1. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения.— М. : Наука, 1971.— 312 с.
2. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений спутников.— Мат. методы в динамике косм. аппаратов, 1969, вып. 4, с. 53—58.
3. *Сокол Э. Н.* Расчет элементов контейнерных трубопроводных трасс.— Стр-во трубопроводов, 1979, № 7, с. 25—26.

Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию 08.06.81

УДК 539.3

О. Л. Кордюк, А. В. Плеханов

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЕ ПРИ КРУЧЕНИИ

Для решения задачи о кручении трехслойной пластины, ослабленной круговым отверстием, используются уравнения, полученные в работе [3]. Уравнения учитывают деформации поперечного сдвига и обжатия, порядок их не зависит от номера приближения и для любого напряженного состояния равен шести.

Рассмотрим трехслойную изотропную пластину симметричного строения постоянной толщины H, составленную из наружных слоев толщиной t и заполнителя толщиной $2h$. Пластина ослаблена круговым отверстием радиуса r_0. Координатную ось z цилиндрической системы координат $r\theta z$ направим вниз по геометрической оси отверстия, плоскость $r\theta$ совместим со срединной плоскостью пластины. Лицевые плоскости $z = \pm 0{,}5H$ и контур отверстия свободны от нагрузки, а на бесконечности пластина испытывает кручение моментами M.

Напряженное состояние в пластине с отверстием представим в виде суммы основного и возмущенного напряженных состояний. Для основного напряженного состояния

$$\sigma_r^{0k} = S_0^k Mz \sin 2\theta, \quad \sigma_\theta^{0k} = -S_0^k Mz \sin 2\theta,$$
$$\sigma_{r\theta}^{0k} = S_0^k Mz \cos 2\theta, \quad \sigma_{rz}^{0k} = \sigma_{\theta z}^{0k} = \sigma_z^{0k} = 0, \tag{1}$$

где $S_0^k = E^k / D_1 (1 - \mu_k^2)$.

Остальные обозначения здесь и в дальнейшем соответствуют работе [3].

При определении возмущенного состояния воспользуемся уравнениями, полученными в соответствии с работой [3]: для первого приближения ($j = 1$)

$$\nabla^4 w_1 = 0,$$
$$\nabla^2 \psi_1 - 2L_{711} L_{1111} L_{1211}^{-1} \psi_1 = 0; \tag{2}$$

для второго приближения ($j = 2$)

$$B_{31} \nabla^4 w_2 + B_{32} h^{-2} \nabla^2 w_2 + B_{33} h^{-4} w_2 = -B_{30} h^{-2} \nabla^2 w_1, \tag{3}$$

$$\nabla^2 \psi_2 - 2 (B_0 + B_{11}) (B_{16} h^2)^{-1} \psi_2 = 2B_{38} [B_2 (B_9 - B_{11}) h^2]^{-1} \psi_1. \tag{4}$$

Остальные функции для первого и второго приближений определяются через w_1, w_2, ψ_1, ψ_2 и здесь не приводятся.

Уравнения для второго и последующих приближений являются неоднородными. Для сведения их к однородным представим w_j и ψ_j ($j \geqslant 2$) в виде

$$w_j = \sum_{m=1}^{j} (\alpha_{jm} w_m^* + \beta_{jm} \nabla^2 w_m^*),$$
$$\psi_j = \sum_{m=1}^{j} \gamma_{jm} \psi_m^*, \tag{5}$$

где при $j = 2$

$$\alpha_{22} = B_{31}^{-1}; \quad \beta_{22} = 0; \quad \gamma_{22} = 1.$$

Подставляя соотношения (5) в уравнения (3), (4) и приравнивая нулю коэффициенты при w_1, $\nabla^2 w_1$ и ψ_1, находим значения коэффициентов α_{21}, β_{21}, γ_{21}. Тогда из уравнений (3), (4) для определения $\overset{*}{w_2}$ и $\overset{*}{\psi_2}$ получим однородные уравнения

$$\nabla^4 w_2^* - 2S_2 L_2^{-2}\nabla^2 w_2^* + L_2^{-4} w_2^* = 0, \tag{6}$$

$$\nabla^2 \psi_2^* - k_2^2 \psi_2^* = 0. \tag{7}$$

Здесь

$$L_2 = h\sqrt{B_{31}B_{33}^{-1}}\,;\ S_2 = 0{,}5B_{32}/\sqrt{B_{31}B_{33}}\,.$$

Аналогично могут быть приведены к однородным и уравнения для последующих приближений. Решения однородных уравнений для j-го напряженного состояния применительно к рассматриваемой задаче имеют вид

$$w_j^* = \sum_{n=0,2}\sum_{l=1,2} C_{lnj} f_{lnj}(r)\sin n\theta, \tag{8}$$

$$\psi_j^* = C_{32j} f_{32j}(r)\cos 2\theta, \tag{9}$$

где $f_{32j}(r) = PK_2(k_j r)$; $P = \exp(k_j r_0)$; $K_2(k_j r)$ — функция Макдональда.

Для первого состояния ($j = 1$)

$$f_{1n1} = r^{-n};\quad f_{2n1} = r^{-n+2}\,(n \geqslant 1),\quad f_{201} = \ln r, \tag{10}$$

$$w_1^* = w_1,\quad \psi_1^* = \psi_1.$$

Отметим, что решения (8), (9) для первого приближения при переходе к однослойной пластине совпадают с решениями, полученными в работе [2] на основе теории пластин Тимошенко — Рейсснера.

