Четную часть дроби (3) эквивалентными преобразованиями с учетом неравенств б), д) и г) для нечетных j приводим к виду

$$\frac{1 \,|}{|\, 1+\gamma\Phi_0} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{ii} \,|}{|\, 1+\gamma\Phi_i}, \tag{18}$$

$$\Phi_i = \frac{g_{i+1,i}x_{i+1,i}}{1+\sum\limits_{j=i}^{\infty} \dfrac{(1-g_{j+1,i})\, g_{j+2,i}x_{j+2,i} \,|}{|\, 1}} + \frac{g_{i,i+1}x_{i,i+1}}{1+\sum\limits_{j=i}^{\infty} \dfrac{(1-g_{i,j+1})\, g_{i,j+2}x_{i,j+2} \,|}{|\, 1}},$$

где $|x_{ij}| \leqslant 1$ и

$$\begin{gathered} g_{i+1,i} = 1 - |a_{i+2,i}|\{r_{i+1,i}|1 + a_{i+2,i}|\}^{-1}; \\ g_{i+p,i} = 1 - |a_{2p+i+1,i}|\{r_{2p+i-1,i}|1 + a_{2p-1+i,i} + a_{2p+i,i}|\}^{-1}; \\ 0 \leqslant g_{ij} \leqslant 1,\ p = 2, 3, \ldots;\quad i = 0, 1, \ldots \end{gathered} \tag{19^c}$$

Как и в случае сходимости дроби (16), нетрудно показать, что дробь (18) мажорируется дробью [1]

$$\frac{1 \,|}{|\, 1-2\gamma} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|a_{ii}|/(1-2\gamma)^2 \,|}{|\, 1},$$

которая абсолютно сходится, согласно признаку Ворпицкого.

1. *Боднар Д. И.* Признаки сходимости ветвящихся цепных дробей с частными звеньями вида $\dfrac{(1-g_{i_1i_2\ldots i_k})\,\hat{g}_{i_1i_2\ldots i_k}\,x_{i_1i_2\ldots i_k}}{1}$.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1982, вып. 15, с. 30—35.
2. *Боднар Д. И., Кучминская Х. И.* О сходимости разложений функций двух переменных в соответствующую ветвящуюся цепную дробь.— Там же, 1980, вып. 11, с. 3—6.
3. *Кучминская Х. И.* Соответствующая и присоединенная ветвящиеся цепные дроби для двойного степенного ряда.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 7, с. 614—617.
4. *Кучминская Х. И.* Разложение двойного степенного ряда в соответствующую и присоединенную ветвящиеся цепные дроби.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1979, вып. 9, с. 14—19.
5. *Стилтьес Т. И.* Исследования по непрерывных дробях.— М. : ОНТИ, 1936.— 155 с.
6. *Murphy J. A., O'Donohoe.* A two-variable generalization of the Stieltjes — type continued fraction.— J. Comp. and Appl. Math., 1978, **4**, N 3, p. 181—190.
7. *Perron O.* Die Lehre von der Kettenbrüchen. Stuttgart : Teubner, 1957.— Bd. 2. 524 S.
8. *Wall H. S.* Analytic theory of continued fractions.— New York : Van Nostrand co. 1948.— 433 p.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 04.12.81

УДК 518.5+517.9

Н. В. Опыр

ПОСТРОЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, КОЭФФИЦИЕНТЫ КОТОРЫХ ИМЕЮТ ОСОБЕННОСТИ ТИПА ДЕЛЬТА-ФУНКЦИИ

При исследовании сложных колебательных систем полезно иметь аналитическое выражение характеристического определителя. Поэтому интенсивно развиваются аналитические методы построения характеристических определителей [3—5]. Эти методы удобно применять на ЭВМ, предусматривающих автоматизацию аналитических преобразований. В данной работе предложен аналитический способ построения характеристических определителей для дифференциальных уравнений, которые содержат коэффициенты с особенностями типа дельта-функции. Такими уравнениями описываются, в частности, задачи о малых колебаниях и устойчивости стержней с заданным числом сосредоточенных масс и упругих опор. Эти уравнения имеют вид

$$L[y] - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i(x)\, y(x)\, \delta(x - x_i) = 0, \tag{1}$$

