

$\times 10^{-5}$  1/град,  $E = 6,54 \cdot 10^3$  кг/мм<sup>2</sup>,  $h_1 = 5$  мм;  $h_2 = 35,40$  мм,  $u_n = 0,2$ ;  $0,5$ ;  $b = 2,5 \cdot 10^{-2}$ , 0 град/мм<sup>2</sup>.

На рис. 1 приведены графики функций  $t^+$  и  $t^-$  в зависимости от времени  $u_n$  (сплошные линии для  $u_n = 0,2$ , штриховые — для  $u_n = 0,5$ ) достижения на поверхностях стеклянной пластины температуры стеклования  $t_g$  при заданном уровне сжимающих напряжений ( $\sigma(2h_1) = \sigma(0) = -1$  кг/мм<sup>2</sup>). Из графиков видно, что с уменьшением времени  $u_n$  сокращается общая продолжительность процесса закалки. На рис. 2 приведены графики функций  $t^+$  и  $t^-$  в зависимости от уровня сжимающих напряжений на поверхностях стеклянной пластины (сплошные линии для  $\sigma(2h_1) = \sigma(0) = 0$  кг/мм<sup>2</sup>, штриховые — для  $\sigma(2h_1) = \sigma(0) = -1$  кг/мм<sup>2</sup>). Из графиков следует, что с увеличением уровня сжимающих напряжений, начиная с момента времени стеклования  $u_n$ , градиентность функций  $t^+$  и  $t^-$  увеличивается. На рис. 3 приведены графики  $t^+$  и  $t^-$  для двух толщин металлической пластины  $2h_2 = 40$  мм (сплошные линии) и  $2h_2 = 35$  мм (штриховая).

1. Бартнев Г. М. Исследование закалки стекла.— Журн. техн. физики, 1949, 19, № 12, с. 1423—1433.
2. Будэ С. Ф., Бурак Я. И., Ирза Е. М. Оптимизация закалочных напряжений в пластинчатых элементах.— Физ.-хим. механика материалов, 1980, № 4, с. 69—72.
3. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках.— К.: Вид-во АН УРСР, 1961.— 212 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 18.05.81

УДК 518:517.948

М. Я. Бартиш, И. В. Огирко, Л. Л. Роман

#### ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА ГИБКИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК, НАХОДЯЩИХСЯ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Аналогично к численной схеме исследований [2] применим метод Ньютона — Канторовича для случая нелинейной задачи термоупругости. Как известно [3, 5], напряженно-деформированное состояние гибкой пологой оболочки под осесимметричным температурным воздействием сводится к системе двух нелинейных дифференциальных уравнений. Относительно разрешающих функций  $W^*$ ,  $\Phi^*$  система имеет вид

$$\frac{d^3\Phi^*}{d\rho^3} + \frac{1}{\rho} \frac{d^2\Phi^*}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{d\Phi^*}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{dW_n^*}{d\rho} + \frac{1}{2} \frac{dW^*}{d\rho} \right) \frac{dW^*}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{dq_{T_1}}{d\rho}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3W^*}{d\rho^3} + \frac{1}{\rho} \frac{d^2W^*}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{dW^*}{d\rho} - \frac{12(1-\nu^2)}{d\rho} \frac{d\Phi^*}{d\rho} - \frac{d(W^* + W_n^*)}{d\rho} = \\ = -(1+\nu) \frac{dq_{T_2}}{d\rho}, \end{aligned} \quad (2)$$

