). Выбирая в качестве системы $\{\varphi_m\}$ функции

$$1, \cos a_1\gamma, \cos a_2\gamma, \ldots, \cos a_n\gamma, \tag{15}$$

где $a_m = \frac{\pi m}{h}$, можно построить приближенную систему уравнений динамической термоупругости тонких оболочек. Для этого с точностью до членов порядка k_1h, k_2h в соотношениях (3), (13) можно принять, что матрицы коэффициентов A_{ml}, $\overset{0}{A}_{ml}$, B_{ml}, D_{ml} диагональные с элементами, равными $2h$ при $m = l = 0$ и h при $m = l \neq 0$; матрица коэффициентов C_{ml} диагональная с элементами по диагонали, равными $\frac{\pi^2 m^2}{h}$; матрицы коэффициентов R_{ml}, P_{ml} нулевые.

Отметим, что при линейном представлении перемещений по толщине оболочки в рамках классической теории Кирхгофа — Лява система (3) совпадает с приведенной, например, в работе [9].

1. *Абовский Н. П., Андреев Н. П., Деруга А. П.* Вариационные принципы в теории упругости и теории оболочек.— М. : Наука, 1978.— 287 с.
2. *Айнола Л. Я.* Вариационные принципы динамики теории оболочек.— Докл. АН СССР, 1967, **172**, № 6, с. 1296—1298.
3. *Алумяэ М. А.* Одна вариационная формула для исследования тонкостенных упругих оболочек в послекритической стадии.— Прикл. математика и механика, 1950, **14**, вып. 2, с. 197—202.
4. *Власов В. З.* Избранные труды.— М. : Изд-во АН СССР, 1962.— Т. 1. 528 с.
5. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем.— М. : Наука, 1967.— 984 с.
6. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости.— Киев : Наук. думка, 1970.— 307 с.
7. *Муштари Х. М., Галимов К. З.* Нелинейная теория упругих оболочек.— Казань : Таткнигоиздат, 1957.— 431 с.
8. *Огибалов П. М., Колтунов М. А.* Оболочки и пластины.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1969.— 695 с.
9. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек.— Киев : Наук. думка, 1978.— 343 с.
10. *Тимошенко С. П., Гудьер Д.* Теория упругости.— М. : Наука, 1979.— 560 с.

Львовский университет

Поступила в редколлегию 14.04.81

УДК 536.12

О. В. Побережный

О ВЛИЯНИИ ВЕЛИЧИНЫ ОБЛАСТИ ДЕЙСТВИЯ ТЕМПЕРАТУРНОЙ НАГРУЗКИ НА КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ПЛАСТИНЫ С ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ РАЗРЕЗОМ

В настоящее время имеется незначительное количество работ, посвященных исследованию влияния частичной загрузки берегов разреза на коэффициенты интенсивности напряжений [1, 3, 4], причем в работах [3, 4] предполагалось, что пластина термоизолирована с боковых поверхностей. В данной работе исследуется влияние нестационарности температурного поля, величины области температурной загрузки, теплоотдачи пластинки на коэффициенты интенсивности напряжений.

Рассмотрим тонкую изотропную неограниченную пластину толщиной 2δ с полубесконечным разрезом вдоль луча $y = 0, x > 0$. С боковых поверхностей пластинки осуществляется теплообмен с внешней средой по закону Ньютона, а на части разреза $x > a$ задана температура $T_1(x, t)$. Температурное поле $T(x, y, t)$, удовлетворяющее уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \varkappa^2 T = \frac{1}{q} \frac{\partial T}{\partial t}, \tag{1}$$

граничным

$$T(x, 0, t) = T_1(x, t), \quad x > a; \tag{2}$$
$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad x < a$$

и начальному

$$T(x, y, 0) = 0 \tag{3}$$

условиям, представляем в виде аналога теплового потенциала простого слоя [2]

$$T(x, y, t) = \frac{1}{4\pi} \int_a^\infty \int_0^t \frac{\varphi(\xi, t)}{t - \tau} \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2 + y^2}{4q(t - \tau)} - \varkappa^2 q(t - \tau)\right] d\tau d\xi \tag{4}$$

с неизвестной плотностью $\varphi(\xi, \tau)$, которая определяется из уравнения [2]

$$\frac{1}{4\pi} \int_a^\infty \int_0^t \frac{\varphi(\xi, \tau)}{t - \tau} \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2}{4q(t - \tau)} - \varkappa^2 q(t - \tau)\right] d\tau d\xi = T_1(x, t). \tag{5}$$

В соотношениях (1) — (5) обозначено $\varkappa^2 = \frac{\alpha_0}{\lambda\delta}$; α_0, λ — соответственно коэффициенты теплообмена и теплопроводности; δ — толщина пластинки; q — температуропроводность тела.

