($\Phi(z, x) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \Phi_\varepsilon(z, x)$ — матрица основных функций), а с учетом условия (8) $u(z) = C$, $z \in \Omega$, а значит, $u_1(z) = u_2(z) + C$, $z \in \Omega$.

Теорема 2. Пусть $F \in (D'(S))^p$, обобщенная вектор-функция T определена согласно формулам (3), (6). Тогда вектор-функция (7) является единственным решением обобщенной задачи Неймана для системы (1) в неограниченной многосвязной области Ω с границей $S = \bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Подобный результат справедлив для однородной сильноэллиптической системы дифференциальных уравнений второго порядка вариационного типа с переменными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами при условии существования для нее фундаментальной матрицы во всем пространстве R^n.

1. *Волошина М. С.* Задачи Дирихле и Неймана для одного класса сильно эллиптических систем дифференциальных уравнений в случае многосвязной области.— Мат. физика, 1974, вып. 16, с. 71—81.
2. *Волошина М. С., Гупало Г. С., Лопушанська Г. П.* Про узагальнену задачу Діріхле для одного класу сильно еліптичних систем диференціальних рівнянь у випадку багатозв'язної області.— Вісн. Льв. ун-ту. Сер. мех.-мат.,1978, вип. 13, с. 5—8.
3. *Волошина М. С., Гупало А. С., Лопушанская Г. П.* Обобщенная задача Дирихле для одного класса сильно эллиптических систем дифференциальных уравнений в случае многосвязной области.— Мат. физика, 1979, вып. 25, с. 81—85.
4. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных обобщенных функций.— М. : Физматгиз, 1958.— 307 с.
5. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений.— М. : Физматгиз, 1957.— 274 с.
6. *Лопатинский Я. Б.* Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям.— Укр. мат. журн., 1953, 5, с. 123—151.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. Изд. 2-е.— М. : Физматгиз, 1962.— 599 с.

Львовский университет

Поступила в редколлегию 27.05.81

УДК 518 : 517.948

Я. Н. Пелех

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

Многие задачи гидроакустики, автоматического управления, теории вязкоупругости приводят к нелинейным интегральным уравнениям Вольтерра второго рода. Поскольку решение таких уравнений в замкнутой форме можно получить в очень редких случаях, то возникает проблема построения приближенного решения этих задач. В данной статье строятся нелинейные методы типа Рунге — Кутта для численного интегрирования уравнения

$$f(x) = \int\limits_a^x F[x, y, f(y)]\, dy, \quad x \in [a, b]. \tag{1}$$

Вопросам численного решения уравнения (1) посвящены работы [1—3], в которых предложены линейные методы Рунге — Кутта.

Формулы перехода от точки a к точке $a + h$. Разделим интервал $[a, b]$ на $(m - 1)$ частей длины $h = \dfrac{b-a}{m-1}$ и обозначим $x_i = a + (i-1)h$ $(i = \overline{1, m})$, $f_i = f(x_i)$, причем $f(x_1) = 0$. Разложение искомого решения $f(x_2)$ в окрестности точки a в ряд Тейлора имеет вид

$$f_2 = hF + \frac{h^2}{2}[2F_x + F_y + FF_z] + \frac{h^3}{6}[3F_{xx} + 3F_{xy} + F_{yy} + 3FF_{xz} + 2FF_{yz} +$$
$$+ F^2F_{zz} + 2F_xF_z + F_yF_z + FF_z^2] + \frac{h^4}{24}[4F_{xxx} + 6F_{xxy} + 4F_{xyy} + 6FF_{xxz} +$$

$$+ 8FF_{xyz} + 3FF_{yyz} + 4F^2F_{xzz} + 3F^2F_{yzz} + F^3F_{zzz} + 8F_xF_{xz} + 6F_xF_{yz} + 4F_yF_{xz} + 3F_yF_{yz} + 7FF_zF_{xz} + 5FF_zF_{yz} + 6FF_xF_{zz} + 3FF_yF_{zz} + 4F^2F_zF_{zz} + 3F_zF_{xx} + F_{yyy} + 3F_zF_{xy} + F_zF_{yy} + 2F_xF_z^2 + F_yF_z^2 + FF_z^3] + \cdots \qquad (2)$$

