$$k_{2n} = F\left(x_n, x_n - \frac{h}{3}, h\sum_{j=1}^{n-1} A_{n-1,j} F\left(x_n - \frac{h}{3}, x_j, \varphi_j\right) + \frac{2}{3} hk_{1n}\right);$$

$$k_{3n} = F(x_n, x_{n-1}, \varphi_{n-1} + hk_{2n} - hk_{1n}).$$

Погрешность вычислительной формулы (12) есть величина $O(h^4)$.

Развив идеи двусторонних методов, можно построить соответствующие нелинейные двусторонние методы типа Рунге — Кутта, которые дают возможность на некоторых классах функций получать не только приближенное решение уравнения (1), но и гарантированную оценку погрешности.

Предложенная методика построения нелинейных методов распространяется и на задачу Коши

$$f'(x) = G\left(x, f(x), \int_a^x g(x, y, f(y))\, dy\right),$$

$$f(a) = f_0,$$

где $x \in [a, b]$, а функции $G(x, u, v)$ и $g(x, y, u)$ предполагаются достаточно гладкими.

1. *Бельтюков Б. А.* Аналог метода Рунге — Кутта для решения нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра.— Дифференц. уравнения, 1965, 1, № 4, с. 545—556.
2. *Oules H. M.* Sur l'integration numerique de l'equation integrale de Volterra de seconde espece.— C. r. Acad. Sci. 1960, 250, N 8, p. 1433—1435.
3. *Pouzet P. M.* Methode d'integration numerique de l'equation integrale de Volterra de seconde espece.— Ibid., N 19, p. 3101—3102.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
04.12.81

УДК 517.984

А. И. Балинский, Б. М. Подлевский

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПУЧКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Решение различных задач математической физики методом разделения переменных приводит к спектральному исследованию пучков дифференциальных операторов. Методы нахождения и оценки их собственных значений и собственных векторов, как и общая спектральная теория такого рода, разработаны пока еще мало. В данной статье в развитие результатов работ [1, 2, 5] дано обоснование метода последовательных приближений в применении к задаче о собственных значениях одного класса полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов.

Рассмотрим операторный пучок вида

$$L(\lambda) = \lambda^n L_0 + \lambda^{n-1} L_1 + \cdots + \lambda L_{n-1} + L_n \tag{1}$$

с самосопряженными операторами-коэффициентами L_i, определяемыми выражениями

$$l_i(y) = \sum_{\nu=0}^{m_i} (-1)^\nu [p_{\nu_i}(x)\, y^{(\nu)}(x)]^{(\nu)} \quad (i = \overline{1, n}),$$

$$U_\mu y(x) = 0 \quad (\mu = \overline{1, 2m_n}),$$

где U_μ — линейно независимые линейные однородные краевые условия, выраженные через значения $y, y', y'' \ldots, y^{2m_n - 1}$ в точках a и b и не содержащие комплексного параметра λ. Предполагаем, что $m_n > m_i$, $i = \overline{0, n-1}$.

Значения параметра λ, при которых уравнение $L(\lambda)\, y = 0$ имеет нетривиальные решения, называются собственными значениями, а соответствующие им решения — собственными векторами пучка. Рассуждая, как в работе

[3], можно показать, что спектр пучка (1) состоит из счетного множества собственных значений конечной кратности.

Предполагаем, что пучок (1) удовлетворяет условиям

$$(L_n y, y) \geqslant \gamma_n (y, y), \quad \gamma_n > 0 \quad \forall y \in D, \tag{2}$$

оператор L_0 обратим,

существует многочлен $p(\lambda) = \lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}$, все корни α_i которого вещественны и просты, и такой, что

$$(-1)^i (L(\alpha_i) y, y) \geqslant \gamma_i (y, y), \quad \gamma_i > 0 \quad \forall y \in D \quad (i = \overline{1, n-1}),$$

где

$$D = \{y(x) : y(x) \in C^{2m_n}[a, b];\ U_\mu y(x) = 0)\ (\mu = \overline{1, 2m_n})\}$$

— линейное многообразие вещественного гильбертова пространства $H = L_2[a, b]$.