Для последующих приближений ($j \geqslant 2$) функции $f_{lnj}(r)$ определяются так:

при $0 \leqslant S_j < 1$

$$f_{1nj} = P\,\mathrm{Re}\,H_n^{(1)}(\lambda_j e^{i\varphi_j} r),\quad f_{2nj} = P\,\mathrm{Im}\,H_n^{(1)}(\lambda_j e^{i\varphi_j} r), \tag{11}$$

$$(\lambda_j = L_j^{-1},\quad P = \exp(\lambda_j r_0\sin\varphi_j),\quad i^2 = -1,$$

$$\varphi_j = 0{,}5\left[\pi - \mathrm{arctg}\left(\sqrt{1 - S_j^2}\,S_j^{-1}\right)\right]$$

($H_n^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода);

при $S_j = 1$ $$f_{1nj} = PK_n(\lambda_j r),\quad f_{2nj} = PrK_{n-1}(\lambda_j r) \tag{12}$$

($\lambda_j = L_j^{-1}$, $P = \exp(\lambda_j r_0)$, K_n — функция Макдональда);

при $S_j > 1$ $$f_{1nj} = P_1 K_n(\lambda_{1j} r),\quad f_{2nj} = P_2 K_n(\lambda_{2j} r) \tag{13}$$

$$(\lambda_{1j} = L_j^{-1}\sqrt{S_j - \sqrt{S_j^2 - 1}},\quad \lambda_{2j} = L_j^{-1}\sqrt{S_j^2 + \sqrt{S_j^2 - 1}},$$

$$P_t = \exp(\lambda_{tj} r_0)\ (t = 1, 2)).$$

Постоянные интегрирования C_{lnj}, входящие в решения (8), (9), определяются из следующих условий на контуре отверстия $r = r_0$:

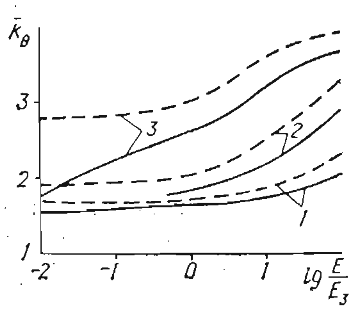
для первого приближения

$$M_{1r} = -M\sin 2\theta,\quad M_{1r\theta} = -M\cos 2\theta,\quad Q_{1r} = 0; \tag{14}$$

для последующих приближений ($j \geqslant 2$)

$$M_{jr} = 0,\quad M_{jr\theta} = 0,\quad Q_{jr} = 0. \tag{15}$$

Для исследования влияния параметров трехслойной пластины на величину коэффициента концентрации напряжений были выполнены числовые расчеты для различных значений $\lambda = H/r_0$, t/h, E/E_3 при $\mu = \mu_3 = {}^1/_3$ (E, E_3, μ, μ_3 — модули упругости и коэффициенты Пуассона материала наружных слоев и заполнителя). На рисунке представлены графики, показывающие изменение коэффициентов концентрации k_θ напряжений σ_θ на контуре отверстия для крайних точек наружного слоя в зависимости от параметров E/E_3 и λ при $t/h = 0{,}4$ (сплошные линии — второе приближение, штриховые — первое приближение). Кривые 1—3 соответствуют $\lambda = 0{,}2$; 0,8; 4. Полученные результаты показывают, что коэффициенты концентрации существенно зависят от λ и E/E_3. С увеличением λ коэффициенты концентрации повышаются. Увеличение жесткости заполнителя приводит к их снижению. Учитывая это, можно, как отмечено в работе [1], уменьшить эффект концентрации напряжений вблизи отверстия путем повышения жесткости заполнителя в зоне, прилегающей к отверстию.



Сравнение результатов первого и второго приближений показывает, что при $\lambda \leqslant 0{,}2$ и $0{,}1 \leqslant E/E_3 \leqslant 10$ можно ограничиться при определении коэффициентов концентрации первым приближением. При увеличении λ и существенном различии жесткостей наружных слоев и заполнителя необходимо решение в более высоких приближениях.

1. *Ван Фо Фы Г. А., Савиченко А. А.* Напряженное состояние около кругового выреза в трехслойной сферической оболочке.— Прикл. механика, 1970, 6, № 6, с. 112—116.
2. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью.— Киев : Наук. думка, 1973.— 248 с.
3. *Плеханов А. В., Прусаков А. П.* О построении теории изгиба трехслойных пластин средней толщины энергоасимптотическим методом.— Изв. вузов. Стр-во и архитектура, 1977, № 7, с. 28—32.

Днепропетровский инженерно-строительный институт

Поступила в редколлегию 17.12.80

УДК 539.3

И. Г. Гончар

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСТУПЕНЧАТОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ РАДИАЛЬНОМ СЖАТИИ

Рассмотрим круглую многоступенчатую пластину (рис. 1), полутолщину которой можно представить в виде

$$h(r) = h_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (h_{k+1} - h_k)\, S_+ (r - R_k), \tag{1}$$

где $S_+ (r - R_k) = \begin{cases} 1, & r > R_k, \\ 0, & r \leqslant R_k; \end{cases}$

R_k — радиус k-го элемента ступенчатой пластины; $2h_k$ — его толщина. Пластинка подвергается равномерному сжатию по внешнему контуру $r = R_n$, т. е.

$$N(r)\,|_{r=R_n} = q_0. \tag{2}$$

Для определения возникающих при этом радиальных N_r и кольцевых N_φ усилий воспользуемся известными * уравнением

$$rN_r'' + \left(3 - \frac{r}{D_N} D_N'\right) N_r' - (1 - \nu) \frac{D_N'}{D_N} N_r = 0 \tag{3}$$

и соотношением

$$N_\varphi = (rN_r)'.$$

---

* *Коваленко А. Д.* Избранные труды.— Киев : Наук. думка, 1976.— 720 с.