Теория интегральных уравнений вида (5) разработана еще недостаточно. В настоящее время известны лишь решения этого уравнения для некоторых частных случаев.

Для прямолинейных трещин очень часто более эффективным оказывается метод интегральных преобразований. В этом случае решение уравнения (1) в трансформантах Лапласа — Карсона, удовлетворяющее начальному условию и ограниченное на бесконечности, представляется в виде

$$\bar{T}(x, y, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} A(\xi, p)\, e^{-|y|\gamma_1} e^{-i\xi x} d\xi, \tag{6}$$

где $\gamma_1 = \sqrt{\xi^2 + \beta^2}$; $\beta = \sqrt{\varkappa^2 + \frac{p}{q}}$; p — параметр преобразования, черточкой обозначены трансформанты по времени.

Удовлетворяя граничным условиям, записанным в трансформантах Лапласа — Карсона, получим для определения $A(\xi, p)$ дуальные интегральные уравнения

$$\begin{aligned} &\int_{ic-\infty}^{ic+\infty} A(\xi, p)\, e^{-i\xi x} d\xi = \sqrt{2\pi}\, \bar{T}_1(x, p), \quad x > a, \\ &\int_{ic-\infty}^{ic+\infty} \gamma_1 A(\xi, p)\, e^{-i\xi x} d\xi = 0, \quad x < a, \end{aligned} \tag{7}$$

методы решения которых хорошо исследованы в работе [6].

Предполагая, что берега разреза не контактируют в процессе деформации, для определения обусловленного температурным полем $T(x, y, t)$

термоупругого состояния пластины с разрезом, поступим следующим образом. Посредством термоупругого потенциала перемещений F, удовлетворяющего уравнению

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = (1+\nu)\,\alpha_t T, \tag{8}$$

определим напряженное состояние сплошной пластины, обусловленное температурой $T(x, y, t)$. Применяя к уравнению (8) интегральные преобразования Фурье и Лапласа — Карсона, учитывая соотношение (6) и условие симметрии задачи относительно оси y, находим

$$\bar{\tilde{F}}(\xi, y, p) = \frac{(1+\nu)\,\alpha_t}{\beta^2} A(\xi, p)\left[e^{-\gamma_1|y|} - \frac{\gamma_1}{|\xi|} e^{-|\xi| y}\right]. \tag{9}$$

Здесь ν, α_t — соответственно коэффициенты Пуассона и линейного теплового расширения; волнистой чертой обозначено трансформанту Фурье по координате x. Зная термоупругий потенциал перемещений, напряжения $\sigma_{ij}^0(x, y, t)$ в сплошной пластинке определяем известными формулами [7].

Разрежем пластину вдоль положительной части оси $x > 0$ и освободим берега разреза от внешней нагрузки, используя при этом комплексные потенциалы Колосова — Мусхелишвили, посредством которых определяются компоненты σ_{ij}^* дополнительного напряженного состояния [5]. Сумма этих двух напряженных состояний определяет термоупругое состояние пластины с полубесконечным разрезом. В частности, нормальные напряжения σ_{yy}^* вблизи конца разреза на его продолжении определяются формулой [5]

$$\sigma_{yy}^*(x, 0, t) = \frac{1}{\pi\sqrt{|x|}} \int_0^\infty \frac{\sigma_{yy}^0(\xi, 0, t)}{\sqrt{\xi}}\, d\xi + 0(1).$$

По известному напряженному состоянию в окрестности вершины трещины легко определить коэффициенты интенсивности напряжений. В рассматриваемом случае имеем

$$k_1(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sigma_{yy}^0(\xi, 0, t)}{\sqrt{\xi}}\, d\xi, \quad k_2(t) = 0. \tag{10}$$

Как видно из формул (10), для определения коэффициентов интенсивности напряжений достаточно решения только задачи теплопроводности.