Здесь функция $F(x, y, z)$ и все ее производные взяты в точке $(a, a, 0)$. Используя аппарат цепных дробей и идею построения методов Рунге — Кутта, приближенное решение уравнения (1) ищем в виде

$$\varphi_2 = \cfrac{c_{0,0}}{\sum\limits_{i=0}^{k-1} p_{i,0}h^i + \cfrac{p_{k,0}h^k}{1 - \cfrac{p_{k+1,1}h}{1 - \ddots - \cfrac{p_{k+l-1,l-1}h}{1 - \cfrac{p_{k+l,l}h}{1 - \ddots}}}}} \qquad (3)$$

Неизвестные функции $c_{0,0}$, $p_{i,j}$ определяются из условия

$$|f_2 - \varphi_2| = O(h^p), \qquad (4)$$

где f_2, φ_2 — соответственно точное и приближенное решения уравнения (1) в точке $a + h$.

Рассмотрим формулу (3) при $k = 1$, $l = 0$. Получим

$$\varphi_2 = \frac{c_{0,0}}{p_{0,0} + p_{1,0}h}. \qquad (5)$$

Здесь

$$c_{0,0} = hk_1; \quad p_{0,0} = 1; \quad p_{1,0} = -\frac{a_{21}k_1 + a_{22}k_2}{hk_1};$$

$$k_1 = F(a + \alpha_1 h,\ a + \beta_1 h,\ 0); \quad k_2 = F(a + \alpha_2 h,\ a + \beta_2 h,\ \gamma_{21}hk_1).$$

Неизвестные параметры α_1, α_2, β_1, β_2, γ_{21}, a_{21}, a_{22} определим из условия, чтобы разложения в ряд Тейлора в окрестности точки a искомого решения (2) и его приближения (5) совпадали до членов, содержащих h^2 включительно. В результате сравнения коэффициентов при h и h^2 получим систему алгебраических уравнений, решение которой имеет вид

$$a_{21} = -\frac{1}{2\gamma_{21}}, \quad a_{22} = \frac{1}{2\gamma_{21}}, \quad \alpha_2 = 2\gamma_{21} + \alpha_1(1 - 2\gamma_{21}), \quad \beta_2 = \gamma_{21} + \beta_1(1 - 2\gamma_{21}), \qquad (6)$$

где α_1, β_1, γ_{21} — свободные параметры, удовлетворяющие условиям $(2\beta_2 - 1)(\alpha_1 - 1) = (2\beta_1 - 1)(\alpha_2 - 1)$, $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$, $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$.

Рассмотрим формулу (3) при $k = 2$, $l = 0$ и $k = 1$, $l = 1$. Получаем

$$\varphi_2 = \frac{hk_1}{1 - \dfrac{a_{21}k_1 + a_{22}k_2}{k_1} - \dfrac{k_1(a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + a_{33}k_3) - (a_{21}k_1 + a_{22}k_2)^2}{k_1^2}}, \qquad (7)$$

$$\varphi_2 = \cfrac{hk_1}{1 - \cfrac{(a_{21}k_1 + a_{22}k_2)k_1^{-1}}{1 - \cfrac{k_1(a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + a_{33}k_3) - (a_{21}k_1 + a_{22}k_2)^2}{k_1(a_{21}k_1 + a_{22}k_2)}}}. \qquad (8)$$

