Аналогично могут быть найдены выражения для плотности внутренней энергии $\overset{*}{u}_{(\alpha)}$ и давления $p_{(\alpha)}$ ($\alpha = n,\ p$). В формулах (24) использованы обозначения

$$\Phi_j\left(\frac{\eta_{(\alpha)}}{k_BT_{(\alpha)}}\right) \equiv \frac{1}{\Gamma(j+1)}\int_0^\infty \xi^j\left[1+\exp\left(\xi - \frac{\eta_{(\alpha)}}{k_BT_{(\alpha)}}\right)\right]^{-1} d\xi \qquad (25)$$

— интеграл Ферми индекса j [2]; $\Gamma(j+1)$ — гамма-функция аргумента $j+1$; h — постоянная Планка.

Используя известные приближения для функций (18) [5] и (25) [2], справедливые для различных диапазонов изменения их аргументов, можно значительно упростить аналитическую структуру полученных уравнений состояния для s-, n- и p-подсистем.

1. *Басс Ф. Г., Гуревич Ю. Г.* Горячие электроны и сильные электромагнитные поля в плазме полупроводников и газового разряда.— М. : Наука, 1975.— 399 с.
2. *Блекмор Дж.* Статистика электронов в полупроводниках.— М. : Мир, 1964.— 392 с.
3. *Бонч-Юруевич В. Л., Калашников С. Г.* Физика полупроводников.— М. : Наука, 1977.— 672 с.
4. *Бурак Я. И., Чекурин В. Ф.* Основы трехконтинуумной теории деформации собственных полупроводников.— Прикл. механика, 1981, **17**, № 1, с. 14—20.
5. *Лейбфрид Г.* Микроскопическая теория механических и тепловых свойств кристаллов.— М.; Л. : Физматгиз, 1963.— 312 с.
6. *Мюнстер А.* Химическая термодинамика.— М. : Мир, 1971.— 296.
7. *Новикова С. И.* Тепловое расширение твердых тел.— М. : Наука, 1974.— 292 с.
8. *Румер Ю. Б., Рывкин М. Ш.* Термодинамика, статистическая физика и кинетика.— М. : Наука, 1977.— 552 с.
9. *Схоутен Я. А.* Тензорный анализ для физиков.— М. : Наука, 1965.— 456 с.
10. *Чекурин В. Ф.* Математическое моделирование процессов переноса в неравновесных, деформируемых узкозонных полупроводниках.— В кн.: Полупроводники с узкой запрещенной зоной и полуметаллы: Львов : Изд-во Льв. ун-та, 1980, ч. 1, с. 242—244.
11. *Чекурин В. Ф.* Уравнения состояния для трехконтинуумной модели полупроводника.— Мат. методы и физ-мех. поля, 1980, вып. 11, с. 85—89.

Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию 04.12.81

УДК 539.3

Г. Т. Сулим

ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ СОМИЛЬЯНО В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛ С ТОНКОСТЕННЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Рассмотрим тело V, ограниченное поверхностью S в общем случае анизотропии, когда закон Гука имеет вид [3]

$$\sigma_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta\lambda\mu}\varepsilon_{\lambda\mu}. \qquad (1)$$

Приведем формулу Сомильяно [3]

$$u_k(\xi) = \int_S [p_{in}(x)\,U_i^{(k)}(x,\ \xi) - u_i(x)\,p_i^{(k)}(x,\ \xi)]\,dS(x) + \int_V X_i(x)\,U_i^{(k)}(x,\ \xi)\,dV(x), \qquad (2)$$

выражающую компоненты вектора перемещений $\vec{u}$ тела V в зависимости от перемещений $u_i(x)$ и нагрузки $p_{in}(x)$ на поверхности S с внешней нормалью $\vec{n}\,(n_1,\ n_2,\ n_3)$ и от массовых сил X_i. Здесь $U_i^{(k)}(x,\ \xi)$ — компоненты тензора перемещений Грина, определяющие перемещения в точке $x\,(x_1,\ x_2,\ x_3)$ в направлении оси x_i от действия в точке $\xi\,(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$ единичной сосредоточенной силы в направлении оси x_k; функция $p_i^{(k)}(x,\ \xi)$ является составляющей усилия на поверхности S от деформаций, порожденных перемещениями $U_i^{(k)}(x,\ \xi)$, т. е.

$$p_i^{(k)}(x,\ \xi) = \sigma_{ij}^{(k)}n_j = c_{ijmn}n_j\nabla_n^x U_m^{(k)}(x,\ \xi), \quad \nabla_n^x \equiv \frac{d}{dx_n} \qquad (3)$$

Согласно работе [3], для решения граничных задач теории упругости формула Сомильяно имеет только теоретическое значение, так как на границе тела могут быть произвольно заданы нагрузки

$$p_{in} \equiv \sigma_{ij} n_j = f_i \quad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{4}$$

или перемещения $u_i = g_i$. Их можно задавать и вперемежку в количестве трех штук, отличающихся значениями индекса i, но не в совокупности.

