на амплитуды контактных напряжений и усилий в оболочке. Амплитуды этих величин уменьшаются с ростом $c^{(1)}$, что соответствует случаям возрастания теплоемкости материала заполнителя или уменьшения теплоемкости основного материала. В предельном случае $c^{(1)} \to \infty$, как это видно из соотношений $(17)_1$ — $(19)_1$, напряжения и усилия исчезают.

Быстрота сходимости рядов (13) зависит от относительного расстояния центра включения от плоской границы d_*. Так, если при $d_* = 2$ ограничиться 4—5 членами рядов (13), то относительная погрешность составляет 0,5%.

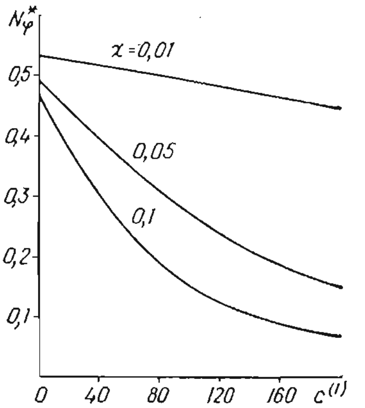

Рис. 4

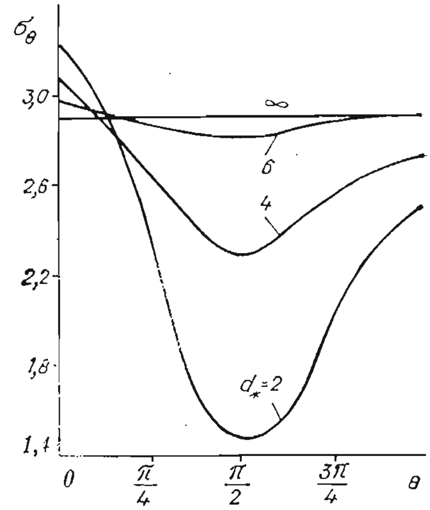

Рис. 5

Если $d_* = 4$, то необходимо взять 3 члена рядов (13) при указанной погрешности. При $d_* \geqslant 6$ достаточно ограничиться первыми членами рядов (13); это свидетельствует о том, что влияние плоской границы при $d_* \geqslant 6$ мало сказывается на распределении напряжений в окрестности включения, а также на величину усилий в оболочке.

1. *Воробец Б. С.* Динамические термонапряжения в полупространстве, вызываемые распределенными в сферическом включении периодическими источниками тепла.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1982, вып. 15, с. 52—57.
2. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики : В 2-х т.— М. : Изд-во иностр. лит., 1958—1960.— Т. 1. 930 с. Т. 2. 886 с.
3. *Thiruvenkatachar V. R., Viswanathan K.* Dynamic response of an elastic half-space to time dependent surface tractions over an embedded spherical cavity.— Proc. Roy. Soc. A, 1965, 287, N 1411, p. 549—567.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
04.02.81

УДК 539.377

Н. Н. Тимошенко

К ОПТИМИЗАЦИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ СВАРНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Рассмотрим тонкие пологие оболочки вращения постоянной толщины $2h$ с начальными остаточными напряжениями, вызванными начальными необратимыми остаточными деформациями $e_{ij}^{(\text{н})}$ $(i, j = 1, 2)$. С целью определения оптимального по напряжениям распределения необратимых остаточных деформаций в рассматриваемой оболочке наряду с заданным распределением начальных необратимых остаточных деформаций $e_{ij}^{(\text{н})}$ рассмотрим распределение

$$e_{ij}^{(0)} = e_{ij}^{(\text{н})} + e_{ij}^{(\partial)}. \qquad (1)$$

Здесь $e_{ij}^{(д)}$ — компоненты дополнительных к начальным необратимых остаточных деформаций, которые характеризуют изменение в распределении $e_{ij}^{(н)}$. Если распределение $e_{ij}^{(o)}$ задано, задача об определении напряженно-деформированного состояния в рассматриваемой оболочке в рамках гипотезы Кирхгофа — Лява сводится к решению системы разрешающих уравнений

$$\nabla^2\nabla^2\varphi - \nabla_k^2 w + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial r\varepsilon_2^{(o)}}{\partial r} - \varepsilon_1^{(o)} - \frac{\partial\varepsilon_{12}^{(o)}}{\partial\beta}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial\varepsilon_1^{(o)}}{\partial\beta} - \frac{\partial r\varepsilon_{12}^{(o)}}{\partial r} - \varepsilon_{12}^{(o)}\right)\right] = 0,$$
$$\nabla^2\nabla^2 w + b\nabla_k^2\varphi + \nabla^2(\varkappa_1^{(o)} + \varkappa_2^{(o)}) - \frac{1-\nu}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial r\varkappa_2^{(o)}}{\partial r} - \varkappa_1^{(o)} - \frac{\partial\varkappa_{12}^{(o)}}{\partial\beta}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial\varkappa_1^{(o)}}{\partial\beta} - \frac{\partial r\varkappa_{12}^{(o)}}{\partial r} - \varkappa_{12}^{(o)}\right)\right] = 0, \qquad (2)$$

