По формулам (6) при $h_1 = 1$ см; $h_2 = 0{,}8$ см; $h_3 = 0{,}6$ см; $R_1 = 8$ см; $R_2 = 16$ см; $R_3 = 24$ см; $\nu = 0{,}3$ произведены расчеты безразмерных величин $N_{rr} = \frac{N_r}{q_0}$, $N_{\varphi\varphi} = \frac{N_\varphi}{q_0}$, которые представлены в виде графиков на рис. 2 и 3. На этих рисунках кривые *1* соответствуют распределению усилий в трехступенчатой пластине, кривые *2* — в пластине постоянной толщины. Из рис. 2 и 3 видно, что радиальные N_r и кольцевые N_φ усилия на участке пластины

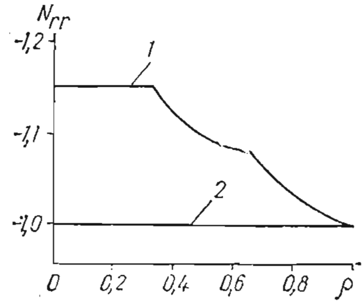

Рис. 2

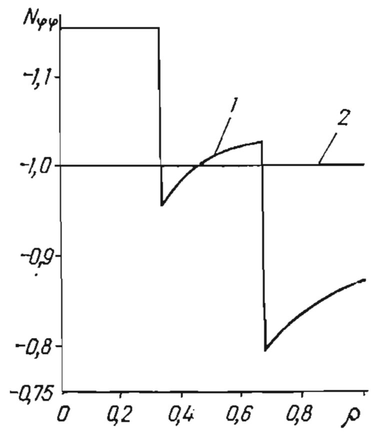

Рис. 3

толщиной $2h_1$ имеют постоянные и равные значения. Затем радиальные усилия уменьшаются, достигая на поверхности пластины заданного значения внешней нагрузки. Кольцевые усилия испытывают скачки в местах скачкообразного изменения толщины пластины. В случае пластины постоянной толщины усилия равны между собой и равны значению внешней нагрузки.

Хмельницкий технологический
институт бытового обслуживания

Поступила в редколлегию
20.01.81

УДК 517.43

С. И. Пидкуйко

ПОЛНАЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ КВАНТОВОЙ СИСТЕМЫ n ЧАСТИЦ НА ПРЯМОЙ

Гамильтонова система n частиц на прямой с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} p_j^2 + \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} V(x_j - x_k), \tag{1}$$

где p_j ($j = 1, \ldots, n$) — импульс, а x_j ($j = 1, \ldots n$) — координата j-й частицы, вполне интегрируема по Лиувиллю [4], если $V(x) = P(x) - P$ — функция Вейерштрасса или ее вырожденные случаи. Известно [6], что характеристические числа матрицы

$$L = \begin{pmatrix} p_1 & d(x_1 - x_2) & \ldots & \alpha(x_1 - x_n) \\ \alpha(x_2 - x_1) & p_2 & \ldots & \alpha(x_2 - x_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha(x_n - x_1) & \alpha(x_n - x_2) & \ldots & p_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

являются интегралами системы (1). Коэффициенты характеристического многочлена матрицы (2)

$$\det |L + \lambda E| = \lambda^n + \sum_{k=1}^{n} I_k \lambda^{n-k}$$

дают полную систему интегралов в инволюции [4]. Без ограничения общности можно считать [3], что $\alpha(x)$ — нечетная функция и $V(x) = \alpha^2(x)$. Тогда

I_k можно записать в виде

$$I_k = \sum_{l=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{k-2l} \leqslant n} p_{j_1} \ldots p_{j_{k-2l}} S_l^{(j_1 \ldots j_{k-2l})},$$

$S_l^{(j_1 \ldots j_m)}$ определяются индуктивно:

$$S_l^{(j_1 \ldots j_m)} = S_l^{(j_1 \ldots j_m j_{m+1})} + \sum_{j \neq j_1, \ldots, j_{m+1}} V_{j j_{m+1}} S_{l-1}^{(j_1 \ldots j_{m+1} j)},$$

где $j_1, \ldots, j_{m+1}$ — попарно различные числа;

$$V_{jk} = V(x_j - x_k); \quad S_0^{(j_1 \ldots j_m)} = 1;$$

$S_l^{(j_1 \ldots j_m)} = 0$, если $l < 0$ или $l > \left[\frac{m}{2}\right]$.

