по нелинейной теории оболочек. Казань 8—10 сентября 1980 г. Казань. 1980, с. 113. (Препринт; № 09031).
4. *Коляно Ю. М., Грицько Е. Г.* О применении ортогональных систем функций при расчете температурных полей локально нагреваемых по торцам пластинок.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 11, с. 100—103.
5. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.— М. : Наука, 1966.— 724 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики
АН УССР

Поступила в редколлегию
17.12.80

УДК 517.95

М. Т. Солодяк, В. И. Третяк

ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Нелинейное уравнение параболического типа

$$u_{xx} - a(u)\, u_t = 0, \tag{1}$$

где $a(u)$ — заданная функция переменной $u(x, t)$, встречается в ряде задач электродинамики сплошных сред и термоупругости [1, 2, 4]. Здесь решается проблема сопоставления уравнению (1) вариационного принципа с интегралом действия

$$S = \int dxdtL \tag{2}$$

и изучаются его свойства симметрии. Совместное решение этих двух задач позволяет найти по теореме Нетер [3, 5] законы сохранения для уравнения (1).

Проблема нахождения вариационного принципа для заданных уравнений составляет содержание обратной задачи вариационного исчисления [6, 8] и имеет хорошо определенное решение лишь для самосопряженных уравнений или систем. Для уравнений, заданных в несамосопряженном виде, к которым относится (1), задача значительно усложняется. Один из способов ее решения, рассматриваемый в настоящей работе, заключается в погружении уравнения (1) в некоторую самосопряженную систему [7]. С этой целью введем вспомогательное поле $v(x, t)$, удовлетворяющее уравнению

$$v_{xx} + a(u)\, v_t = 0. \tag{3}$$

Система уравнений (1), (3) является самосопряженной при любых функциях $a(u)$. Функция Лагранжа L, определяющая действие (2), находится по правилу [6] и после некоторых преобразований приобретает вид

$$L = u_x v_x + (v u_t - u v_t)\, b(u), \tag{4}$$

где

$$b(u) \equiv \int_0^1 d\tau\tau a(\tau u). \tag{5}$$

Легко убедиться, что уравнения Эйлера, соответствующие функции Лагранжа (4), дают систему уравнений (1), (3). При этом используется тождество

$$2b(u) + ub'(u) = a(u), \tag{6}$$

являющееся следствием (5). Штрих у функции обозначает производную по ее аргументу.

Получили вариационную формулировку уравнения (1) за счет введения добавочного поля $v(x, t)$, определением которого следует считать уравнение (3). Если в последнем u — заданное решение (1), то (3) — линейное уравнение с переменным коэффициентом. Ввиду нефизичности поля $v(x, t)$

краевые или начальные условия для уравнения (3) полностью в нашем распоряжении.

Условие инвариантности вариационного принципа (2) относительно r-параметрической группы Ли преобразований с параметрами $\lambda^\alpha, \alpha = 1, \dots r$,

$$u'(x, t) = u(x, t) + \sum_{\alpha=1}^{r} \lambda^\alpha \xi_\alpha + o(\lambda), \qquad v'(x, t) = v(x, t) + \sum_{\alpha=1}^{r} \lambda^\alpha \eta_\alpha + o(\lambda) \tag{7}$$

заключается в существовании пары функций Ω_α^x, Ω_α^t, обеспечивающей выполнение соотношений

$$\xi_\alpha \frac{\partial L}{\partial u} + \eta_\alpha \frac{\partial L}{\partial v} + \frac{d\xi_\alpha}{dx}\frac{\partial L}{\partial u_x} + \frac{d\xi_\alpha}{dt}\frac{\partial L}{\partial u_t} + \frac{d\eta_\alpha}{dx}\frac{\partial L}{\partial v_x} + \frac{d\eta_\alpha}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_t} = \frac{d\Omega_\alpha^x}{dx} + \frac{d\Omega_\alpha^t}{dt}. \tag{8}$$

Как показано в работе [5], преобразования независимых переменных x, t можно не рассматривать особо, если допустить в выражениях (7) зависимость ξ_α, η_α по крайней мере от первых производных. При заданной функции Лагранжа L соотношения (8) составляют систему уравнений для ξ_α, η_α, Ω_α^x, Ω_α^t. Каждому ее решению соответствует некоторый закон сохранения: на множестве решений системы (1), (3) выполняются равенства

$$\frac{dI_\alpha^x}{dx} + \frac{dI_\alpha^t}{dt} = 0, \tag{9}$$

где токи I_α^x, I_α^t имеют вид

$$I_\alpha^x = \xi_\alpha \frac{dL}{\partial u_x} + \eta_\alpha \frac{\partial L}{\partial v_x} - \Omega_\alpha^x, \qquad I_\alpha^t = \xi_\alpha \frac{\partial L}{\partial u_t} + \eta_\alpha \frac{\partial L}{\partial v_t} - \Omega_\alpha^t. \tag{10}$$