где

$$\varepsilon_i^{(o)} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} e_{ii}^{(o)} d\gamma; \quad \varepsilon_{12}^{(o)} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} e_{12}^{(o)} d\gamma;$$
$$\varkappa_i^{(o)} = \frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h} e_{ii}^{(o)}\gamma d\gamma; \quad \varkappa_{12}^{(o)} = \frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h} e_{12}^{(o)}\gamma d\gamma;$$
$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right]; \quad \nabla_k^2 = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(k_2 r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{k_1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right];$$

φ, w — силовая функция и функция прогибов; $b = \frac{D_0}{D_1}$; $D_0 = 2Eh$ — жесткость на растяжение; $D_1 = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$ — жесткость на изгиб; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; k_1, k_2 — главные кривизны срединной поверхности; r, β — полярные координаты с полюсом на оси вращения; γ — координата по толщине. При этом должны удовлетворяться определенные граничные условия, которые соответствуют конкретным условиям закрепления краев оболочки.

Ставим задачу о нахождении такого распределения $e_{ij}^{(д)}$ необратимых остаточных деформаций, создание которого совместно с начальным распределением $e_{ij}^{(н)}$ необратимых остаточных деформаций приводило бы к оптимальному понижению уровня начального напряженного состояния. Эта задача решается с использованием методов вариационного исчисления.

В качестве критерия оптимальности принимаем энергию упругой деформации оболочки [2], которая является интегральной мерой ее напряженного состояния и в рассматриваемом случае представляет собой следующий функционал на множестве разрешающих функций φ, w, $e_{11}^{(д)}$, $e_{22}^{(д)}$, $e_{12}^{(д)}$:

$$K[\varphi, w, e_{11}^{(д)}, e_{22}^{(д)}, e_{12}^{(д)}] = \frac{D_1}{2}\left(\int_{r_0}^{r_*}\int_0^{2\pi} F r dr d\beta + \int_{r_0}^{r_*}\int_0^{2\pi}\int_{-h}^{h} F_0 r dr d\beta d\gamma\right). \qquad (3)$$

Здесь

$$F = b\left[\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right)^2 - 2\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2}\right) + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + 2(1+\nu)\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\beta}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\right) + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\right)^2 + 2(1-\nu)\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\beta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\beta}\right)^2 +$$
$$+ 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\right)\varkappa_1^{(o)} + 2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + \right.$$

$$+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\Big)\varkappa_2^{(0)}+4(1-\nu)\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\beta}-\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)\varkappa_{12}^{(0)}-$$

$$-\frac{3}{h^2}\left(\varepsilon_1^{(0)^2}+2\nu\varepsilon_1^{(0)}\varepsilon_2^{(0)}+\varepsilon_2^{(0)^2}+2(1-\nu)\varepsilon_{12}^{(0)^2}\right);$$

$$F_0=\frac{3}{h^3}\left(e_{11}^{(0)^2}+2\nu e_{11}^{(0)}e_{22}^{(0)}+e_{22}^{(0)^2}+2(1-\nu)e_{12}^{(0)^2}\right);$$

$r=r_0$, r_* — краевые сечения оболочки.

Сформулируем вариационную задачу о нахождении экстремалей функционала (3) на множестве допустимых функций φ, w, $e_{11}^{(\partial)}$ $e_{22}^{(\partial)}$, $e_{12}^{(\partial)}$, которые удовлетворяют связям (2) и условиям на распределение:

$$\Phi_j\equiv\Phi_j(e_{11}^{(\partial)},e_{22}^{(\partial)},e_{12}^{(\partial)})=0\quad(j=\overline{1,k};\ k\leqslant 2).\qquad(4)$$