Рассмотрим соответствующую квантовую систему n частиц на прямой, беря в качестве оператора $\hat{x}_j$ оператор умножения на эту координату, а в качестве оператора импульса $\hat{p}_j = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_j}$. Такие квантовые системы изучались в работах [1, 2, 5—9].

Определение. Квантовая система (1) вполне интегрируема, если существует n функционально независимых дифференциальных операторов, которые коммутируют между собой и с оператором гамильтониана

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \hat{p}_j^2 + \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} V(x_j - x_k).$$

Пусть $\hat{I}_k$ — оператор, который получается из I_k подстановкой вместо p_j оператора $\hat{p}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Следующая теорема показывает, что квантовая система (1) вполне интегрируема.

Теорема.

$$\left[\hat{I}_k, \hat{I}_l\right] = 0, \quad k, \quad l = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $\{I_m^{(j_1 \ldots j_s)}\}$ — коэффициенты характеристического многочлена матрицы (2) для задачи $n - s$ частиц на прямой с координатами $x_1, \ldots, x_{j_1-1}, x_{j_1+1}, \ldots, x_{j_s-1}, x_{j_s+1}, \ldots, x_n$. Тогда

$$\hat{I}_k = \hat{I}_{k-1}^{(1)} \hat{p}_1 + \hat{I}_k^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} V_{1j} I_{k-2}^{(1j)}. \tag{4}$$

Из этой формулы следует, что

$$\left[\hat{I}_k, \hat{I}_l\right] = A\hat{p}_1^2 + B\hat{p}_1 + C, \tag{5}$$

где A, B, C — полиномы от $\hat{p}_2, \ldots, \hat{p}_n$.

Предположим, что для $n_1 < n$ частиц на прямой равенство (3) выполняется. Докажем, что тогда оно справедливо и для $n_1 = n$. Из равенства (4) получаем

$$A = [I_{k-1}^{(1)}, I_{l-1}^{(1)}] = 0$$

в силу предположения индукции.

Лемма 1.

$$B = \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_s \\ i_p \neq i_q, p \neq q}} V_{i_1 i_2} V_{i_2 i_3} \ldots V_{i_{s-2} i_{s-1}} \times$$

$$\times \left\{[\hat{I}_{k-s+1}^{(i_1 \ldots i_{s-1})}, V_{i_{s-1} i_s} \hat{I}_{l-s}^{(i_1 \ldots i_s)}] - [\hat{I}_{l-s+1}^{(i_1 \ldots i_{s-1})}, V_{i_{s-1} i_s} \hat{I}_{k-s}^{(i_1 \ldots i_s)}]\right\}.$$

Подставляя в это равенство $s = l$ $(k > l)$ или $s = k$ $(k < l)$, получаем $B = 0$. Таким образом, из формулы (5) следует, что

$$[\hat{I}_k, \hat{I}_l] = \varphi_{kl}(x_1, \ldots, x_n), \tag{6}$$

где φ_{kl} — некоторая функция.

Рассмотрим три случая:

а) $[\hat{I}_{2k+1}, \hat{I}_{2l+1}] = \hat{I}_{2k+1}\hat{I}_{2l+1} - \hat{I}_{2l+1}\hat{I}_{2k+1}$ — многочлен от $\{\hat{p}_j\}$, свободный член которого равен нулю. Тогда из равенства (6) получаем $[\hat{I}_{2k+1}, \hat{I}_{2l+1}] = 0$,

$$\text{б) } [\hat{I}_{2k+1}, \hat{I}_{2l}] = \hat{I}_{2k+1}\hat{I}_{2l} - \hat{I}_{2l}\hat{I}_{2k+1} = \sum_{m=0}^{k}\left(\frac{h}{2\pi i}\right)^{2m+1} \times$$

$$\times \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{2m+1} \leqslant n} S_{k-m}^{(j_1 \ldots j_{2m+1})} \frac{\partial^{2m+1}}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_{2m+1}}} S_l;$$