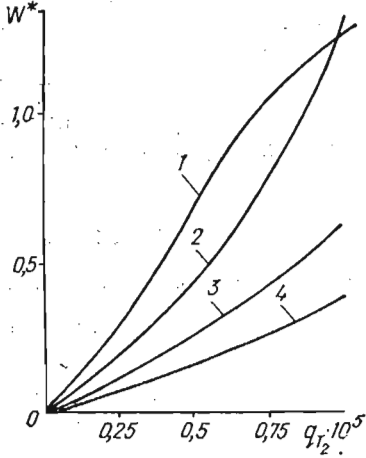
где приняты следующие безразмерные функции и параметры:  $W^* = \frac{W}{h}$ ,  $\Phi^* = \frac{\Phi}{Eh^3}$ ,  $\rho = \frac{r}{a}$ ,  $W_n^* = \gamma(\rho^2 - 1)$ ,  $\gamma = \frac{W_{0n}}{2h}$ ,  $q_{T_1} = \frac{a}{h^2} T_1$ ,  $q_{T_2} = \frac{a^2}{h} T_2$ . Здесь  $W$  — прогиб оболочки;  $\Phi$  — функция усилий;  $\rho$  — координата по радиусу ( $0 \leq r \leq a$ );  $a$ ,  $h$  — радиус и толщина оболочки;  $W_{0n}$  — начальный подъем оболочки;  $T_1$  — средняя температура по толщине оболочки;  $T_2$  — интегрально характеризует перепад температуры по толщине;  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Суть метода состоит в том, чтобы свести систему

нелинейных дифференциальных уравнений к системе нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка и при соответствующих краевых условиях решать ее согласно работе [4] одним из методов типа Ньютона — Канторовича.

Пусть оболочка свободна по краям, т. е.

$$\left. \frac{d\Phi^*}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0, \quad W^*|_{\rho=1} = 0, \quad (3)$$

$$\left[ \frac{d^2 W^*}{d\rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{dW^*}{d\rho} + (1 + \nu) \alpha q_{T_2} \right] \Big|_{\rho=1} = 0,$$



где  $\alpha$  — коэффициент линейного температурного расширения материала.

Введем переменные

$$z_1 = \frac{d\Phi^*}{d\rho},$$

$$z_2 = \frac{1}{\rho} \frac{d\Phi^*}{d\rho} + \frac{d^2\Phi^*}{d\rho^2}, \quad z_3 = W^*,$$

$$z_4 = \frac{dW^*}{d\rho}, \quad z_5 = \frac{1}{\rho} \frac{dW^*}{d\rho} + \frac{d^2W^*}{d\rho^2}. \quad (4)$$

Тогда система (1), (2) в случае условий (3) сведется к краевой задаче вида

$$\frac{d\vec{z}}{d\rho} = \vec{f}(\vec{z}, \rho), \quad (5)$$

$$\vec{g}(\vec{z}_0, \vec{z}_1) = \vec{d}. \quad (6)$$

Здесь обозначено:  $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$ ,  $\vec{d} = 0$ ,

$$\vec{g}(\vec{z}_0, \vec{z}_1) = \begin{pmatrix} z_1(0) \\ z_1(1) \\ z_3(1) \\ z_4(0) \\ z_5(1) + (\nu - 1)z_4(1) + (1 + \nu)\alpha q_{T_2} \end{pmatrix},$$

$$\vec{f}(\vec{z}, \rho) = \begin{pmatrix} z_2 - \frac{z_1}{\rho} \\ -\frac{1}{\rho} \left( \frac{dW^*}{d\rho} + \frac{z_4}{2} \right) z_4 + \frac{1}{\rho} \frac{dq_{T_2}}{d\rho} \\ z_4 \\ z_5 - \frac{z_4}{\rho} \\ \frac{2}{\rho^2} z_4 - \frac{z_5}{\rho} + \frac{12(1 - \nu^2)}{\rho} z_1 \left( z_4 + \frac{dW^*}{d\rho} \right) - (1 + \nu) \frac{dq_{T_2}}{d\rho} \end{pmatrix}.$$

Безразмерные усилия и моменты [3] согласно обозначениям (4) определяются по формулам

$$N_p^* = z_1, \quad N_\alpha^* = z_2 - \frac{z_1}{\rho}, \quad (7)$$

$$N_p^* = z_5 - \frac{\nu - 1}{\rho} z_4 + (1 + \nu)\alpha q_{T_2}, \quad M_\varphi^* = z_5 + (1 + \nu)\alpha q_{T_2},$$