Решение этой задачи на условный экстремум можно получить методом множителей Лагранжа [1]. Из необходимого условия экстремума получаем уравнения Остроградского—Эйлера, которые вместе с уравнениями (2) и условиями (4) составляют полную систему соотношений для нахождения допустимых функций φ, w, $e_{11}^{(\partial)}$, $e_{22}^{(\partial)}$, $e_{12}^{(\partial)}$, множителей Лагранжа и условий закрепления краев оболочки. Оптимальные необратимые остаточные деформации $e_{ij}^{(0)}$ из решения сформулированной экстремальной задачи определяются следующим образом:

$$e_{11}^{(0)}=\varepsilon_1^{(0)}+\gamma\varkappa_1^{(0)}-\frac{h^3}{3(1-\nu^2)}\sum_{j=1}^{k}\left[\mu_j\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial e_{11}^{(0)}}-\nu\frac{\partial\Phi_j}{\partial e_{22}^{(0)}}\right)-\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\mu_j\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial e_{11}^{(0)}}-\nu\frac{\partial\Phi_j}{\partial e_{22}^{(0)}}\right)d\gamma-\frac{3\gamma}{2h^3}\int_{-h}^{h}\mu_j\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial e_{11}^{(0)}}-\nu\frac{\partial\Phi_j}{\partial e_{22}^{(0)}}\right)\gamma d\gamma\right],$$

$$e_{22}^{(0)}=\varepsilon_2^{(0)}+\gamma\varkappa_2^{(0)}-\frac{h^3}{3(1-\nu^2)}\sum_{j=1}^{k}\left[\mu_j\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial e_{22}^{(0)}}-\nu\frac{\partial\Phi_j}{\partial e_{11}^{(0)}}\right)-\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\mu_j\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial e_{22}^{(0)}}-\nu\frac{\partial\Phi_j}{\partial e_{11}^{(0)}}\right)d\gamma-\frac{3\gamma}{2h^3}\int_{-h}^{h}\mu_j\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial e_{22}^{(0)}}-\nu\frac{\partial\Phi_j}{\partial e_{11}^{(0)}}\right)\gamma d\gamma\right],\qquad(5)$$

$$e_{12}^{(0)}=\varepsilon_{12}^{(0)}+\gamma\varkappa_{12}^{(0)}-\frac{h^3}{6(1-\nu)}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{k}\left(\mu_j\frac{\partial\Phi_j}{\partial e_{12}^{(0)}}-\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\mu_j\frac{\partial\Phi_j}{\partial e_{12}^{(0)}}d\gamma-\frac{3\gamma}{2h^3}\int_{-h}^{h}\mu_j\frac{\partial\Phi_j}{\partial e_{12}^{(0)}}\gamma d\gamma\right),$$

а компоненты деформаций срединной поверхности удовлетворяют системе уравнений

$$\varkappa_1^{(0)}-\varkappa_2^{(0)}-r\frac{\partial\varkappa_2^{(0)}}{\partial r}+\frac{\partial\varkappa_{12}^{(0)}}{\partial\beta}+\frac{1}{2(1-\nu^2)}\sum_{j=1}^{k}\left[(1+\nu)\int_{-h}^{h}\mu_j\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial e_{11}^{(0)}}-\frac{\partial\Phi_j}{\partial e_{22}^{(0)}}\right)\gamma d\gamma+\right.$$

$$\left.+r\frac{\partial}{\partial r}\int_{-h}^{h}\mu_j\left(\nu\frac{\partial\Phi_j}{\partial e_{11}^{(0)}}-\frac{\partial\Phi_j}{\partial e_{22}^{(0)}}\right)\gamma d\gamma\right]+\frac{1}{4(1-\nu)}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\int_{-h}^{h}\mu_j\frac{\partial\Phi_j}{\partial e_{12}^{(0)}}\gamma d\gamma\right)=0,$$

$$\frac{\partial\varkappa_1^{(0)}}{\partial\beta}-r\frac{\partial\varkappa_{12}^{(0)}}{\partial r}-2\varkappa_{12}^{(0)}+\frac{1}{2(1-\nu^2)}\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\int_{-h}^{h}\mu_j\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial e_{11}^{(0)}}-\nu\frac{\partial\Phi_j}{\partial e_{22}^{(0)}}\right)\gamma d\gamma-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\int_{-h}^{h}\mu_j\frac{\partial\Phi_j}{\partial e_{12}^{(0)}}\gamma d\gamma\right]=0,\qquad(6)$$

$$k_2\varkappa_1^{(0)} + k_1\varkappa_2^{(0)} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varepsilon_2^{(0)}}{\partial r} + \varepsilon_2^{(0)} - \varepsilon_1^{(0)} - \frac{\partial\varepsilon_{12}^{(0)}}{\partial\beta}\right) +$$

$$+ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial\varepsilon_1^{(0)}}{\partial\beta} - 2\varepsilon_{12}^{(0)} - r\frac{\partial\varepsilon_{12}^{(0)}}{\partial r}\right) + \frac{1}{2(1-\nu^2)}\sum_{j=1}^{k}\left[k_2\int_{-h}^{h}\mu_j\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial e_{11}^{(0)}} -\right.\right.$$

$$\left.\left.- \nu\frac{\partial\Phi_j}{\partial e_{22}^{(0)}}\right)\gamma d\gamma - k_1\int_{-h}^{h}\mu_j\left(\nu\frac{\partial\Phi_j}{\partial e_{11}^{(0)}} - \frac{\partial\Phi_j}{\partial e_{22}^{(0)}}\right)\gamma d\gamma\right] = 0.$$

