УДК 517.9

В. А. Галазюк, Г. А. Гирняк

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ДВИЖУЩЕЙСЯ ЛИНИЕЙ РАЗДЕЛА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Линейные задачи теплопроводности для слоя и полупространства со смешанными граничными условиями эффективно решаются методом парных интегральных уравнений [3]. Однако при решении нестационарных задач с помощью интегрального преобразования Лапласа по временной переменной ядра получаемых парных интегральных уравнений зависят от комплексного параметра преобразования, в связи с чем решение этих уравнений числовыми методами практически невозможно. В данной работе предлагается метод решения нестационарной задачи теплопроводности для полупространства, базирующийся на методе полиномов Чебышева — Лагерра [1].

Рассмотрим нестационарную задачу теплопроводности в полупространстве с движущейся круговой линией раздела граничных условий. Пусть на границе $z = 0$ полупространства, отнесенного к цилиндрической системе координат (r, φ, z), в круге радиуса $r = R + vt$ задана температура $T_1(r, t)\, S_+(t)$, а вне его происходит излучение тепла по закону Ньютона в среду, температура которой $T_2(r, t)\, S_+(t)$. Температурное поле в полупространстве $z > 0$ определим решением осесимметрической задачи

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial T}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2 T}{\partial\gamma^2} = \frac{\partial T}{\partial\tau}; \tag{1}$$

$$T(\rho, \gamma, \tau) = 0, \quad \tau = 0; \tag{2}$$

$$\left\{\frac{\partial T}{\partial\gamma} - \mathrm{Bi}\,[T - T_2(\rho, \tau)\, S_+(\tau)] - [T - T_1(\rho, \tau)\, S_+(\tau)]\right\} \times$$
$$\times\, S_+(\rho - (1 + \mathrm{Pe}\,\tau)) - \left\{\frac{\partial T}{\partial\gamma} - \mathrm{Bi}\,[T - T_2(\rho, \tau)\, S_+(\tau)]\right\} = 0, \quad \gamma = 0, \tag{3}$$

$$\lim_{\rho,\gamma\to\infty} T(\rho, \gamma, \tau) < \infty, \tag{4}$$

где $S_+(x) = \{1\ \forall x > 0 \wedge 0\ \forall x \leqslant 0\}$; $\tau = \mathrm{Fo} = at/R^2$ — безразмерное время; a — коэффициент температуропроводности; t — время; $\rho = r/R = 1 + \mathrm{Pe}\,\tau$, $\gamma = z/R$ — соответственно радиальная и осевая безразмерные координаты; $\mathrm{Pe} = vR/a$ — число Пекле; R — параметр, имеющий размерность длины.

Искомую функцию $T(\rho, \gamma, \tau)$, являющуюся непрерывной функцией координат и времени, представим ортогональным рядом по полиномам Чебышева — Лагерра [2]

$$T(\rho, \gamma, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\rho, \gamma)\, L_n(\tau). \tag{5}$$

Здесь

$$T_n(\rho, \gamma) = \int_0^{\infty} T(\rho, \gamma, \tau)\, e^{-\tau} L_n(\tau); \tag{6}$$

$L_n(\tau)$ — ортонормированные полиномы Чебышева — Лагерра. Тогда формулу (6) можно рассматривать как интегральное преобразование функции $T(\rho, \gamma, \tau)$ по временной переменной, а ряд (5) — как формулу обращения этого интегрального преобразования.

К задаче (1) — (4) применим интегральное преобразование (6) и интегральное преобразование Ханкеля [4]. Если

$$T_n^H(\gamma) = \int_0^{\infty} T_n(\rho, \gamma)\, \rho J_0(\xi\rho)\, d\rho,$$

то в силу задачи (1) — (4) получим

$$\frac{d^2T_n^H}{d\gamma^2} - (1+\xi^2)\,T_n^H = \sum_{m=0}^{n-1} T_m^H \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots); \tag{7}$$

$$\int_0^\infty e^{-\tau}L_n(\tau)\,d\tau \int_0^{1+\mathrm{Pe}\tau} \left[\frac{\partial T}{\partial\gamma} - (\mathrm{Bi}+1)\,T + \mathrm{Bi}\,T_2(\rho,\ \tau) + T_1(\rho,\ \tau)\right]\times$$

$$\times\ \rho J_0(\xi\rho)\,d\rho - \frac{dT_n^H}{d\gamma} + \mathrm{Bi}\,(T_n^H - u_n^H) = 0, \quad \gamma = 0, \tag{8}$$

