$$\times \int_0^{\pi/2} e^{(2M+1)\theta i} f\left(-\frac{2}{\sigma}\ln\cos\theta\right)\frac{\sin^{l_0}\theta\cos^{k_0}\theta}{\sin(\theta+\varphi)}\,d\theta +$$

$$+\frac{1}{i}e^{-(2M+1)\varphi i}\int_0^{\pi/2} e^{(2M+1)\theta i} f\left(-\frac{2}{\sigma}\ln\cos\theta\right)\frac{\sin^{l_0}\theta\cos^{k_0}\theta}{\sin(\theta-\varphi)}\,d\theta\Big\}. \qquad (10)$$

Если в равенстве (10) известными методами [3, 4] найти асимптотические разложения интегралов, сохранив первые члены этих разложений, то придем к соотношению (2).

Полученная формула дает возможность судить о скорости сходимости $f_N(t)$ и $f(t)$ и может быть использована для выбора чисел удерживаемых членов приближенного ряда.

1. *Крылов В. И., Скобля Н. С.* Об условиях сходимости и оценке погрешности приближенного обращения преобразования Лапласа при помощи рядов Фурье.— Докл. АН БССР, 1967, **11**, № 9, с. 763—766.
2. *Крылов В. И., Скобля Н. С.* Замечание о сходимости и оценке погрешности приближенного обращения преобразования Лапласа при помощи ортогональных многочленов Лежандра и Якоби.— Там же, № 10, с. 863—866.
3. *Побережный О. В., Пяныло Я. Д.* Об использовании численного обращения преобразования Лапласа к нестационарным задачам термоупругости для тел с трещинами.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 8, с. 45—48.
4. *Побережный О. В., Пяныло Я. Д.* Об оценке погрешности и условиях сходимости приближенного обращения преобразования Лапласа с помощью ортогональных многочленов.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 12, с. 91—94.
5. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены.— М. : Физматгиз, 1962.— 500 с.
6. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х т.— М. : Наука, 1969.— Т. 3. 656 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 29.04.81

УДК 512.8

В. М. Петричкович, В. М. Прокип

ОБ ОБЩИХ ДЕЛИТЕЛЯХ МАТРИЧНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Пусть P — поле, а $P_{k,l}$ — совокупность $k \times l$-матриц над P. Пусть, далее,

$$A(x) = A_0x^p + A_1x^{p-1} + \cdots + A_p,$$

$$B(x) = B_0x^q + B_1x^{q-1} + \cdots + B_q,$$

$A_i, B_j \in P_{n,n}$ ($i = 0, 1, \ldots, p$; $j = 0, 1, \ldots, q$) — два матричных регулярных многочлена ($|A_0| \neq 0$, $|B_0| \neq 0$). Исследуем вопрос об общих делителях матричных многочленов $A(x)$ и $B(x)$ и установим необходимое и одно достаточное условия существования общего линейного унитального делителя этих многочленов.

В работе [1] приведены условия существования общих собственного значения и соответствующего ему собственного вектора регулярных матричных многочленов $A(x)$ и $B(x)$, коэффициенты которых $A_i, B_j \in C_{n\,n}$ ($i = 0, 1 \ldots p$; $j = 0, 1, \ldots, q$).

Рассмотрим матричные уравнения

$$XA = B, \qquad (1)$$

$$YC = D, \qquad (2)$$

где $A \in P_{r,l}$; $B \in P_{n,l}$; $C \in P_{r,k}$; $D \in P_{n,k}$; $X, Y \in P_{n,r}$ и X, Y неизвестны.

Лемма 1. Матричные уравнения (1), (2) имеют общее решение тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rang}\begin{Vmatrix} A & C \\ B & D \end{Vmatrix} = \operatorname{rang}\|A \quad C\|.$$

Доказательство. Через x_i, y_i, b_i, d_i обозначим i-е строки матриц X, Y, B, D соответственно. Тогда из уравнений (1), (2) можно записать n пар уравнений

$$x_i A = b_i, \tag{3}$$

$$y_i C = d_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{4}$$

Каждая пара уравнений (3), (4) имеет общее решение тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rang} \begin{Vmatrix} A & C \\ b_i & d_i \end{Vmatrix} = \operatorname{rang} \| A \quad C \|.$$

Дальнейшее доказательство очевидно.