Дадим несколько другую и более полезную интерпретацию формулы (2). Для этого рассмотрим поверхность S как разрез внутри бесконечного пространства (анализ ограниченной области ничего по существу не меняет, только увеличивает громоздкость за счет оперирования дополнительным интегралом по внешней поверхности), имеющий две кромки S^+ и S^- с нормалями $\vec{n}^+$, $\vec{n}^-$ соответственно. Обозначив через $p_i^{(k)\pm}(x,\ \xi)$ соответствующую (3) функцию на поверхности $S^{\pm}$, запишем

$$p_i^{(k)\pm}(x,\ \xi) = c_{ijmn} n_j^{\pm} \nabla_n^x U_m^{(k)}(x,\ \xi), \tag{5}$$

откуда

$$p_i^{(k)+}(x,\ \xi) = -p_i^{(k)-}(x,\ \xi). \tag{6}$$

Теперь формулу (2) можно представить так:

$$u_k(\xi) = \int\limits_S [a_i(x)\, U_i^{(k)}(x,\ \xi) - b_i(x)\, p_i^{(k)}(x,\ \xi)]\, dS(x) + \int\limits_V X_i(x)\, U_i^{(k)}(x,\ \xi)\, dV(x), \tag{7}$$

где $a_i(x)$, $b_i(x)$ — скачки компонент векторов напряжений и перемещений на поверхности:

$$a_i(x) = p_{in+}^{+}(x) - p_{in+}^{-}(x), \quad b_i(x) = u_i^{+}(x) - u_i^{-}(x) \quad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{8}$$

В формуле (7) под поверхностью скачка S подразумевается S^+, а под нормалью — $\vec{n}^+$; $p_{in\pm}^{\pm}(x)$ — компоненты вектора напряжений $\vec{P}_{n\pm}^{\pm}$ на поверхности $S^{\pm}$ с нормалью $\vec{n}^{\pm}$. Очевидно, что $p_{in\pm}^{\pm} = -p_{in\mp}^{\pm}$, в частности $p_{in-}^{-} = -p_{in+}^{-}$, и напряжения изменяются при переходе через S непрерывно, если $p_{in+}^{+} = -p_{in-}^{-} = p_{in+}^{-}$.

Скачок напряжений можно ввести в соотношение (7) и другим способом, распределив вдоль поверхности S сосредоточенные массовые силы $X_i(x) = a_i(x)\,\delta(S)$. Здесь $\delta(S)$ — дельта-функция, сосредоточенная на поверхности S.

На основе выражений (7) определяются компоненты тензора деформаций

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\xi) = [\nabla_\beta^\xi u_\alpha]_{(\alpha\beta)} = \left[\int\limits_S (a_i(x)\, \nabla_\beta^\xi U_i^{(\alpha)}(x,\ \xi) - b_i(x)\, \nabla_\beta^\xi p_i^{(\alpha)}(x,\ \xi))\, dS(x) + \int\limits_V X_i(x)\, \nabla_\beta^\xi U_i^{(\alpha)}(x,\ \xi)\, dV(x)\right]_{(\alpha\beta)}, \tag{9}$$

где $(\alpha\beta)$ означает симметризацию выражения в квадратных скобках по указанным индексам [5].

Для определения компонент напряжений нельзя непосредственно воспользоваться соотношениями (1), (9), так как, введя скачок перемещений, мы осуществили своего рода пластическую деформацию, которая не удовлетворяет закону Гука, точнее, вообще не вызывает напряжений. Поэтому для получения $\sigma_{\alpha\beta}$ необходимо из правой части (1), где $\varepsilon_{\lambda\mu}$ выражаются формулами (9), вычесть автоматически туда включенные фиктивные напряжения, полученные из пластических деформаций по закону Гука.