где

$$u_n(\rho) = \int_0^\infty T_2(\rho,\ \tau)\,e^{-\tau}L_n(\tau)\,d\tau;$$

$$u_n^H(\xi) = \int_0^\infty u_n(\rho)\,\rho J_0(\xi\rho)\,d\rho \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Общее решение треугольной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7), которое удовлетворяет условиям на бесконечности (4), можно представить в виде

$$T_n^H(\gamma) = \sum_{p=0}^{n} A_{n-p}(\xi)\,G_p(\xi,\ \gamma) \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{9}$$

Здесь $A_{n-p}(\xi)$ — произвольные функции, которые определяются из граничного условия (8), а $G_p(\xi,\ \gamma)$ $(p = \overline{0,\ n})$ — фундаментальная система решений уравнений (7).

С помощью формулы обращения интегрального преобразования Ханкеля [4] из соотношения (9) получаем

$$T_k(\rho,\ \gamma) = \sum_{i=0}^{k}\int_0^\infty A_{k-i}(u)\,G_i(u,\ \gamma)\,uJ_0(u\rho)\,du \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Поэтому для функции $T(\rho,\ \gamma,\ \tau)$ из выражения (5) находим

$$T(\rho,\ \gamma,\ \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} L_k(\tau)\sum_{i=0}^{k}\int_0^\infty A_{k-i}(u)\,G_i(u,\ \gamma)\,uJ_0(u\rho)\,du. \tag{10}$$

Подставив выражения (9), (10) в равенство (8), получим

$$\sum_{p=0}^{n} A_{n-p}(\xi)\left\{\mathrm{Bi}\,G_p(\xi,\ 0) - \frac{\partial G_p(\xi,\ 0)}{\partial\gamma}\right\} - \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\int_0^\infty A_{k-i}(u)\,u\left\{(1+\mathrm{Bi})\,G_i(u,0) -\right.$$

$$\left.-\frac{\partial G_i(u,\ 0)}{\partial\gamma}\right\}\left\{\int_0^\infty e^{-\tau}L_n(\tau)\,L_k(\tau)\,d\tau\int_0^{1+\mathrm{Pe}\tau}\rho J_0(u\rho)\,J_0(\xi\rho)\,d\rho\right\}du =$$

$$= \mathrm{Bi}\,u_n^H - \int_0^\infty e^{-\tau}L_n(\tau)\,d\tau\int_0^{1+\mathrm{Pe}\tau}\{\mathrm{Bi}\,T_2(\rho,\tau) + T_1(\rho,\tau)\}\,\rho J_0(\xi\rho)\,d\rho \quad (n=0,1,2,\ldots). \tag{11}$$

Пронормируем $G_p(\xi,\ \gamma)$ $(p = \overline{0,\ n})$ следующим образом:

$$\mathrm{Bi}\,G_p(\xi,\ 0) - \frac{\partial G_p(\xi,\ 0)}{\partial\gamma} = 1 \tag{12}$$

и введем обозначения

$$F_n(\xi) = \mathrm{Bi}\,u_n^H - \int_0^\infty e^{-\tau}L_n(\tau)\,d\tau\int_0^{1+\mathrm{Pe}\tau}[\mathrm{Bi}\,T_2(\rho,\ \tau) + T_1(\rho,\tau)]\,\rho J_0(\xi\rho)\,d\rho,$$

$$Q^k \qquad \int_0^\infty e^{-\tau}L_n(\tau)\,L_k(\tau)\,d\tau\int_0^{1+\mathrm{Pe}\tau}\rho J_0(u\rho)\,J_0(\xi\rho)\,d\rho \quad (n,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Так как

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\int_0^{\infty} A_{k-i}(u)\,u\,(1+G_i(u,\ 0))\,Q_n^k(u,\ \xi)\,du = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty} A_k(u)\,uR_n^k(u,\ \xi)\,du,$$

где

$$R_n^k(u,\ \xi) = \sum_{i=0}^{\infty}(1+G_i(u,\ 0))\,Q_n^{k+i}(u,\ \xi) \quad (n,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

то система (11) преобразуется к виду

$$\sum_{p=0}^{n} A_{n-p}(\xi) - \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty} A_k(u)\,uR_n^k(u,\ \xi)\,du = F_n(\xi) \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \quad (13)$$