Пусть $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ — некоторый набор функций, удовлетворяющих граничным условиям ($y_i \in D$, $i = \overline{0, n-1}$). Определим функции y_ν ($\nu = n, n+1, \dots$) как решения краевой задачи

$$L_n y_\nu = -(L_{n-1} y_{\nu-1} + L_{n-2} y_{\nu-2} + \cdots + L_0 y_{\nu-n}) \quad (\nu = n, n+1, \dots). \tag{3}$$

Сформулируем итерационный процесс метода последовательных приближений, который дает возможность с помощью несложных вычислений получать достаточно точные для прикладных целей верхнюю и нижнюю границы первого собственного значения.

Теорема. Пусть для операторного пучка (1), удовлетворяющего условиям (2), по итерационной формуле (3) определены функции y_ν и величины

$$\mu_{\nu+1} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_{n-1-k} \sum\limits_{j=1}^{n} (z_j^k, y_{n+\nu-j})}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_{n-1-k} \sum\limits_{j=1}^{n} (z_j^k, y_{n+\nu+1-j})}. \tag{4}$$

Здесь

$$z_j^k = \begin{cases} -\sum\limits_{i=1}^{j} L_{n-j+i} y_{n-k-1+i}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n+1-j} L_{n+1-j-i} y_{n-i-k}. \end{cases}$$

Если

$$\mu_{\nu+1} < l_2, \tag{5}$$

где l_2 — некоторая оценка снизу для второго собственного значения, то для первого собственного значения λ_1 справедлива оценка

$$\mu_{\nu+1} \frac{l_2 - \mu_\nu}{l_2 - \mu_{\nu+1}} \leqslant \lambda_1 \leqslant \mu_{\nu+1}. \tag{6}$$

Обоснование предложенного итерационного процесса можно осуществить по следующей схеме.

Исходной задаче о собственных значениях (1) ставим в соответствие в пространстве $\tilde{H}$ — прямой ортогональной суммы n копий исходного пространства H $((\tilde{y}, \tilde{z}) = ((y_1, \dots, y_n)^t, (z_1, \dots, z_n)^t) = \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i, z_i))$ — эквивалентную линейную задачу

$$(\tilde{T} - \lambda\tilde{S})\tilde{y} = 0. \tag{7}$$

Здесь

$$\tilde{T} = \sum_{i=1}^{n} a_{i-1} \tilde{G}_{[n+1-i]}; \quad \tilde{S} = \sum_{i=1}^{n} a_{i-1} \tilde{G}_{[n-i]};$$

$$\tilde{G}_{[k]} = \operatorname{diag}(\tilde{Q}_k, \tilde{Q}_{n-k});$$

$$\tilde{Q}_k : \tilde{Q}_k\tilde{y} = \tilde{z}; \quad z_m = -\sum_{i=1}^{m} L_{n-m+i}y_{n+k-i-1} \quad (m = \overline{1, k},\ k > 0);$$

$$\tilde{Q}_{n-k} : \tilde{Q}_{n-k}\tilde{y} = \tilde{z}; \quad z_m = \sum_{i=0}^{n-m} L_{n-m-i}y_{i+k+1} \quad (m = \overline{k+1, n},\ k < n).$$

С учетом условий (2) можно показать, что задача (7) является самосопряженной, а оператор $\tilde{S}$ положительно определен, т. е.

$$(\tilde{S}\tilde{y}, \tilde{y}) \geqslant \tilde{\gamma}(\tilde{y}, \tilde{y}), \quad \tilde{\gamma} > 0 \quad \forall \tilde{y} \in \tilde{D}, \quad \tilde{D} = \overset{n}{\oplus} D. \tag{8}$$

Не уменьшая общности, предполагаем, что оператор $\tilde{T}$ положительно определен. Тогда аналогично работе [2] можно доказать, что μ_ν образуют монотонно убывающую ограниченную снизу первым собственным значением сходящуюся последовательность и при выполнении условия (5) справедлива оценка (6).

