УДК 539.3

М. В. Белубекян, А. В. Геворкян

О МАГНИТОУПРУГИХ ВОЛНАХ ЛЯВА

Обсудим вопрос распространения магнитоупругих волн Лява в упругой изотропной слоистой среде (слой — полупространство) при наличии внешнего постоянного магнитного поля, параллельного поверхности раздела. В работе [7] с учетом предварительно напряженного состояния среды (всестороннее растяжение или сжатие) рассмотрен случай, когда слой и полупространство являются идеальными проводниками. Соответствующая задача для вязкоупругой среды рассмотрена в работе [6]. В работе [2] исследован вопрос распространения поверхностных магнитоупругих волн Лява в случае диэлектрического слоя и идеально проводящего полупространства, и наоборот.

Для рассматриваемой задачи с точки зрения проводимости материалов (имеются в виду модели идеальных проводников и диэлектриков) для различных сочетаний слоя и полупространства линеаризованные уравнения магнитоупругости в прямоугольной декартовой системе координат Ox_1x_2 (ось x_1 направлена вдоль границы раздела, ось x_2 — вглубь полупространства) можно записать в следующем виде [1, 8]:

$$G^{(n)}\nabla^2\vec{u}^{(n)} + \nu_{nm}\frac{\mu^{(n)}}{4\pi}\{\nabla\times[\nabla+(\vec{u}^{(n)}\times\vec{H}_0)]\}\times\vec{H}_0 = \rho^{(n)}\frac{\partial^2\vec{u}^{(n)}}{\partial t^2}, \tag{1}$$

где $\nu_{nm} = (1-\delta_{2m})\,\delta_{1n} + (1-\delta_{3m})\,\delta_{2n}$; δ_{im} — символ Кронекера; $\mu^{(n)}$ — магнитная проницаемость, которую в дальнейшем будем принимать равной единице; $\vec{H}_0\,(H_{01},\,0,\,0)$ — постоянное начальное магнитное поле. Индексами $n = 1, 2$ отмечены величины, относящиеся соответственно к слою и полупространству. Из уравнения (1) при $m = 1, 2, 3$ получаются исходные уравнения тех задач, которые рассмотрены соответственно в работах [7] и [2].

Учитывая, что поле смещений для волн типа Лява имеет вид $[0,\,0,\,u_3^{(n)}(x_1,\,x_2,\,t)]$, из уравнения (1) получаем

$$(c_n^2+\nu_{nm}v_n^2)\frac{\partial^2u_3^{(n)}}{\partial x_1^2} + c_n^2\frac{\partial^2u_3^{(n)}}{\partial x_2^2} = \rho^{(n)}\frac{\partial^2u_3^{(n)}}{\partial t^2}, \tag{2}$$

$$n = 1,\ 2;\quad m = 1,\ 2,\ 3,$$

где

$$c_n^2 = G^{(n)}/\rho^{(n)};\quad v_n^2 = H_0^2/4\pi\rho^{(n)}.$$

Граничные условия рассматриваемой задачи упрощаются, если учесть, что соответствующая компонента тензора напряжений Максвелла на границах раздела сред тождественно равна нулю ($T_{23}\equiv 0$) [1, 4, 5]: $\sigma_{23}^{(1)} = 0$, $x_2 = -h$; $\sigma_{23}^{(1)} = \sigma_{23}^{(2)}$, $x_2 = 0$; $u_3^{(1)} = u_3^{(2)}$.
Соответствующее дисперсионное уравнение получаем в виде

$$\operatorname{tg}(k\alpha_{1m}h) = s\alpha_{2m}\alpha_{1m}^{-1},\quad n = 1,\ 2;\quad m = 1,\ 2,\ 3, \tag{3}$$

где
$$\alpha_{nm}^2 = (-1)^{n-1}c_n^{-2}(a^2-c_n^2-\nu_{nm}v_n^2) > 0;\quad s = G^{(2)}/G^{(1)};$$

k — волновое число; a — неизвестная фазовая скорость; h — толщина слоя.

Промежутком существования вещественных корней уравнения (3) является

$$c_1^2+\nu_{1m}v_1^2 < a^2 < c_2^2+\nu_{2m}v_2^2,\quad m = 1,\ 2,\ 3. \tag{3*}$$

Из уравнения (3) при $m = 1$ получаем дисперсионное уравнение задачи для идеально проводящих слоя и полупространства.

В работе [7] получено это дисперсионное уравнение с учетом предварительно напряженного состояния среды (всестороннее растяжение или сжатие).

При $m = 2$, 3 соответственно получаются дисперсионные уравнения задач для диэлектрического слоя и идеально проводящего полупространства, и наоборот [2]. В работе [2] показано, что выбранное значение магнитного поля может привести к устранению ($m = 3$) волн и их возникновению ($m = 2$). Согласно формуле (3*) можно показать, что при $m = 1$ в зависимости от отношения скоростей распространения поперечных упругих волн в средах имеет место один из указанных случаев.