Заметим, что систему (13) последовательным вычитанием можно привести к классической [5] бесконечной системе интегральных уравнений Фредгольма

$$A_n(\xi) - \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty} A_k(u)\,K_{n,k}(u,\ \xi)\,du = F_n(\xi) - F_{n-1}(\xi) \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \quad (14)$$

с ядрами

$$K_{n,k}(u,\ \xi) = u\sum_{i=0}^{\infty}(1+G_i(u,\ 0))\int_0^{\infty} e^{-\tau}\,[L_n(\tau) - L_{n-1}(\tau)] \times$$

$$\times L_{k+i}(\tau)\,d\tau \int_0^{1+\mathrm{Pe}\tau} \rho J_0(\xi\rho)\,J_0(u\rho)\,d\rho \quad (n,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

В частном случае для неподвижной границы раздела граничных условий ядра $K_{n,k}(u,\ \xi)$ при $\mathrm{Pe}=0$ будут иметь следующий вид:

$$K_{n,k}(u,\ \xi) = u\int_0^{1} \rho J_0(\xi\rho)\,J_0(u\rho)\,d\rho \sum_{i=0}^{\infty}(1+G_i(u,\ 0))\int_0^{\infty} e^{-\tau}L_{k+i}(\tau) \times$$

$$\times [L_n(\tau) - L_{n-1}(\tau)]\,d\tau \quad (n,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Так как полиномы $L_n(\tau)$ образуют ортонормированную систему функций на промежутке $[0,\ \infty)$, то

$$K_{n,k}(u,\ \xi) = u\,(G_{n-k}(u,\ 0) - G_{n-k-1}(u,\ 0))\int_0^{1} \rho J_0(\xi\rho)\,J_0(u\rho)\,d\rho.$$

Вследствие этого система (14) преобразуется в последовательность интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$A_0(\xi) - \int_0^{\infty} A_0(u)\,K(u,\ \xi)\,du = F_0(\xi);$$

$$A_n(\xi) - \int_0^{\infty} A_n(u)\,K(u,\ \xi)\,du = F_n(\xi) - F_{n-1}(\xi) + \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\infty} A_k(u) \times \quad (15)$$

$$\times\,(u\,(G_{n-k}(u,\ 0) - G_{n-k-1}(u,\ 0))\int_0^{1} \rho J_0(u\rho)\,J_0(\xi\rho)\,d\rho \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где ядро

$$K(u,\ \xi) = u\,(1+G_0(u,\ 0))\int_0^{1} \rho J_0(\xi\rho)\,J_0(u\rho)\,d\rho.$$

Решив систему интегральных уравнений (14) по формуле (10), определим температурное поле в полупространстве.

Рассмотрим вторую нестационарную задачу теплопроводности в полупространстве с движущейся прямолинейной линией раздела граничных условий. Пусть на границе $z = 0$ полупространства, отнесенного к декартовой системе координат (x, y, z), в полосе $-b - vb \leqslant x \leqslant b + vt$ задана температура $T_1(x, t) S_+(t)$, а вне ее происходит теплообмен по закону Ньютона с внешней средой, температура которой $T_2(x, t) S_+(t)$. Температурное поле в полупространстве $z > 0$ определим как решение следующей плоской задачи:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \gamma^2} = \frac{\partial T}{\partial \tau}; \tag{16}$$

$$T(\xi, \gamma, \tau) = 0, \quad \tau = 0; \tag{17}$$

$$\left\{\frac{\partial T}{\partial \gamma} - \mathrm{Bi}\,[T - T_2(\xi, \tau) S_+(\tau)] - [T - T_1(\xi, \tau) S_+(\tau)]\right\} [S_+(\xi + 1 + \mathrm{Pe}\,\tau) -$$
$$+ S_+(\xi - 1 - \mathrm{Pe}\,\tau)] - \left\{\frac{\partial T}{\partial \gamma} - \mathrm{Bi}\,[T - T_2(\xi, \tau) S_+(\tau)]\right\} = 0, \quad \gamma = 0; \tag{18}$$

$$\lim_{\xi, \gamma \to \infty} T(\xi, \gamma, \tau) < \infty. \tag{19}$$

Здесь $\xi = x/b$; $\gamma = z/b$; $\tau = at/b^2$, $\mathrm{Pe} = vb/a$, а остальные обозначения прежние.