Итак, если скачок перемещений равен $b_i = u_i^{p+} - u_i^{p-}$, то пластическая деформация определяется выражением [2]

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^p = \delta(S)\, [n_\alpha b_\beta]_{(\alpha\beta)}$$

и соответствующие по закону Гука фиктивные напряжения

$$\sigma^p_{\alpha\beta} = \int\limits_S c_{\alpha\beta\lambda\mu} n_\mu b_\lambda (x)\, \delta(\xi - x)\, dS(x).$$

Здесь учтено, что

$$f(\xi)\,\delta(S) = \int\limits_S f(x)\, \delta(\xi - x)\, dS(x).$$

Окончательно

$$\sigma_{\alpha\beta}(\xi) = \int\limits_S \{a_i(x)\, c_{\alpha\beta\lambda\mu} \nabla^\xi_\mu U^{(\lambda)}_i (x,\ \xi) - b_i(x)\, [c_{\alpha\beta\lambda\mu} \nabla^\xi_\mu p^{(\lambda)}_i (x,\ \xi) +$$

$$+ c_{\alpha\beta i\mu} n_\mu \delta(\xi - x)]\}\, dS(x) + \int\limits_V X_i(x)\, c_{\alpha\beta\lambda\mu} \nabla^\xi_\mu U^{(\lambda)}_i (x,\ \xi)\, dV(x). \qquad (10)$$

Если только $U^{(k)}_i (x,\ \xi) = U^{(k)}_i (\xi,\ x)$, то $\nabla^\xi_\mu \sim \nabla^x_\mu$, и тогда $\nabla^\xi_\mu p^{(\lambda)}_i (x,\ \xi)$, как и выражение в квадратных скобках равенства (10), совпадает с функциями — $U^{ij}_{\lambda\mu} (x - \xi)\, n_j$ и $-S^{\lambda\mu ij}\, n_j$ работы [1].

Предположим, что в теле V вдоль поверхности S локализовано тонкостенное включение типа тонкой оболочки. Считаем, что известна механическая модель включения, т. е. построены шесть условий взаимодействия включения с матрицей, которые связывают напряжения и перемещения на противоположных кромках прослойки:

$$\psi_j (u^\pm_i,\ p^\pm_{in\pm}) = 0 \text{ на } S \ (p^\pm_{in\pm} = \sigma^\pm_{ij} n^\pm_j;\quad j = \overline{1,6};\ i = \overline{1,3}). \qquad (11)$$

В числе параметров функции ψ_j могут быть толщина включения, его физико-механические характеристики и т. д. Например, если вдоль S_u ($S = S_u \cup S_\sigma$) внедрена с натягом $g^\pm_i$ абсолютно жесткая пленка, а S_σ представляет разрез с заданными на его кромках усилиями $f^\pm_i$, то условия (11) имеют вид

$$u^\pm_i = g^\pm_i \text{ на } S_u,\ p^\pm_{in\pm} = f^\pm_i \text{ на } S_\sigma \quad (i = 1,\ 2,\ 3). \qquad (12)$$

Одной из наиболее простых является винклеровская модель [7] плоского в плане упругого включения толщиной $2h\,(x_1,\ x_2)$ с модулями Юнга E и сдвига G:

$$\sigma^\pm_{i3} = \lambda_i\, [u^+_i - u^-_i],\quad \lambda_1 = \lambda_2 = G/(2h),\quad \lambda_3 = E/(2h) \quad (\Sigma_i). \qquad (13)$$

Эта модель при симметричной относительно плоскости $x_3 = 0$ нагрузке была использована в работе [4] при $u^+_3 = u^-_3$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (касательные напряжения на поверхности раздела материалов равны нулю). В осесимметричном случае [6] дополнительно учтена винклеровская реакция на сдвиг:

$$\sigma^\pm_{13} = \sigma^\pm_{23},\quad \sigma^\pm_{r3} = 2\lambda_3 u^+_r (x_1,\ x_2),\quad \sigma^\pm_{33} = 2\lambda_3 u^+_3 (x_1,\ x_2).$$

Подстановка выражений (7), (10) в условия взаимодействия (11) приводит к системе интегральных уравнений относительно функций скачка, определяющих напряженно-деформированное состояние тела. Решение этих уравнений требует предварительной их регуляризации [1, 8]. Наличие внутренних силовых факторов и их действие на границу тела учитывается добавлением к правым частям соотношений (7), (9), (10) функций $\overset{0}{u}_k (\xi)$, $\overset{0}{\varepsilon}_{\alpha\beta} (\xi)$, $\overset{0}{\sigma}_{\alpha\beta} (\xi)$, представляющих однородное решение задачи (для соответствующим образом нагруженного тела без включений).