Нахождение поперечных колебаний упругого стержня с шарнирно закрепленными концами с учетом кручения и изменения угла элемента стержня приводит к такой нелинейной задаче на собственные значения [4]:

$$\lambda^2 L_0 y + \lambda L_1 y + L_2 y = 0,$$

где L_i $(i = 0, 1, 2)$ определяются дифференциальными выражениями

$$l_0 y = c_3 y, \quad l_1 y = c_2 y'' - y, \quad l_2 y = c_1 y^{(4)}, \quad c_1 = EJg/\gamma A, \quad c_2 = (1 + E/k'G)\,J/A,$$
$$c_3 = J\gamma/Agk'G$$

и краевыми условиями

$$y(0) = y(1) = y''(0) = y''(1) = 0.$$

Здесь EJ — изгибная жесткость; γ — масса единицы объема материала стержня; A — площадь поперечного сечения; k' — числовой коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения; G — модуль сдвига; g — ускорение свободного падения. Нетрудно убедиться, что операторы L_i $(i = 0, 1, 2)$ самосопряженные, а рассматриваемый пучок удовлетворяет условиям (2). В частности, можно положить $\alpha_1 = (c_2\pi^2 + 1)/2c_3$. Следует отметить, что здесь условия (2) выполняются без каких-либо дополнительных ограничений на физические параметры задачи.

Положим $c_1 = c_2 = 1$, $c_2 = 2$ и, следовательно, $a_1 = -(\pi^2 + {}^1/_2)$. Исходя из удовлетворяющих краевым условиям функций

$$y_0 = \sin \pi x, \quad y_1 = \sin \pi x$$

из формулы (3) получаем

$$\pi^2 y_2 = 2 \sin \pi x, \quad \pi^6 y_3 = (3\pi^2 + 2) \sin \pi x,$$
$$\pi^{10} y_4 = (4\pi^4 + 7\pi^2 + 2) \sin \pi x,$$
$$\pi^{14} y_5 = (5\pi^6 + 16\pi^4 + 11\pi^2 + 2) \sin \pi x,$$
$$\pi^{18} y_6 = (6\pi^8 + 30\pi^6 + 36\pi^4 + 15\pi^2 + 2) \sin \pi x,$$
$$\pi^{22} y_7 = (7\pi^{10} + 50\pi^8 + 91\pi^6 + 64\pi^4 + 19\pi^2 + 2) \sin \pi x,$$
$$\pi^{26} y_8 = (8\pi^{12} + 77\pi^{10} + 196\pi^8 + 204\pi^6 + 100\pi^4 + 23\pi^2 + 2) \sin \pi x.$$

По формулам (4) определяем величины $\mu_1 = 7{,}91530$, $\mu_2 = 7{,}59590$, $\mu_3 = 7{,}41132$, $\mu_4 = 7{,}30869$, $\mu_5 = 7{,}25279$, $\mu_6 = 7{,}22276$, $\mu_7 = 7{,}20671$, с учетом оценок (6) при $l_2 = (\pi^2 + {}^1/_2)$ получаем $7{,}16988 \leqslant \lambda_1 \leqslant 7{,}20671$. Среднее значение $\lambda_1 \approx 7{,}18830$ и, следовательно, ошибка равна не более 0,25 %.

1. *Балинский А. И., Подлевский Б. М.* К вопросу о двусторонних оценках собственных значений полиномиальных операторных пучков.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1976, вып. 3, с. 94—95.
2. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения (с техническими приложениями).— М. : Наука, 1968.— 504 с.

3. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы.— М. : Наука, 1969.— 400 с.
4. *Тимошенко С. Г.* Колебания в инженерном деле.— М. : Физматгиз, 1959.— 440 с.
5. *Hadeler K. P.* Uber Operatorgleichungen mit nicht linear auftretendem Parameters.— ZAMM, 1967, 47, N 2, с. 91—96.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
08.06.81

УДК 517.63

Я. Д. Пяныло, О. В. Побережный

О ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА С ПОМОЩЬЮ МНОГОЧЛЕНОВ ЯКОБИ

Вопросам оценки погрешности и условиям сходимости приближенного обращения преобразования Лапласа с помощью ортогональных многочленов посвящены работы [1—4]. В работах [1, 2] предполагались достаточно жесткими условия на оригинал и его изображение по Лапласу, в работах [3, 4] получена оценка погрешности сверху. В настоящей статье для определенного класса оригиналов получена асимптотическая формула для погрешности приближенного обращения преобразования Лапласа с помощью многочленов Якоби.