где $L[y] = y^{(n)}(x) + \sum_{\nu=1}^{n} p_{n-\nu}(x)\, y^{n-\nu}(x)$; $p_{n-\nu}(x)$, $a_i(x)$ — заданные на промежутке $[a, b]$ функции; $p_{n-\nu}(x)$ — непрерывно дифференцируемая до порядка $n - \nu$ функция; α_i — некоторые параметры; $\delta(x)$ — функция Дирака; x_i — заданные точки, причем $a < x_1 < \ldots < x_m < b$.

Общее решение уравнения (1) приведено в работе [3]. Для составления машинного алгоритма построения характеристического определителя общее решение следует представить в виде

$$y_m(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \varphi_k(x). \tag{2}$$

Здесь $\varphi_k(x) = K_{\alpha}^{(k)}{}^{k}(x, a) + P_k(x)$; $P_k(x) = \sum_{i=1}^{m} A_{ik} f_i(x, x_i)$.

Используя формулы для определения A_{ik} и $P_k(x)$ [3] методом математической индукции, получаем рекуррентные соотношения

$$A_{ik} = \alpha_i \left(\psi_k(x_i) + \sum_{s=0}^{i} A_{sk} f_s(x_1, x_s) \right), \quad A_{0k} = 0; \tag{3}$$

$$P_k = \sum_{i=1}^{m} A_{ik} K(x, x_i)\, a_i(x_i)\, \Theta(x - x_i), \tag{4}$$

где $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ — фундаментальная система решения уравнения $L[y] = 0$, а $K(x, \alpha)$ — его функция влияния; $\psi_k(x) = K_{\alpha}^{(k)}{}^{k}(x, a)$; $\Theta(x)$ — функция Хевисайда;

$$f_i(x, x_i) = K(x, x_i)\, a_i(x_i)\, \Theta(x - x_i).$$

Для построения характеристического определителя ограничимся краевыми условиями типа Штурма

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} a_{\mu}^{(\nu)} y^{(\nu)}(a) = 0, \quad \sum_{\nu=0}^{n-1} \beta_{\mu}^{(\nu)} y^{(\nu)}(b) = 0 \quad \left(\mu = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}\right). \tag{5}$$

Характеристические определители в общем виде выражаются через функции $\varphi_k(x)$ и их производные до $n - 1$ порядка по x и α, т. е.

$$\Delta(x, \alpha)|_{x=b} = \left| \begin{matrix} \varphi_{i_1}^{(r_1)}(x) & \ldots & \varphi_{i_l}^{(r_1)}(x) & \ldots & \varphi_{i_k}^{(r_1)}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{i_1}^{(r_s)}(x) & \ldots & \varphi_{i_l}^{(r_s)}(x) & \ldots & \varphi_{i_k}^{(r_s)}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{i_1}^{(r_\mu)}(x) & \ldots & \varphi_{i_l}^{(r_\mu)}(x) & \ldots & \varphi_{i_k}^{(r_\mu)}(x) \end{matrix} \right|_{x=b}, \tag{6}$$

где

$$\varphi_{i_l}^{(r_s)}(x) = \left. \frac{\partial^{(i_l + r_s)} K(x, \alpha)}{\partial \alpha^{i_l} \partial x^{r_s}} \right|_{\alpha=a} + P_{i_l}^{(r_s)}(x); \tag{7}$$

$$L_s(x) = \alpha_s \left(\left. \frac{\partial^{i_l} K(x, \alpha)}{\partial \alpha^{i_l}} \right|_{\alpha=a} + \sum_{i=0}^{s-1} B_i(x_s) \right); \quad B_0 = 0; \tag{8}$$

$$B_i(x) = \alpha_i \left(\left. \frac{\partial^{i_l} K(x, \alpha)}{\partial \alpha^{i_l}} \right|_{\substack{\alpha=a \\ x=x_i}} + \sum_{j=0}^{i-1} B_j(x_j) \right) K(x, x_i)\, a_i(x_i); \tag{9}$$

$$P_{i_l}^{(r_s)}(x) = \sum_{s=1}^{m} L_s(x_s) \left. \frac{\partial^{(r_s)} K(x, x_s)}{\partial x^{r_s}} \right|_{x=b}. \tag{10}$$

На основании формул (6) — (10) для нахождения на ЭВМ аналитического выражения характеристического определителя построен алгоритм.