П р и м е р 1. Рассмотрим случай, когда $T_1(x, t) = T_0 = \text{const}$. Тогда решения интегрального уравнения (5), записанное в изображениях Лапласа — Карсона, и дуальных интегральных уравнений (7) имеют соответственно вид

$$\begin{gathered} \bar{\varphi}(\xi, p) = 2T_0 \left\{\beta \operatorname{erf}\sqrt{\beta(\xi - a)} + \sqrt{\frac{\beta}{\pi}}\, \frac{\exp[-\beta(\xi - a)]}{\sqrt{\xi - a}}\right\}, \\ A(\xi, p) = \frac{T_0}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{i\sqrt{-i\beta}}{\xi\sqrt{\xi - i\beta}}\, e^{i\xi a}, \end{gathered} \tag{11}$$

где $i = \sqrt{-1}$; $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-y^2)\, dy$.

Из формул (4), (6) с учетом (11) находим

$$\bar{T}(x, 0, p) = \begin{cases} T_0, & x > a, \\ T_0(1 - \operatorname{erf}\sqrt{\beta(a - x)}), & x < a. \end{cases} \tag{12}$$

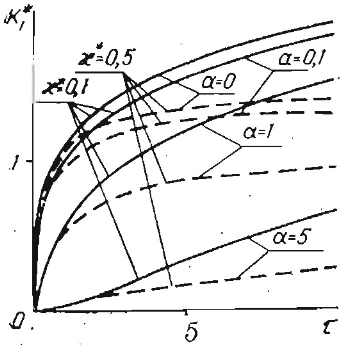
Применяя к выражению (12) обратное преобразование Лапласа — Карсона, получаем

$$T(x, 0, t) = \begin{cases} T_0, & x > a, \\ \frac{T_0}{2\pi} \int_1^\infty f(u, a - x, t) \frac{du}{u\sqrt{u - 1}}, & x < a, \end{cases} \tag{13}$$

где

$$f(u, x, t) = \exp(-\varkappa x u) \operatorname{erfc}\left(\frac{xu}{2\sqrt{qt}} - \varkappa\sqrt{qt}\right) +$$

$$+ \exp(\varkappa x u) \operatorname{erfc}\left(\frac{xu}{2\sqrt{qt}} + \varkappa\sqrt{qt}\right); \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x.$$



Из соотношения $\sigma_{yy}^0 = -2G\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ с учетом формул (9), (11) находим

$$\sigma_{yy}^0(x, 0, t) = \begin{cases} \sigma'_{yy}(x, 0, t), & x < a, \\ \sigma''_{yy}(x, 0, t), & x > a. \end{cases}$$

Здесь

$$\sigma'_{yy}(x, 0, t) = -\frac{\alpha_t(1+\nu)GT_0}{\pi} \times$$

$$\times \left\{ \int_1^\infty \frac{u - \sqrt{u^2-1}}{\sqrt{u-1}} f(u, a-x, t)\, du - \right.$$

$$\left. - \int_0^1 \sqrt{u+1} f(u, a-x, t)\, du \right\};$$

$$\sigma''_{yy}(x, 0, t) = -\frac{\alpha_t(1+\nu)GT_0}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1-u} f(u, x-a, t)\, du. \tag{14}$$

Коэффициент интенсивности напряжений $k_1(t)$ с учетом формул (14) определяется так:

$$k_1(t) = \frac{1}{\pi}\left\{ \int_0^a \sigma'_{yy}(\xi, 0, t)\frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} + \int_a^\infty \sigma''_{yy}(\xi, 0, t)\frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} \right\}. \tag{15}$$

На рисунке показано изменение коэффициента интенсивности напряжений $k_1^* = -\pi k_1 [\alpha_t (1+\nu) GT_0 \sqrt{\delta}]^{-1}$ от безразмерного времени $\tau = \frac{qt}{\delta^2}$ при различных значениях теплоотдачи пластинки $\varkappa^* = \varkappa\delta$ и величины $\alpha = a/\delta$, характеризующей степень загрузки разреза. Как видно из рисунка, при увеличении теплоотдачи пластинки или области загрузки разреза коэффициент интенсивности соответственно уменьшается или увеличивается, достигая максимального значения в стационарном режиме ($\tau \to \infty$).