$$\text{в) } [\hat{I}_{2k}, \hat{I}_{2l}] = \hat{I}_{2k}\hat{I}_{2l} - \hat{I}_{2l}\hat{I}_{2k} = \sum_{m=0}^{k}\left(\frac{h}{2\pi i}\right)^{2m} \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{2m} \leqslant n} S_{k-m}^{(j_1 \ldots j_{2m})} \times$$

$$\times \frac{\partial^{2m}}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_{2m}}} S_l - \sum_{m=0}^{l}\left(\frac{h}{2\pi i}\right)^{2m} \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{2m} \leqslant n} S_{l-m}^{(j_1 \ldots j_{2m})} \frac{\partial^{2m}}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_{2m}}} S_k.$$

Введем следующие обозначения: $S_k^{(j_1 \ldots j_m)i_1 \ldots i_s}$ — свободный член интеграла I_{2k} в задаче $n - m + s$ $(0 \leqslant s \leqslant m)$ частиц на прямой с координатами $\{x_i\}$, где $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus (\{j_1, \ldots, j_m\} \setminus \{i_1, \ldots, j_s\})$; $\{i_1, \ldots, i_s\} \subset \{j_1, \ldots, j_m\}$; $S_k^{j_1 \ldots j_m(i_1 \ldots i_s)}$ — свободный член интеграла I_{2k} в задаче $m - s$ $(0 \leqslant s \leqslant n)$ частиц на прямой с координатами $\{x_i\}$, где $i \in \{j_1, \ldots, j_m\} \setminus \{i_1, \ldots, i_s\}$; $\{i_1, \ldots, i_s\} \subset \{j_1, \ldots, j_m\}$. При $s = 0$ $S_k^{(j_1 \ldots j_m)i_1 \ldots i_s} = S_k^{(j_1 \ldots j_m)}$, $S_k^{j_1 \ldots j_m(i_1 \ldots i_s)} = S_k^{j_1 \ldots j_m}$. Следующие четыре леммы доказывают нашу теорему.

Лемма 2.

$$S_k = \sum_{r=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} S_{k-r}^{(j_1 \ldots j_m)} S_r^{j_1 \ldots j_m} + \sum_{s=1}^{m} \sum_{\substack{j_{m+1}, \ldots, j_{m+s} \neq j_1, \ldots, j_m \\ j_p \neq j_q, p \neq q}} \sum_{r=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} S_{k-r-s}^{(j_1 \ldots j_{m+s})} \frac{1}{s!} \times$$

$$\times \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_s = j_1, \ldots, j_m \\ i_p \neq i_q, p \neq q}} V_{i_1 j_{m+1}} \ldots V_{i_s j_{m+s}} S_r^{j_1 \ldots j_m(i_1 \ldots i_s)}.$$

Лемма 3.

$$\frac{\partial^m}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_m}} S_k = \sum_{\substack{j_{m+1}, \ldots, j_{2m} \neq j_1, \ldots, j_m \\ j_p \neq j_q, p \neq q}} V'_{j_1 j_{m+1}} \ldots V'_{j_m j_{2m}} S_{k-m}^{(j_1 \ldots j_{2m})} -$$

$$- \sum_{s=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{1}{(m-2s)!} \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_{m-2s} = j_1, \ldots, j_m \\ i_p \neq i_q, p \neq q}} {}''S_s^{j_1 \ldots j_m(i_1 \ldots i_{m-2s})} \frac{\partial^{m-2s}}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{m-2s}}} \times$$

$$\times S_{k-s}^{(j_1 \ldots j_m)i_1 \ldots i_{m-2s}},$$

где $''S$ получается из S заменой V на V''.

Лемма 4.

$$\sum_{s=0}^{m}\sum_{r=0}^{m} \frac{(-1)^{s+r}}{s!} \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_s = j_1, \ldots, j_m \\ i_p \neq i_q, p \neq q}} S_{k-r}^{(i_1, \ldots, i_s)} S_r^{i_1, \ldots, i_s} = \sum_{\substack{j_{m+1}, \ldots, j_{2m} \neq j_1, \ldots, j_m \\ j_p \neq j_q, p \neq q}} V_{j_1 j_{m+1}} \ldots$$

$$\ldots V_{j_m j_{2m}} S_{k-m}^{(j_1 \ldots j_{2m})}.$$

Лемма 5.