Здесь

$$k_1 = F(a + \alpha_1 h,\ a + \beta_2 h,\ 0); \quad k_2 = F(a + \alpha_2 h,\ a + \beta_2 h,\ \gamma_{21}hk_1);$$

$$k_3 = F(a + \alpha_3 h,\ a + \beta_3 h,\ \gamma_{31}hk_1 + \gamma_{32}hk_2).$$

Приведем два конкретных набора параметров, при которых погрешность формул (7), (8) есть величина $O(h^4)$:

$$
\begin{gathered}
a_{21}=-\frac{3}{4}, \quad a_{22}=\frac{3}{4}, \quad a_{31}=-\frac{1}{4}, \quad a_{32}=0, \quad a_{33}=\frac{1}{4}, \quad \alpha_1=\frac{1}{3}, \\
\alpha_2=\alpha_3=1, \quad \beta_1=\beta_3=0, \quad \beta_2=\frac{2}{3}, \quad \gamma_{21}=\frac{2}{3}, \quad \gamma_{31}=-1, \quad \gamma_{32}=1,
\end{gathered} \tag{9}
$$

$$
a_{21}=-1, \quad a_{22}=1, \quad a_{31}=\frac{1}{4}, \quad a_{32}=-1, \quad a_{33}=\frac{3}{4}, \quad \alpha_1=\alpha_3=1, \tag{10}
$$

$$
\alpha_2=\frac{1}{2}, \quad \beta_1=0, \quad \beta_2=\frac{1}{2}, \quad \beta_3=\frac{2}{3}, \quad \gamma_{21}=\frac{1}{2}, \quad \gamma_{31}=\frac{2}{9}, \quad \gamma_{32}=\frac{4}{9}.
$$

Формулы перехода от точки x_{n-1} к точке x_n ($n \geqslant 3$). Интегральное уравнение (1) не дает возможности непосредственно применить построенные выше формулы для нахождения приближений к точному решению в точках x_n ($n \geqslant 3$). Для преодоления этой трудности используем идею подвижного начала и квадратурные формулы [1].

Приведем общую вычислительную формулу второго порядка точности при следующих значениях параметров (см. формулы (5), (6)):

$$
a_{21}=-1, \quad a_{22}=1, \quad \alpha_1=\beta_1=0, \quad \alpha_2=1, \quad \beta_2=\frac{1}{2}, \quad \gamma_{21}=\frac{1}{2},
$$

$$
\varphi_n=h\sum_{j=1}^{n-1} A_{n-1,j}F(x_n, x_j, \varphi_j)+\frac{hk_{1n}}{2k_{1n}-k_{2n}} \quad (n=\overline{3, m}), \tag{11}
$$

где

$$
A_{2,1}=A_{2,2}=\frac{1}{2}; \quad A_{3,1}=\frac{5}{12}; \quad A_{3,2}=\frac{7}{6}; \quad A_{3,3}=\frac{5}{12};
$$

$$
A_{i,1}=A_{i,i}=\frac{5}{12}; \quad A_{i,2}=A_{i,i-1}=\frac{13}{12} \quad (i=\overline{4, m});
$$

$$
A_{i,\nu}=1 \quad (i=\overline{5, m}; \ \nu=\overline{3, i-2}); \quad k_{1n}=F(x_{n-1}, x_{n-1}, \varphi_{n-1});
$$

$$
k_{2n}=F\left(x_n, x_n-\frac{h}{2}, h\sum_{j=1}^{n-1} A_{n-1,j}F\left(x_n-\frac{h}{2}, x_j, \varphi_j\right)+\frac{h}{2}k_{1n}\right).
$$

Рассматривая формулу (8) при значениях параметров, которые определяются из (9), для нахождения приближенного решения уравнения (1) в точках x_n получаем формулу

$$
\varphi_n=h\sum_{j=1}^{n-1} A_{n-1,j}F(x_n, x_j, \varphi_j)+h\Phi_n. \tag{12}
$$