Теорема. Пусть непрерывно дифференцируемая функция обладает свойствами

$$f(t) \approx \begin{cases} A + Bt^{\gamma} e^{-ut^{\nu}} \ln^{q} t, & t \to 0, \\ C + Dt^{\delta} e^{-vt} \ln^{s} t, & t \to \infty, \end{cases} \tag{1}$$

где A, C, γ, δ, v, q, s — произвольные числа; B, $D \neq 0$; u, $v \geqslant 0$; $t \in [0, \infty)$. Тогда для достаточно больших N справедлива формула

$$\Delta f_N(t) = f(t) - f_N(t) \approx \frac{2}{\pi} \sin^{-i_0} \varphi \cos^{-k_0} \varphi \left\{ - \frac{\sin(2M\varphi + \eta_0)}{\sin \varphi} [A\Gamma(1 + i_0) \times \right.$$
$$\times (2M)^{-(1+i_0)} \sin \alpha\pi + B\sigma^{-\gamma} \Phi(M)] + (-1)^N \frac{\cos(2M\varphi + \eta_0)}{\cos \varphi} \Big[C\Gamma(1 + k_0) \times$$
$$\times (2M)^{-(1+k_0)} \sin\left(\beta - \frac{\gamma_0}{\sigma}\right)\pi + D\left(\frac{2R_1}{\sigma}\right)^{\delta} \Gamma(1 + k) R_2^{s} (2M)^{-(1+k)} \times$$
$$\left. \times \left(\sin \eta - \frac{\psi(1 + k)}{R_1} \left(\delta \sin(\eta - \varphi_1) + \frac{s}{R_2} \sin(\eta - \varphi_1 - \varphi_2)\right)\right)\Big] \right\}, \tag{2}$$

$$\alpha < \min\left\{\frac{3}{2},\ 2\gamma + \frac{3}{2}\right\}, \quad \beta < \begin{cases} 2\gamma_0/\sigma - {}^1/_2, & C \neq 0, \\ 2(\gamma_0 + v)/\sigma - {}^1/_2, & C = 0. \end{cases}$$

Здесь введены обозначения: $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$;

$$\Phi(M) = \begin{cases} \Gamma(1 + i_1) R_3^{q} (2M)^{-(1+i_1)} \left[\sin \eta_1 + \frac{2q}{R_3} \psi(1 + i_1) \sin(\eta_1 - \varphi_3)\right], & u = 0, \\ \mu_1^{1+i_1} R_4^{q} \sqrt{\frac{2\pi}{\mu_2(1 + 2\omega)}} \exp\left[-\mu_2 \frac{1 + 2\omega}{2\omega} \cos \frac{\omega\pi}{1 + 2\omega}\right] \cos \eta_3, & u > 0; \end{cases}$$

$$t = -\frac{2}{\sigma} \ln \cos \varphi; \quad 2M = 2N + \alpha + \beta + 2; \quad i_0 = \frac{1}{2} - \alpha;$$

$$k_0 = \frac{2\gamma_0}{\sigma} - \beta - \frac{3}{2}; \quad i_1 = 2\gamma + i_0; \quad k = \frac{2v}{\sigma} + k_0; \quad \omega = -\nu;$$

$$\eta_0 = -(1 + 2\alpha)\frac{\pi}{4}; \quad \eta = \left(\beta - \frac{\gamma_0 + v}{\sigma}\right)\pi + \delta\varphi_1 + s\varphi_2; \tag{3}$$

$$\eta_1 = (\alpha - \gamma)\pi - q\varphi_3; \quad \mu_1 = \left(2u\omega \frac{\sigma^{\omega}}{2M}\right)^{\frac{1}{1+2\omega}};$$

$$\mu_2 = [2u\omega\sigma^{\omega}(2M)^{2\omega}]^{\frac{1}{1+2\omega}}; \quad \eta_3 = \left(\gamma - \alpha + \frac{1}{2}\right)\pi +$$