Введем следующие обозначения:

$$M = \left\| \begin{array}{cccccccc} A_0 & & \vdots & & B_0 & & \vdots & \\ A_1 & A_0 & \vdots & & B_1 & B_0 & \vdots & \\ \vdots & A_1 & \vdots & & \vdots & B_1 & \vdots & \\ & \vdots & \vdots & A_0 & & \vdots & \vdots & B_0 \\ A_p & & \vdots & & B_q & & \vdots & \\ & A_p & \vdots & A_1 & & B_q & \vdots & B_1 \\ & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ & & \vdots & A_p & & & \vdots & B_q \\ \multicolumn{4}{c}{\underbrace{\hspace{8em}}_{q}} & \multicolumn{4}{c}{\underbrace{\hspace{8em}}_{p}} \end{array} \right\|,$$

$$N = \left\| \begin{array}{c} M \\ \underbrace{\mathrm{O} \cdots \mathrm{O} \quad A_p}_{q} \ \underbrace{\mathrm{O} \cdots \mathrm{O} \quad B_q}_{p} \end{array} \right\|,$$

$$Q = \left\| \begin{array}{cccccccccc} A_0 & & \vdots & & & B_0 & & \vdots & & \\ A_1 & A_0 & \vdots & & & B_1 & B_0 & \vdots & & \\ \vdots & A_1 & \vdots & & & \vdots & B_1 & \vdots & & \\ A_p & \vdots & \vdots & A_0 & & B_q & \vdots & \vdots & B_0 & \\ & A_p & \vdots & A_1 & A_0 & & B_q & \vdots & B_1 & B_0 \\ & & \vdots & \vdots & A_1 & & & \vdots & \vdots & B_1 \\ & & \vdots & A_{p-1} & \vdots & & & \vdots & B_{q-1} & \vdots \\ & & \vdots & A_p & A_{p-1} & & & \vdots & B_q & B_{q-1} \\ \multicolumn{5}{c}{\underbrace{\hspace{10em}}_{q-1}} & \multicolumn{5}{c}{\underbrace{\hspace{10em}}_{p-1}} \end{array} \right\|.$$

На незаполненных местах в матрицах M и Q стоят нули.

В дальнейшем, где это не оговорено, под делителем подразумеваем левый делитель.

Теорема 1. Пусть матричные многочлены $A(x)$ и $B(x)$ имеют общий линейный унитальный делитель, т. е.

$$A(x) = (Ex - D) F(x), \quad B(x) = (Ex - D) G(x),$$

где E — единичная матрица. Тогда

$$\operatorname{rang} N = \operatorname{rang} M.$$

Доказательство. Пусть $Ex - D$ делитель матричных многочленов $A(x)$ и $B(x)$. На основании обобщенной теоремы Безу

$$A(D) = D^p A_0 + D^{p-1} A_1 + \cdots + A_p = \mathrm{O},$$

$$B(D) = D^q B_0 + D^{q-1} B_1 + \cdots + B_q = \mathrm{O}.$$

Запишем матрицу

$$R = \begin{Vmatrix} \multicolumn{4}{c}{E_{(p+q-1)n}} & \mathrm{O} \\ D^{p+q-1} & D^{p+q-2} & \cdots & D & E_n \end{Vmatrix}.$$

Здесь E_i обозначает единичную матрицу порядка i. Тогда матрица R удовлетворяет равенству

$$RN = \left\| \begin{matrix} M \\ O_{n\times(p+q)n} \end{matrix} \right\|,$$

где $O_{n\times(p+q)n}$ — нулевая $n \times (p+q)$ n-матрица. Поскольку $|R| \neq 0$, то отсюда получаем, что $\operatorname{rang} N = \operatorname{rang} M$.