1. Определяем аналитическое выражение для функции $f_1(x, \alpha) := K(x, \alpha)$ ($l := 0$ — номер столбца).

2. Присваиваем $B_0 := 0$; $s := 1$ — номер строки; $j := 1$. Определяем аналитическое выражение для функции

$$f_2(x, \alpha) := \frac{\partial^{i_l} K(x, \alpha)}{\partial \alpha^{i_l}}.$$

3. Находим аналитическое выражение очередного элемента массива L в точке x_j по формуле (8). Получаем

$$L_j(x_j) := \alpha_j \left(f_2(x_j, a) + \sum_{i=0}^{j-1} B_i(x_j) \right).$$

4. Находим аналитическое выражение j-го элемента массива B в точке x_{j+1}:

$$B_j(x_{j+1}) := L_j(x_j) f_1(x_{j+1}, x_j).$$

5. Если $j \leqslant m - 1$, то вычисляем новое значение и возвращаемся к п. 3. Таким образом формируем массив L.

6. Находим аналитическое выражение для функции

$$f_3(x, \alpha) := \frac{\partial^{r_s} K(x, \alpha)}{\partial x^{r_s}}.$$

7. Определяем $P_{i_e}^{(r_s)}$ по формуле (10):

$$P_{i_l}^{(r_s)} := \sum_{j=1}^{m} L_j(x_j) f_3(x_b, x_j).$$

8. Если $s \leqslant \mu$, то поступаем следующим образом: по формуле (7) вычисляем

$$\varphi_{i_l}^{(r_s)} := \left. \frac{\partial^{i_l + r_s} K(x, \alpha)}{\partial^{i_l}\alpha \partial^{r_s} x} \right|_{\substack{x=b \\ \alpha=a}} + P_{i_l}^{r_s}(x_b),$$

выбираем новую строку $s := s + 1$ и переходим к п. 6.

9. Если $l < k$, то $l := l + 1$ и переходим к п. 2.

10. Раскрываем определитель по алгоритму, предложенному в работе [1].

Описанный алгоритм реализован на языке Аналитик [6]. С помощью этого алгоритма решен ряд задач о малых колебаниях и устойчивости стержней с определенным числом сосредоточенных масс и упругих опор. Решения известных задач совпали с результатами, приведенными в работе [2].

1. *Антонюк Я. П., Монцібович Б. Р., Попов Б. О.* Обчислення визначників і розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь в аналітичному вигляді.— У кн.: Машинно-аналітичні методи розв'язування задач. Львів : Фіз.-мех. ін-т АН УРСР, 1980, с. 7—12.
2. *Бернштейн С. А., Керопян К. К.* Определение частот колебаний стержневых систем методом спектральной функции.— М. : Госстройиздат, 1960.— 280 с.
3. *Зорий Л. М.* К применению обобщенных функций в аналитических методах исследования сложных гидроупругих систем.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 9, с. 991—994.
4. *Зорий Л. М.* К развитию аналитических методов исследования задач динамики упругих и гидроупругих систем.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 7, с. 16—20.
5. *Образцов И. Ф., Онанов Г. Т.* Строительная механика скошенных тонкостенных систем.— М. : Машиностроение, 1973.— 659 с.
6. *Попов Б. О., Монцібович Б. Р.* Розв'язування задач на машинах для інженерних розрахунків.— К. : Наук. думка, 1978.— 347 с.

Физико-механический институт им. Г. В. Карпенко
АН УССР

Поступила в редколлегию
08.12.80