где

$$N_r = \frac{Eh^3}{a} N_p^*; \quad M_r = \frac{Eh^4}{12(1 - \nu^2)a^2} M_p^*;$$

$$N_\varphi = \frac{Eh^3}{a^2} N_\varphi^*; \quad M_\varphi = \frac{Eh^4}{12(1 - \nu^2)a^2} M_\varphi^*.$$

Решение задачи (5), (6) эквивалентно решению системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} z_1(z_1^0, z_2^0, z_3^0, z_4^0, z_5^0, 1) &= 0, \\ z_3(z_1^0, z_2^0, z_3^0, z_4^0, z_5^0, 1) &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$z_5(z_1^0, z_2^0, z_3^0, z_4^0, z_5^0, 1) + (\nu - 1)z_4(z_1^0, z_2^0, z_3^0, z_4^0, z_5^0, 1) + (1 - \nu)q_T = 0$   
относительно неизвестных  $z_2^0, z_3^0, z_5^0$  и решению задачи Коши

$$\frac{d\vec{z}}{d\rho} = \vec{f}(\vec{z}, \rho), \quad (9)$$

$$\vec{z}(0) = \vec{z}_0, \quad (10)$$

где  $\vec{z}_0 = (z_1^0, z_2^0, z_3^0, z_4^0, z_5^0)$ .

Для решения системы (8) можно использовать разностный аналог одного из методов типа Ньютона — Канторовича. Учитывая, что при этом для решения краевых задач необходимо большое количество вычислений, чтобы получить значения функций  $z_1, z_3, z_5$  системы (8) и матрицы Якоби с разностного аналога, эффективнее использовать рекурсивные итерационные методы [1] с оптимальным выбором параметра рекурсии. Они удобны для вычислений на ЭВМ и дают возможность так подобрать параметр рекурсии, чтобы метод был наиболее эффективным в смысле количества операций. Для решения системы нами использована вычислительная схема [1] с оптимальным параметром рекурсии  $l = 3$ . Алгоритм решения задачи реализуется на ЭВМ «М-222». Программа может быть использована для произвольных значений параметров  $\gamma, \alpha, q_T, q_T$  и при других условиях закрепления оболочки.

В качестве примера рассмотрена полая сферическая стальная (марки 1Х18Н9Т) (см. [3]) оболочка при различных параметрах подъема  $\gamma = 1, 2, 3, 4$ . На рисунке приведена зависимость максимального прогиба  $W^*$  в центре от температурной нагрузки  $q_T$ , при указанных  $\gamma$ .

Данные результаты исследований согласуются с полученными другим методом [5].

1. Бартиш М. Я., Щербина Ю. Н. Итерационные формулы, получаемые с помощью рекурсии. — В кн.: Математический сборник. Киев: Наук. думка, 1976, с. 50—53.
2. Бартиш М. Я., Ярема Л. Л. Про застосування одного класу методів типу Ньютона — Канторовича до розв'язування нелінійних крайових задач. — В кн.: Питання якісної теорії диференціальних рівнянь та їх застосування. К.: Ін-т математики АН УРСР, 1978, с. 3—4.
3. Безухов Н. И., Бажанов В. Л., Гольденблат И. И. и др. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур. — М.: Машиностроение, 1965. — 567 с.
4. Шаманский В. Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. — Киев: Наук. думка, 1966. — Ч. 2, с. 8—11.
5. Ярема С. Я., Желсеньяк Т. В. Осесимметричная температурная задача гибких пластин и пологих оболочек. — Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1965, вып. 5, с. 287—296.

Львовский университет

Поступила в редколлегию  
29.12.80

УДК 517.949.8+536.12

Л. Е. Губаль, Н. И. Иванчов, М. Д. Коркуна

#### ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ДВИЖУЩИМСЯ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА

Рассмотрим применение метода малого параметра и метода сеток к решению задачи об определении температурного поля в бесконечной плите при интенсивном поверхностном нагреве источником тепла постоянной мощности,