Пусть $S_1\,(S^+_1)$ — часть поверхности S, ограничивающая тело V. Тогда, если на $S_{1\sigma}$ заданы усилия f_i, а на S_{1u} — смещения g_i, то условия взаимодействия (11) запишутся так:

$$p^-_{in+} = 0,\ p^+_{in+} = f_i \text{ на } S_{1\sigma};\ u^-_i = 0,\ u^+_i = g_i \text{ на } S_{1u}\,(S_1 = S_{1\sigma} \cup S_{1u}). \quad (14)$$

В этом случае три функции скачка известны заранее, а оставшиеся три подлежат определению из соответствующих систем интегральных уравнений (S_1 — поверхность скачка в неограниченном пространстве).

Таким образом, формула Сомильяно в интерпретации (7) имеет практическое значение при решении граничных задач и постановке задач теории тонкостенных включений любой механической природы в анизотропных телах произвольной формы. В последнем случае необходимо только построить достаточно простую, но адекватную модель включения типа (11). Предложенный подход имеет также то преимущество, что для решения соответствующих задач для многосвязных тел используется тензор Грина неограниченной области.

1. *Канаун С. К.* К задаче о пространственной трещине в анизотропной упругой среде.— Прикл. математика и механика, 1981, **45**, № 2, с. 361—370.
2. *Косевич А. М.* Дислокации в теории упругости.— Киев : Наук. думка, 1978.— 220 с.
3. *Новацкий В.* Теория упругости.— М. : Мир, 1975.— 872 с.
4. *Панасюк В. В., Андрейків О. Є., Стадник М. М.* Пружна рівновага необмеженого тіла з тонким включенням.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1976, № 7, с. 637—640.
5. *Победря Б. Е.* Лекции по тензорному анализу.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1979.— 214 с.
6. *Силованюк В. П.* Осесимметричная деформация пространства с двумя тонкими упругими включениями.— Физ.-хим. механика материалов, 1981, **17**, № 2, с. 76—82.
7. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения.— М. : Наука, 1974.— 640 с.
8. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1973.— 232 с.

Львовский университет

Поступила в редколлегию 04.12.81

УДК 539.377 : 532.72

М. С. Раврик, А. Л. Бичуя

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ НАГРЕТОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ ПРИ ДИФФУЗИОННОМ НАСЫЩЕНИИ

Тонкостенные конструкции оболочечного вида с диффузионным упрочнением или покрытиями типа тонких оболочек являются широко распространенными элементами различных изделий, способных надежно работать в заданных эксплуатационных условиях. В этих случаях при оценке их несущей способности существенную роль играют явления, обусловленные немеханическими процессами, например диффузией тепла и вещества [2]. В данной статье проведено исследование влияния указанных процессов на физико-механическое поведение пологой трансверсально-изотропной оболочки.

Рассмотрим бесконечную пологую сферическую оболочку с круговым отверстием радиуса r_0, материал которой представляет собой двухкомпонентный твердый раствор с низкой сдвиговой жесткостью при постоянных начальных значениях температуры t_0 и концентрации c_0. При этом через поверхность оболочки $z = \pm h$ осуществляется конвективный тепло- и массообмен с внешней средой, температура и химический потенциал которой постоянны и соответственно равны t_c и μ_c. Контур отверстия, через который происходит теплообмен по закону Ньютона, принимаем свободным от напряжений и массоизолированным.

Учитывая малое время релаксации температуры по сравнению с процессом диффузии, с достаточной точностью можно принять в начальный момент времени распределение температуры в оболочке установившимся. При этом, пренебрегая в [3] связанностью физических полей с полем деформации, а также влиянием изменения концентрации на распределение температуры, задача об определении усредненных температуры, концентрации вещества и напряженного состояния при одинаковых коэффициентах тепло- и массообмена ($h_t^+ = h_t^- = h_t$, $h_\mu^+ = h_\mu^- = h_\mu$) сводится к решению системы уравнений

$$\Delta T_i - b_i^2 T_i = (2i - 1)\, b_i^2 t_i \quad (i = 1,\ 2),$$

$$\left(\Delta - \delta_i - \frac{\partial}{\partial \tau_0}\right) C_i + d_0 (\eta \Delta - \delta_i)\, T_i = (2i - 1)\, \delta_i \tilde{\mu}_i / d_c^{e,t}; \qquad (1)$$

$$\Delta w_1 = 0, \quad L_1 w_2 = a^4 R F_1^{tc} + h (1 + \nu)(2g^2 - \Delta)\, F_2^{t,c},$$