Здесь

$$
\begin{array}{rccccccc}
j= & 1 & 2 & 3 \ \ldots & 2i-2 & 2i-1 & 2i & 2i+1; \\
A_{2i,j}= & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \ \ldots & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3}; & \\
A_{2i+1,j}= & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \ \ldots & \frac{17}{24} & \frac{9}{8} & \frac{9}{8} & \frac{3}{8};
\end{array}
$$

$$
\Phi_n=\cfrac{k_{1n}}{1-\cfrac{\frac{3}{4}(k_{2n}-k_{1n})k_{1n}^{-1}}{1-\cfrac{4k_{1n}(k_{3n}-k_{1n})-9(k_{2n}-k_{1n})^2}{12k_{1n}(k_{2n}-k_{1n})}}};
$$

$$
k_{1n}=F\left(x_n-\frac{2}{3}h, x_{n-1}, \varphi_{n-1}\right);
$$

$$k_{2n} = F\left(x_n,\ x_n - \frac{h}{3},\ h\sum_{j=1}^{n-1} A_{n-1,j} F\left(x_n - \frac{h}{3},\ x_j,\ \varphi_j\right) + \frac{2}{3} hk_{1n}\right);$$

$$k_{3n} = F(x_n,\ x_{n-1},\ \varphi_{n-1} + hk_{2n} - hk_{1n}).$$

Погрешность вычислительной формулы (12) есть величина $O(h^4)$.

Развив идеи двусторонних методов, можно построить соответствующие нелинейные двусторонние методы типа Рунге — Кутта, которые дают возможность на некоторых классах функций получать не только приближенное решение уравнения (1), но и гарантированную оценку погрешности.

Предложенная методика построения нелинейных методов распространяется и на задачу Коши

$$f'(x) = G\left(x,\ f(x),\ \int_a^x g(x,\ y,\ f(y))\,dy\right),$$

$$f(a) = f_0,$$

где $x \in [a,\ b]$, а функции $G(x,\ u,\ v)$ и $g(x,\ y,\ u)$ предполагаются достаточно гладкими.

1. *Бельтюков Б. А.* Аналог метода Рунге — Кутта для решения нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра.— Дифференц. уравнения, 1965, 1, № 4, с. 545—556.
2. *Oules H. M.* Sur l'integration numerique de l'equation integrale de Volterra de seconde espece.— C. r. Acad. Sci. 1960, 250, N 8, p. 1433—1435.
3. *Pouzet P. M.* Methode d'integration numerique de l'equation integrale de Volterra de seconde espece.— Ibid., N 19, p. 3101—3102.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
04.12.81

УДК 517.984

А. И. Балинский, Б. М. Подлевский

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПУЧКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Решение различных задач математической физики методом разделения переменных приводит к спектральному исследованию пучков дифференциальных операторов. Методы нахождения и оценки их собственных значений и собственных векторов, как и общая спектральная теория такого рода, разработаны пока еще мало. В данной статье в развитие результатов работ [1, 2, 5] дано обоснование метода последовательных приближений в применении к задаче о собственных значениях одного класса полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов.

Рассмотрим операторный пучок вида

$$L(\lambda) = \lambda^n L_0 + \lambda^{n-1} L_1 + \cdots + \lambda L_{n-1} + L_n \tag{1}$$

с самосопряженными операторами-коэффициентами L_i, определяемыми выражениями

$$l_i(y) = \sum_{\nu=0}^{m_i} (-1)^\nu [p_{\nu_i}(x)\, y^{(\nu)}(x)]^{(\nu)} \quad (i = \overline{1,\ n}),$$

$$U_\mu y(x) = 0 \quad (\mu = \overline{1,\ 2m_n}),$$

где U_μ — линейно независимые линейные однородные краевые условия, выраженные через значения $y,\ y',\ y''\ \ldots,\ y^{2m_n-1}$ в точках a и b и не содержащие комплексного параметра λ. Предполагаем, что $m_n > m_i$, $i = \overline{0,\ n-1}$.

Значения параметра λ, при которых уравнение $L(\lambda)\, y = 0$ имеет нетривиальные решения, называются собственными значениями, а соответствующие им решения — собственными векторами пучка. Рассуждая, как в работе