Пусть дано матричное уравнение

$$XM = \|\underbrace{0 \cdots 0 \quad -A_p}_{q} \quad \underbrace{0 \cdots 0 \quad -B_q}_{p}\|, \tag{5}$$

где $X = \|X_1 \quad X_2 \cdots X_{p+q-1}\|$, $X_i \in P_{n,n}$ $(i = 1, 2, \ldots, p+q-1)$.

Лемма 2. Матричные многочлены $A(x)$ и $B(x)$ имеют общий линейный унитальный делитель тогда и только тогда, когда уравнение (5) имеет такое решение:

$$S = \|S_1 \quad S_2 \cdots S_{p+q-1}\|, \tag{6}$$

что $S_i = S_{p+q-1}^{p+q-i}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, p+q-1$.

Доказательство. Пусть $Ex - D$ — делитель матричных многочленов $A(x)$ и $B(x)$. Тогда матрица

$$\|D^{p+q-1} D^{p+q-2} \cdots D\|$$

есть решением уравнения (5).

Наоборот, если уравнение (5) имеет решение вида (6), то легко видеть, что $Ex - S_{p+q-1}$ является делителем матричных многочленов $A(x)$ и $B(x)$.

Теорема 2. Пусть для матричных многочленов $A(x)$ и $B(x)$ $\operatorname{rang} N = \operatorname{rang} M$. Если матрица Q неособенная, то $A(x)$ и $B(x)$ имеют общий линейный унитальный делитель, причем он единственный.

Доказательство. Рассмотрим уравнение (5) и уравнение

$$YQ = \|\underbrace{0 \cdots 0 \quad -A_p}_{q-1} \quad \underbrace{0 \cdots 0 \quad -B_q}_{p-1}\|, \tag{7}$$

где $Y = \|X_2, X_3, \ldots, X_{p+q-1}\|$. Поскольку $\operatorname{rang} N = \operatorname{rang} M$, то уравнение (5) имеет решение. Учитывая вид матриц X и Y и то, что уравнение (7) имеет единственное решение, заключаем, что уравнение (5) также имеет единственное решение $S = \|S_1 S_2 \ldots S_{p+q-1}\|$, где $\|S_2 \ldots S_{p+q-1}\| = \|0 \cdots 0 - A_p\, 0 \cdots 0 - B_q\| Q^{-1}$ — решение уравнения (7). Подставив в уравнения (5), (7) их решения, получим такие равенства:

$$\|S_1 \quad S_2 \cdots S_{p+q-2}\| Q = \\ = \|\underbrace{0 \cdots 0 \quad -S_{p+q-1}A_p}_{q-1} \quad \underbrace{0 \cdots 0 \quad -S_{p+q-1}B_q}_{p-1}\|, \tag{8}$$

$$\|S_2 \quad S_3 \cdots S_{p+q-1}\| Q = \|\underbrace{0 \cdots 0 \quad -A_p}_{q-1} \quad \underbrace{0 \cdots 0 \quad -B_q}_{p-1}\|. \tag{9}$$

Умножая обе части равенства (9) слева на матрицу S_{p+q-1} и сравнивая левые части полученного равенства и равенства (8), получаем

$$\|S_1 \quad S_2 \cdots S_{p+q-2}\| Q = \|S_{p+q-1}S_2 \cdots S_{p+q-1}^2\| Q.$$

Отсюда следует, что $S_i = S_{p+q-1}^{p+q-i}$ $(i = 1, 2, \ldots, p+q-1)$. Тогда на основании леммы 2 $Ex - S_{p+q-1}$ является делителем матричных многочленов $A(x)$ и $B(x)$.

Единственность общего делителя следует из единственности решения уравнения (5). Теорема доказана.