Применим к задаче (16) — (19) интегральное преобразование (6) и интегральное преобразование Фурье. Если

$$T_n^F(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n(\xi, \gamma) e^{-i\omega\xi} d\xi \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

то получим задачу

$$\frac{d^2 T_n^F}{d\gamma^2} - (1 + \omega^2) T_n^F = \sum_{m=0}^{n-1} T_m^F \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{20}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\tau} L_n(\tau)\, d\tau \int_{-1-\mathrm{Pe}\,\tau}^{1+\mathrm{Pe}\,\tau} \left\{\frac{\partial T}{\partial \gamma} - T(1 + \mathrm{Bi})\right\} e^{-i\omega\xi} d\xi - \frac{dT_n^F}{d\gamma} + \mathrm{Bi}\, T_n^F =$$
$$= \mathrm{Bi}\, u_n^F - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\tau} L_n(\tau)\, d\tau \int_{-1-\mathrm{Pe}\,\tau}^{1+\mathrm{Pe}\,\tau} \{\mathrm{Bi}\, T_2(\xi, \tau) + T_1(\xi, \tau)\} e^{-i\omega\xi} d\xi, \quad \gamma = 0, \tag{21}$$

где

$$u_n^F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_n(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Аналогично предыдущему общее решение системы (20) представим в виде

$$T_n^F(\gamma) = \sum_{p=0}^{n} A_{n-p}(\omega) G_p(\omega, \gamma), \tag{22}$$

где функции $A_{n-p}(\omega)$ определяются из граничного условия (21).

На основании формулы обращения интегрального преобразования Фурье и формулы (6) имеем

$$T(\xi, \gamma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} L_k(\tau) \sum_{i=0}^{k} \int_{-\infty}^{\infty} A_{k-i}(u) G_i(u, \gamma) e^{iu\xi} du. \tag{23}$$

Подставив выражения (22), (23) в равенство (21), найдем

$$\sum_{p=0}^{n} A_{n-p}(\omega) \left\{\mathrm{Bi}\, G_p(\omega, 0) - \frac{\partial G_p(\omega, 0)}{\partial \gamma}\right\} -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\int_{-\infty}^{\infty}A_{k-j}(u)\left\{(1+\mathrm{Bi})\,G_j(u,0)-\frac{\partial G_j(u,0)}{\partial\gamma}\right\}\times$$

$$\times\left\{\int_0^{\infty}e^{-\tau}L_n(\tau)\,L_k(\tau)\,d\tau\int_{-1-\mathrm{Pe}\,\tau}^{1+\mathrm{Pe}\,\tau}e^{iu\xi}e^{-iw\xi}d\xi\right\}=\mathrm{Bi}\,u_n^F-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\tau}L_n(\tau)\,d\tau\times$$

$$\times\int_{-1-\mathrm{Pe}\,\tau}^{1+\mathrm{Pe}\,\tau}[\mathrm{Bi}\,T_2(\xi,\tau)+T_1(\xi,\tau)]\,e^{-iw\xi}d\xi,\quad\gamma=0. \tag{24}$$

Пронормируем $G_p(w,\gamma)$ согласно условию (12) и введем обозначения

$$F_n(w)=\mathrm{Bi}\,u_n^F-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\tau}L_n(\tau)\,d\tau\int_{-1-\mathrm{Pe}\,\tau}^{1+\mathrm{Pe}\,\tau}[\mathrm{Bi}\,T_2(\xi,\tau)+T_1(\xi,\tau)]\,e^{-iw\xi}d\xi,$$

$$Q_n^k(u,w)=\frac{1}{u-w}\int_0^{\infty}e^{-\tau}L_n(\tau)\,L_k(\tau)\sin((1+\mathrm{Pe}\,\tau)(u-w))\,d\tau$$

$$(n,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Так как

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\int_{-\infty}^{\infty}A_{k-j}(u)\,(1+G_j(u,0))\,Q_n^k(u,w)\,du=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A_k(u)\,R_n^k(u,w)\,du,$$

где

$$R_n^k(u,w)=\sum_{j=0}^{\infty}(1+G_j(u,0))\,Q_n^{k+j}(u,w),$$

то система (24) будет иметь вид

$$\sum_{p=0}^{n}A_{n-p}(w)-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A_k(u)\,R_n^k(u,w)\,du=F_n(w) \tag{25}$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Систему (25) последовательным вычитанием можно привести к бесконечной системе интегральных уравнений

$$A_n(w)-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A_k(u)\,K_{n,k}(u,w)\,du=F_n(w)-F_{n-1}(w) \tag{26}$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