Подставляя в уравнения (8) выражение (4), получаем

$$\xi_\alpha [vb'(u)\, u_t - (b(u) + ub'(u))\, v_t] + \eta_\alpha b(u)\, u_t + \frac{d\xi_\alpha}{dx} v_x + \frac{d\eta_\alpha}{dx} u_x + \left[\frac{d\xi_\alpha}{dt} v - \frac{d\eta_\alpha}{dt} u\right] b(u) = \frac{d\Omega_\alpha^x}{dx} + \frac{d\Omega_\alpha^t}{dt}. \tag{11}$$

Если ограничиться в уравнении (11) рассмотрением функций ξ_α, η_α, зависящих не выше, чем первых производных полей u, v, то получим три независимых его решения:

$$\xi_1 = u_x,\ \eta_1 = v_x;\quad \xi_2 = u_t,\ \eta_2 = v_t;$$
$$\xi_3 = xu_x + 2tu_t,\quad \eta_3 = xv_x + 2tv_t + v;$$
$$\Omega_1^x = \Omega_2^t = L,\quad \Omega_2^x = \Omega_1^t = 0,\quad \Omega_3^x = xL,\quad \Omega_3^t = 2tL. \tag{12}$$

Решения (12) отвечают инвариантности уравнения (1) относительно сдвигов по x и t: $x \to x + \lambda_1$, $t \to t + \lambda_2$ и масштабных преобразований $x \to e^{\lambda_3}x$, $t \to e^{2\lambda_3}t$. Подстановка (12) в (10) дает сохраняющиеся токи

$$I_1^x = u_x v_x - (vu_t - uv_t)\, b(u), \qquad I_1^t = (vu_x - uv_x)\, b(u); \tag{13}$$

$$I_2^x = u_x v_t + u_t v_x,\quad I_2^t = -u_x v_x; \tag{14}$$

$$I_3^x = xI_1^x + 2tI_2^x + vu_x, \qquad I_3^t = xI_1^t + 2tI_2^t - uvb(u). \tag{15}$$

В этих выражениях вместо $v(x, t)$ можно подставлять любое решение уравнения (3), определяемое функцией $u(x, t)$, так что полученные токи являются некоторыми функционалами, определяемыми решениями $u(x, t)$ уравнения (1). Ввиду бесконечности числа решений $v(x, t)$ уравнения (3) получили фактически бесконечное число законов сохранения для уравнения (1).

Дальнейшее исследование в указанном направлении может заключаться в поисках решений уравнения (11), зависящих от высших производных. Полученные результаты можно применить к исследованию краевых задач для уравнения (1).

1. *Колесников П. М.* О диффузии сильного магнитного поля в нелинейных средах. 1.— Журн. техн. физики, 1968, 38, № 12, с. 2014—2021.
2. *Нейман Л. Р.* Поверхностный эффект в ферромагнитных телах.— М. : Госэнергоиздат, 1949.— 190 с.
3. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1978.— 399 с.
4. *Солодяк М. Т.* Температурные поля и напряжения в магнитомягком упругом полупространстве при установившемся периодическом во времени электромагнитном поле.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 12, с. 108—110.
5. *Хухунашвили З. В.* Симметрия дифференциальных уравнений теории поля.— Изв. вузов. Физика, 1971, № 3, с. 95—103.
6. *Aldersley S. J.* Higher Euler operators and some of their applications.— J. Math. Phys., 1979, 20, N 3, p. 522—531.
7. *Komkov V.* A dual form of Noether's theorem with applications.— J. Math. Anal. Appl., 1980, 75, N 1, p. 251—269.
8. *Santilli R. M.* Foundations of theoretical mechanics. I. The inverse problem in newtonian mechanics.— New York etc : Springer, 1978.— 266 p.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
08.05.81

УДК 517.9

Я. П. Антонюк, Л. М. Зорий, Б. А. Попов

К ИССЛЕДОВАНИЮ МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ РЯДОВ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСНОЙ ФОРМЫ УПРУГИХ СИСТЕМ

При изучении малых колебаний и устойчивости сложных упругих систем успешно используется метод характеристических рядов [4]. Исследование указанных задач зачастую сводится к обобщенным краевым задачам для линейных дифференциальных уравнений.

Пусть задано уравнение вида

$$L[y] \equiv y^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} p_i(x)\, y^{(n-i)}(x) = p(x), \tag{1}$$

где $p_i(x)$ — непрерывные и непрерывно дифференцируемые функции на интервале (a, b) до порядков $n - i$ включительно; $p(x)$ — непрерывная функция. Общее решение этого уравнения имеет вид [6]

$$y(x, \alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} C_i K_x^{(i)}(x, \alpha) + \int_{\alpha}^{x} K(x, \alpha)\, p(\alpha)\, d\alpha. \tag{2}$$

Здесь $K(x, \alpha)$ — функция влияния соответствующего однородного уравнения.

При построении характеристических рядов используем формулу [5]

$$K_{\alpha^r}^{(r)}(x, \alpha) = \sum_{s=n-1}^{\infty} \frac{1}{(s-k)!}\, b_{s-r,r}^{(s)}(\alpha)\,(x-\alpha)^{s-r}, \tag{3}$$

где $K_{\alpha^r}^{(r)}(x, \alpha)$ — частные производные от функции $K(x, \alpha)$; $b_{s-r,r}^{(s)}$, $r = \overline{0, n-1}$ — функции, последовательно определяемые через $p_i(\alpha)$ и их производные.