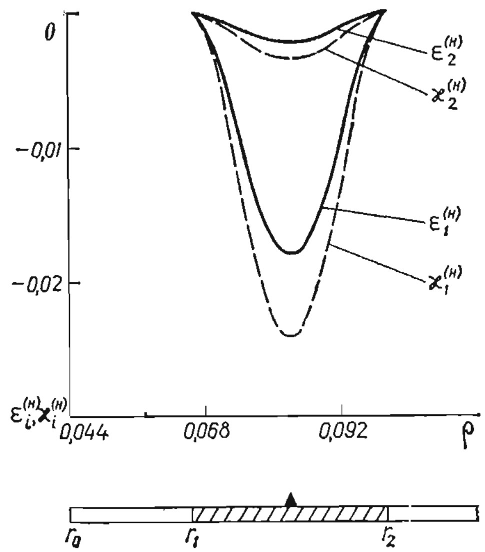

Рис. 1

Здесь μ_j $(j = \overline{1, k};\ k \leqslant 2)$ — множители Лагранжа. При отсутствии ограничений вида (4) из соотношений (5), (6) получим

$$e_{ii}^{(0)} = \varepsilon_i^{(0)} + \gamma\varkappa_i^{(0)}, \quad e_{12}^{(0)} = \varepsilon_{12}^{(0)} + \gamma\varkappa_{12}^{(0)}$$

$$(i = 1, 2); \qquad (7)$$

$$\varkappa_1^{(0)} - \varkappa_2^{(0)} - r\frac{\partial\varkappa_2^{(0)}}{\partial r} + \frac{\partial\varkappa_{12}^{(0)}}{\partial\beta} = 0,$$

$$\frac{\partial\varkappa_1^{(0)}}{\partial\beta} - r\frac{\partial\varkappa_{12}^{(0)}}{\partial r} - 2\varkappa_{12}^{(0)} = 0,$$

$$k_2\varkappa_1^{(0)} + k_1\varkappa_2^{(0)} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varepsilon_2^{(0)}}{\partial r} + \right.$$

$$\left. + \varepsilon_2^{(0)} - \varepsilon_1^{(0)} - \frac{\partial\varepsilon_{12}^{(0)}}{\partial\beta}\right) +$$

$$+ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial\varepsilon_1^{(0)}}{\partial\beta} - 2\varepsilon_{12}^{(0)} - r \times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial\varepsilon_{12}^{(0)}}{\partial r}\right) = 0. \qquad (8)$$

Таким образом, оптимальные дополнительные к начальным необратимые остаточные деформации $e_{ij}^{(д)}$, полученные из решения вариационной задачи при отсутствии ограничений на их распределение, вместе с начальными необратимыми остаточными деформациями $e_{ij}^{(н)}$ линейные по толщине и удовлетворяют условиям совместности.

Система дифференциальных уравнений (8) позволяет с учетом соотношений (1) при заданном распределении $e_{ij}^{(н)}$ найти множество локально распределенных оптимальных остаточных деформаций $e_{ij}^{(д)}$, создание которых обеспечивает полное снятие начальных остаточных напряжений. Это дает возможность целевого выбора $e_{ij}^{(д)}$ с учетом возможностей их реализации на практике.

Исследование полученных результатов проведено для пологой сферической оболочки с круговым отверстием радиуса $r = r_0$ и кольцевым сварным швом радиуса $r = r_{0*}$, в области $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ $(r_{0*} > r_0,\ r_1 < r_{0*} < r_2)$ которого заданы начальные осесимметричные необратимые остаточные деформации $\varepsilon_i^{(н)}$, $\varkappa_i^{(н)}$ $(i = 1, 2)$.