с ядрами

$$K_{n,k}(u,w)=\frac{1}{u-w}\sum_{j=0}^{\infty}(1+G_j(u,0))\int_0^{\infty}e^{-\tau}L_{k+j}(\tau)\sin((1+\mathrm{Pe}\,\tau)(u-w))\times$$

$$\times(L_n(\tau)-L_{n-1}(\tau))\,d\tau.$$

В частном случае для неподвижной границы раздела граничных условий система (26) преобразуется в последовательность интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$A_0(w)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A_0(u)\,K(u,w)\,du=F_0(w),$$

$$A_n(w)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A_n(u)\,K(u,w)\,du=F_n(w)-F_{n-1}(w)+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{-\infty}^{\infty}A_k(u)\,\frac{\sin(u-w)}{u-w}\,(G_{n-k}(u,0)-G_{n-k-1}(u,0))\,du$$

$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

с ядром

$$K(u, w) = (1 + G_0(u, 0)) \frac{\sin(u - w)}{u - w}.$$

Решив систему интегральных уравнений (26), по формуле (23) определим температурное поле в полупространстве. Последовательности уравнений (15), (27) можно решить соответствующими числовыми методами.

1. *Галазюк В. А.* Метод поліномів Чебишева — Лагера в змішаній задачі для нелінійного диференціального рівняння 2-го роду із постійними коефіцієнтами.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1981, № 1, с. 3—6.
2. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложение.— М. ; Л. : Физматгиз, 1963.— 358 с.
3. *Уфлянд Я. С.* Метод парных интегральных уравнений в задачах математической физики.— Л. : Наука, 1977.— 220 с.
4. *Трантер К. Дж.* Интегральные преобразования в матфизике.— М. : Гостехиздат, 1956.— 204 с.
5. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения.— М. : Изд-во иностр. лит., 1960.— 296 с.

Львовский университет

Поступила в редколлегию 03.06.81

УДК 536.12 — 539.376

Е. Г. Грицько, Р. В. Гудзь

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА ПРИ ЗАВИСЯЩЕМ ОТ РАДИАЛЬНОЙ КООРДИНАТЫ КОЭФФИЦИЕНТЕ ТЕПЛООТДАЧИ

Рассмотрим ортотропный цилиндр $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z < \infty$, $0 \leqslant \varphi < \pi$ боковая поверхность которого $r = R$ поддерживается при температуре t_b. Через его основание $z = 0$ осуществляется конвективный теплообмен с неоднородной средой: коэффициент теплоотдачи α_1 с кольцевой области

$$\Gamma = \{(r, \varphi, z) : r_0 \leqslant r \leqslant r_1, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \; z = 0\}$$

отличается от коэффициента теплоотдачи α с остальной части поверхности $z = 0$. Температура $t_1(r)$ внешней среды, омывающей область Γ, и температура $t_c(r)$ внешней среды, омывающей остальную часть поверхности $z = 0$, суть функции радиальной координаты.

Доопределив функцию $t_c(r)$ на области Γ следующим образом: $t_c(r)|_{r\in\Gamma} \equiv t_c(r_0)$ и перейдя к безразмерным величинам, краевую задачу для определения нестационарного температурного поля запишем в виде [1]

$$\frac{k^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} = \frac{\partial \theta}{\partial \mathrm{Fo}}, \tag{1}$$

$$\theta|_{\rho=1} = 0, \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial Z} &= \mathrm{Bi}\,\theta + (\mathrm{Bi}_1 - \mathrm{Bi})\,\theta\chi(\rho) - \mathrm{Bi}\,[\theta_c(\rho) - \theta_c(\rho_0)\,\chi(\rho)] - \\ &\quad - \mathrm{Bi}_1\,\theta_1(\rho)\,\chi(\rho) \text{ при } Z = 0, \\ &\theta|_{Z\to\infty} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\theta|_{\mathrm{Fo}=0} = 0. \tag{4}$$

Здесь

$$\theta = \frac{t - t_b}{t_1(\rho_3 R) - t_b}; \quad \theta_c(\rho) = \frac{t_c(\rho R) - t_b}{t_1(\rho_3 R) - t_b};$$

$$\theta_1(\rho) = \frac{t_1(\rho R) - t_b}{t_1(\rho_3 R) - t_b}; \quad k = \sqrt{\frac{\lambda_\rho}{\lambda_Z}}; \quad \rho = \frac{r}{R}; \quad Z = \frac{z}{R};$$

$$\rho_0 = \frac{r_0}{R}; \quad \rho_1 = \frac{r_1}{R};$$