Следствие. Пусть

$$A(x) = Ex^2 + A_1 x + A_2, \quad B(x) = Ex^2 + B_1 x + B_2$$

$(A_i, B_i \in P_{n,n}\ (i = 1, 2),\ E$ — единичная матрица) — матричные унитальные квадратные трехчлены. Пусть, далее,

$$\operatorname{rang}\begin{Vmatrix} E & 0 & E & 0 \\ A_1 & E & B_1 & E \\ A_2 & A_1 & B_2 & B_1 \\ 0 & A_2 & 0 & B_2 \end{Vmatrix} = \operatorname{rang}\begin{Vmatrix} E & 0 & E & 0 \\ A_1 & E & B_1 & E \\ A_2 & A_1 & B_2 & B_1 \end{Vmatrix}.$$

Если матрица $A_1 - B_1$ неособенная, то трехчлены $A(x)$ и $B(x)$ имеют общий линейный делитель $Ex - D$, причем $D = -(A_2 - B_2)(A_1 - B_1)^{-1}$.

Аналогичными рассуждениями можно получить следующий критерий делимости матричных многочленов.

Лемма 3. Пусть

$$A(x) = A_0x^p + A_1x^{p-1} + \cdots + A_p; \quad B(x) = B_0x^q + B_1x^{q-1} + \cdots + B_q,$$
$$A_i, B_j \in P_{n,n} \quad (i = 0, 1, \ldots, p; \quad j = 0, 1, \ldots, q), \quad p \geqslant q$$

и $B(x)$ — регулярный матричный многочлен. Тогда $B(x)$ является делителем $A(x)$, т. е. $A(x) = B(x)C(x)$ в том и только том случае, если

$$\operatorname{rang}\begin{Vmatrix} \underbrace{\begin{matrix} B_0 & & \cdot & \\ B_1 & B_0 & \vdots & \\ \vdots & B_1 & \vdots & \\ B_q & \vdots & \vdots & B_0 \\ & B_q & \vdots & B_1 \\ & & \vdots & \vdots \\ & & \cdot & B_q \end{matrix}}_{p-q+1} \end{Vmatrix} = \operatorname{rang}\begin{Vmatrix} \underbrace{\begin{matrix} B_0 & & \cdot & \\ B_1 & B_0 & \vdots & \\ \vdots & B_1 & \vdots & \\ B_q & \vdots & \vdots & B_0 \\ & B_q & \vdots & B_1 \\ & & \vdots & \vdots \\ & & \cdot & B_q \end{matrix}}_{p-q+1} & \begin{matrix} A_0 \\ A_1 \\ \\ \vdots \\ \\ \\ A_p \end{matrix} \end{Vmatrix}.$$

1. *Гохберг И. Ц., Хайниг Г.* Результантная матрица и ее обобщения. I. Результантный оператор матричных полиномов.— Acta sci. math., 1975, 37, № 1/2, с. 41—61.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР, Львовский университет

Поступила в редколлегию 18.05.81

УДК 512.8

О. М. Мельник

К ПОДОБИЮ МАТРИЧНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Рассмотрим полиномиальные матрицы $A(x) = Ex^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m$ и $B(x) = Ex^m + B_1x^{m-1} + \ldots + B_m$, где $A_j, B_j\ (j = \overline{1, m})$ — $n \times n$-матрицы над $\mathbb{C}$. Пусть $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \underbrace{\varepsilon(x), \ldots, \varepsilon(x)}_{t})$ — нормальная форма Смита матриц $A(x)$ и $B(x)$. Тогда $A(x)$ и $B(x)$ полускалярно эквивалентными преобразованиями [3] приводятся соответственно к виду

$$C_1A(x)Q_1(x) = \begin{Vmatrix} E_{n-t} & 0 \\ \overline{A}(x) & \varepsilon(x)E_t \end{Vmatrix}, \quad C_2B(x)Q_2(x) = \begin{Vmatrix} E_{n-t} & 0 \\ \overline{B}(x) & \varepsilon(x)E_t \end{Vmatrix},$$

где

$$\overline{A}(x) = \begin{Vmatrix} a_{11}(x) & \ldots & a_{1n-t}(x) \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{t1}(x) & \ldots & a_{tn-t}(x) \end{Vmatrix}; \quad \overline{B}(x) = \begin{Vmatrix} b_{11}(x) & \ldots & b_{1n-t}(x) \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ b_{t1}(x) & \ldots & b_{tn-t}(x) \end{Vmatrix}.$$

Случай $t = 1$ исследован в работе [4].