Пример 2. Рассмотрим случай, когда на части разреза $a < x < a + l$ задана постоянная температура T_0, а при $x > a + l$ поддерживается нулевая температура. Тогда из дуальных интегральных уравнений (7), полагая

$$T_1(x, t) = T_0[\theta(x-a) - \theta(x-a-l)]\,\theta(t),$$

находим

$$A(\xi, p) = \frac{T_0 i\sqrt{-i\beta}}{\sqrt{2\pi}}\left\{ \frac{l^{i\xi a}}{\xi\sqrt{\xi - i\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta l}) + \right.$$

$$\left. + \frac{i\sqrt{i}}{\sqrt{\beta}} \frac{l^{i\xi(l+a)}}{\xi} \operatorname{erf}(\sqrt{l(\beta + i\xi)}) \right\}.$$

Определение коэффициентов интенсивности напряжений аналогично, как в примере 1.

Полученные в работе результаты могут быть использованы для сравнения с данными эксперимента по определению коэффициентов интенсивности напряжений, который в рассматриваемой постановке легко осуществим.

1. *Кит Г. С., Побережный О. В.* Нестационарная задача термоупругости для пластинки с трещиной при наличии теплоотдачи с боковых поверхностей.— Физ.-хим. механика материалов, 1976, 12, № 4, с. 73—78.
2. *Кит Г. С., Побережный О. В.* Интегральные уравнения нестационарных задач теплопроводности для тел с трещинами.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 12, с. 58—63.
3. *Кудрявцев Б. А.* Квазистатическая задача термоупругости для плоскости с полубесконечным разрезом.— Динамика сплошной среды, 1978, вып. 6, с. 29—31.
4. *Кудрявцев Б. А., Партон В. З.* Квазистатическая температурная задача для плоскости с разрезом.— Пробл. прочности, 1970, № 2, с. 46—51.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М. : Наука, 1966.— 707 с.
6. *Нобл Б.* Метод Винера — Хопфа.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 279 с.
7. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках.— Киев : Наук. думка, 1972.— 308 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
31.03.81

УДК 539.377

Б. С. Воробец

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ СО СФЕРИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Рассмотрим упругое полупространство $z \geqslant 0$, отнесенное к цилиндрической системе координат r, φ, z (рис. 1). В полупространстве на некотором расстоянии d от плоской границы $z = 0$ имеется сферическое включение, отнесенное к сферической системе координат ρ, φ, θ (рис. 1). Включение представляет собой тонкую упругую замкнутую сферическую оболочку толщины $2\delta_0$ с теплопроводным мягким заполнителем (жесткость заполнителя мала по сравнению с жесткостью оболочки и полупространства); при этом в области $\rho \leqslant R_1$ $(R_1 < d)$, занятой заполнителем, действуют периодические во времени источники тепла интенсивности

$$q(\tau) = q_1 \exp(i\omega\tau) \quad (\omega,\ q_1 = \text{const}) \tag{1}$$

(τ — время). На контактирующих поверхностях (полупространство — оболочка, оболочка — заполнитель) выполняются условия идеального теплового контакта. Между оболочкой и полупространством существует жесткое сцепление. На плоской поверхности полупространства $z = 0$, свободной от внешних нагрузок, происходит теплообмен с окружающей средой (температуру которой принимаем равной нулю) по закону Ньютона. При таких условиях и распределении источников тепла (1) температурное поле и напряженно-деформированное состояние системы не будут зависеть от координаты φ. Решения сформулированных выше задач теплопроводности и динамической задачи термоупругости для полупространства с рассматриваемым включением приведены в работе [1]. В этой работе методом последовательных приближений получены решения указанных задач, представленные в виде аналитических соотношений, с помощью которых для значений температуры, перемещений и напряжений в полупространстве, а также усилий и моментов в оболочке определяется любое приближение по предыдущим. В настоящей работе доказывается сходимость этого метода, а также приводятся результаты численных исследований динамических напряжений в полупространстве и усилий в подкрепляющей оболочке.

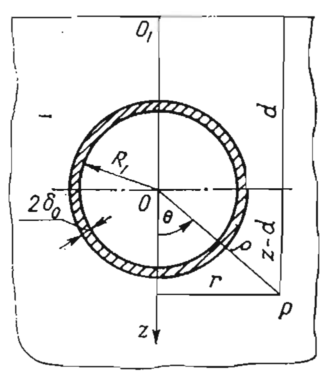


Рис. 1

О сходимости решения. Функции F, H и Ψ, через которые определяются все компоненты, характеризующие термонапряженное состояние