Из системы уравнений (8) определяем такие отличные от нуля оптимальные дополнительные к начальным необратимые остаточные деформации:

$$\varepsilon_1^{(д)} = mr^{m-1}\int_{r_i}^{r}(r^*)^{-m}f_i dr^*, \quad \varepsilon_2^{(д)} = r^{m-1}\int_{r_i}^{r}(r^*)^{-m}f_i dr^*, \qquad (9)$$

$$\varkappa_2^{(д)} = \frac{r_i}{r}\varkappa_2^{(н)}(r_i) - \varkappa_2^{(н)} + \frac{1}{r}\int_{r_i}^{r}\varkappa_1^{(н)} dr^*,$$

где

$$f_i = \varepsilon_1^{(н)} - \frac{d}{dr}(r\varepsilon_2^{(н)}) + \frac{1}{R}\int_{r_0}^{r}\left(r^*\int_{r_i}^{r^*}\varkappa_1^{(н)}d\xi + r^*\varkappa_1^{(н)}\right)dr^*, \quad i = 1,\ 2;$$

R — радиус оболочки. При этом полученные деформации (9) локализованы в области $r_0 \leqslant r \leqslant r_2$ ($i = 1$, $-\infty < m < \infty$) или распределены в области $r \geqslant r_1$ ($i = 2$, $m < 1$).

Численные исследования выполнены для случая, когда распределение начальных необратимых остаточных деформаций согласно данным, приве-

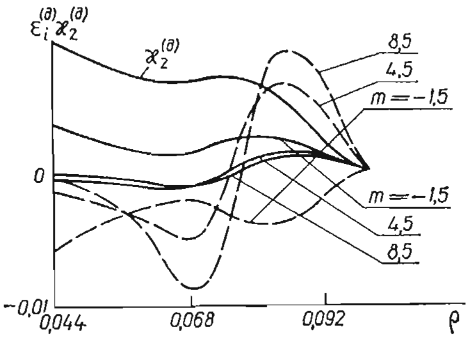

Рис. 2

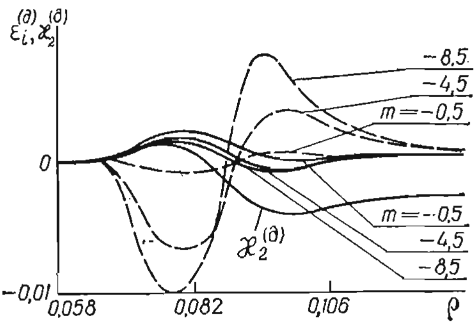

Рис. 3

денным в работе [3], характеризуется в области $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ функциями

$$\varepsilon_1^{(н)} = a_1(\rho - \rho_1)^2(\rho - \rho_2)^2, \quad \varepsilon_2^{(н)} = a_2(\rho - \rho_1)^2(\rho - \rho_2)^2, \qquad (10)$$
$$\varkappa_1^{(н)} = a_3(\rho - \rho_1)^2(\rho - \rho_2)^2, \quad \varkappa_2^{(н)} = a_4(\rho - \rho_1)^2(\rho - \rho_2)^2.$$

Здесь $\rho = \frac{r}{R}$; $\rho_1 = \frac{r_1}{R} = 0{,}066$; $\rho_2 = \frac{r_2}{R} = 0{,}1$; $a_1 = -2{,}15 \cdot 10^5$; $a_2 = -2{,}79 \cdot 10^4$; $a_3 = -2{,}87 \cdot 10^6$; $a_4 = -4{,}07 \cdot 10^4$.

Графики распределений начальных необратимых остаточных деформаций (10) в зависимости от координаты ρ приведены на рис. 1, откуда видно, что приведенные деформации $\varepsilon_i^{(н)}$, $\varkappa_i^{(н)}$ ($i = 1, 2$) отрицательного знака. При этом $\varepsilon_1^{(н)}$, $\varkappa_1^{(н)}$ значительно больше $\varepsilon_2^{(н)}$, $\varkappa_2^{(н)}$ по абсолютной величине соответственно. Оптимальные дополнительные необратимые остаточные деформации (9), локализованные в области $r_0 \leqslant r \leqslant r_2$, представлены на рис. 2, в области $r \geqslant r_1$ — на рис. 3. При этом графики распределений $\varepsilon_i^{(д)}$ (сплошные линии) и $\varepsilon_2^{(д)}$ (штриховые) приведены на этих рисунках для различных значений параметра m.

1. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление.— М. . Физматгиз, 1961.— 228 с.
2. *Григолюк Э. И., Подстригач Я. С., Бурак Я. И.* Оптимизация нагрева оболочек и пластин.— Киев : Наук. думка, 1979.— 364 с.
3. *Недосека А. Я., Казимиров А. А., Пархоменко И. В.* Устойчивость листа с вваренным цилиндрическим фланцем.— Автомат. сварка, 1972, № 8, с. 27—30.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 12.06.79