Для любых k, l, $m \geqslant 0$

$$\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{2m+1}\\ i_p\neq i_q, p\neq q}} S_k^{(i_1\ldots i_{2m+1})} \frac{\partial^{2m+1}}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_{2m+1}}} S_l = 0,$$

$$\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{2m}\\ i_p\neq i_q, p\neq q}} \left(S_{k-m}^{(i_1,\ldots,i_{2m})} \frac{\partial^{2m}}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_{2m}}} S_l - S_{l-m}^{(i_1\ldots i_{2m})} \frac{\partial^{2m}}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_{2m}}} S_k \right) = 0.$$

1. *Ольшанецкий М. А., Переломов А. М.* Квантовые системы, связанные с системами корней, и радиальные части операторов Лапласа.— Функц. анализ и его прил., 1978, 12, вып. 2, с. 57—65.
2. *Переломов А. М.* Алгебраический подход к решению одномерной модели N взаимодействующих частиц.— Теорет. и мат. физика, 1971, № 6, с. 364—391.
3. *Пидкуйко С. М., Степин А. М.* О решении одного дифференциально-функционального уравнения.— Функц. анализ и его прил., 1976, 10, вып. 2, с. 84—85.
4. *Пидкуйко С. И.* Об одномерной интегрируемой задаче n тел.— Успехи мат. наук, 1978, 33, вып. 3, с. 185—186.
5. *Calogero F.* Solution of the one-dimensional N-body problem.— J. Math. Phys., 1971, 12, с. 419—436.
6. *Calogero F., Marcioro C., Ragnisco O.* Exact solution of the classical and quantal one-dimensional many-body problem.— Lett. nuovo cim., 1975, 13, с. 383—388.
7. *Cambardella P. J.* Exact results in many-body systems of interacting particles.— J. Math. Phys, 1975, p. 1172—1187.
8. *Olshanetsky M. A., Perelomov A. M.* Quantum completely integrable systems connected with semisimple Lie algebras.— Lett. Math. Phys., 1977, 2, p. 7—13.
9. *Sutherland B.* Exact results in many-body systems of interacting particles.— Phys. Rev. A, 1972, 5, p. 1372—1376.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
03.03.81

УДК 530.12 : 531.51

Р. М. Пляцко

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ГРАВИТАЦИОННОГО УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОГО СПИН-ОРБИТАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В общей теории относительности движение пробного тела, обладающего внутренним вращением (или, как часто говорят, пробного тела со спином), описывается уравнениями Папапетру [3]

$$\frac{D}{ds}\left(Mu^\lambda + u_\mu \frac{DS^{\lambda\mu}}{ds}\right) = -\frac{1}{2} u^\sigma S^{\mu\nu} R^\lambda_{\sigma\mu\nu}, \tag{1}$$

$$\frac{DS^{\lambda\mu}}{ds} + u^\lambda u_\sigma \frac{DS^{\mu\sigma}}{ds} - u^\mu u_\sigma \frac{DS^{\lambda\sigma}}{ds} = 0 \tag{2}$$

(M — масса пробного тела; $S^{\mu\nu}$ — тензор спина; $u^\lambda \equiv dx^\lambda/ds$ — 4-вектор скорости тела; $R^\lambda_{\sigma\mu\nu}$ — тензор кривизны; D/ds — ковариантная производная *) при некоторых дополнительных условиях на спин. Как установлено [1], эти уравнения при условии Пирани

$$S^{\mu\nu} u_\nu = 0 \tag{3}$$

в гравитационном поле Шварцшильда имеют физически разумные решения, согласно которым мировые линии пробного тела со спином в случае ультрарелятивистских скоростей его поступательного движения могут существенно отличаться от геодезических линий, т. е. от решений уравнений $Du^\mu/ds = 0$. В частности, обнаружено, что пробное тело со спином в поле Шварцшильда при определенных соотношениях между компонентами вектора спина и скорости тела может двигаться по круговым орбитам, плоскость

* Греческие индексы принимают значения от 1 до 4, латинские — 1, 2, 3.