Отметим, что критическое значение магнитного поля прямо пропорционально произведению плотностей на разность квадратов скоростей поперечных волн и обратно пропорционально разности плотностей. В таблице для случая $m = 1$ приведены примеры для нескольких пар материалов и указаны соответствующие им критические значения магнитных полей.

Материал	$G\cdot 10^{10}$, $\frac{\text{дин}}{\text{см}^2}$	ρ, $\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$	H_0^*, Тл
Алюминий	25,16	2,7	7,1
Дюралюминий	26	2,79	
Константан	61	8,88	
Вольфрам (отожженный)	130,52	19	1,5
Латунь (корабельная)	36	8,57	7,6
Палладий	51,1	12,16	
Олово (литое)	20,77	7,29	
Платина (отожженная)	60,9	21,37	3,1

Запишем уравнение движения слоя в виде

$$(c_1^2 + \nu_{1m} v_1^2) \times \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial x_1^2} + \frac{1}{\rho^{(1)}} \frac{\partial \sigma_{23}^{(1)}}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial t^2}. \tag{4}$$

Интегрируя уравнение (4) от $-h$ до 0 в предположении, что смещение слоя $u_3^{(1)}$ не изменяется по толщине, и используя граничные условия, получаем уравнение

$$h (c_1^2 + \nu_{1m} v_1^2) \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial x_1^2} + \frac{1}{\rho^{(1)}} \sigma_{23}^{(2)} = h \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial t^2}, \quad x_2 = 0. \tag{5}$$

Уравнение движения для полупространства имеет вид

$$(c_2^2 + \nu_{2m} v_2^2) \frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial x_1^2} + c_2^2 \frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial t^2}. \tag{6}$$

Таким образом, задача сводится к совместному решению одномерного уравнения (5) и двумерного уравнения (6), т. е. уравнение (5) имеет смысл граничных условий для уравнения (6). Аналогичная идея была использована в работе [9].

Ищем решение уравнений (5), (6) в виде

$$u_3^{(j)} = A e^{-\delta_{2j} k \alpha_{2m} x_2} e^{ik(x_1 - at)}, \quad j = 1, 2. \tag{7}$$

Тогда получаемое дисперсионное уравнение сводится к следующему:

$$kh\alpha_{1m}^2 = s\alpha_{2m}, \quad m = 1, 2, 3. \tag{8}$$

Если в дисперсионном уравнении (3) принять, что аргумент тангенса настолько мал, что $\operatorname{tg}(kh\alpha_{1m}) \approx kh\alpha_{1m}$, то получим уравнение, совпадающее с уравнением (8). Следовательно, допущение о неизменяемости перемещения $u_3^{(1)}$ по толщине слоя эквивалентно допущению $k^2h^2\alpha_{1m} \ll 1$. Из уравнения (8) определяется неизвестная фазовая скорость, однако для дальнейшего исследования удобно пользоваться приближенным ее выражением

$$a(k) = [c_2^2 + \nu_{2m} v_2^2 - 0{,}25 s^{-2} c_1^{-4} c_2^2 (c_2^2 - c_1^2 + \nu_{2m} v_2^2 - \nu_{1m} v_1^2)^2 k^2h^2]^{1/2}, \tag{9}$$

$$k^2h^2 \ll (c_2^2 - c_1^2 + \nu_{2m} v_2^2 - \nu_{1m} v_1^2)^{-1} \min (0{,}25 s^2 c_1^4 c_2^{-2},\ c_1^2 + s^{-2} c_2^2).$$

В выражении (9) фазовая скорость a зависит от волнового числа k, поэтому для этих волн имеет место дисперсия. Общее решение, описывающее рассматриваемое волновое движение, может быть представлено в виде суперпозиции гармонических волн (7) со всеми возможными волновыми числами

$$u(x_1, t) = \mathrm{Re}\int\limits_0^\infty \varphi(k)\, e^{ik(x_1-at)}\, dk, \tag{10}$$

где $\varphi(k)$ определяется из соответствующих начальных или граничных условий. Интеграл (10) нельзя точно вычислить, однако можно получить асимптотическое приближение для $u(x_1, t)$ при больших x_1, t, используя метод стационарной фазы [3].

Запишем интеграл (10) в виде

$$u(x_1, t) = \mathrm{Re}\int\limits_0^\infty \varphi(k)\, e^{-i\Theta(k)t}\, dk, \tag{11}$$

где $\Theta(k) = ks_0 - ka(k)$; $x_1 t^{-1} = s_0$ — фиксированный параметр. Для больших значений t основной вклад в интеграл (11) дает окрестность стационарных точек фазовой функции $\Theta^1(k) = 0$. Откуда точки максимума следующие:

$$k_{1m} = (2hc_{m1})^{-1}\,[4c_{m1}^2 - s_0^2 + s_0(8c_{m1}^2 + c_0^2)^{1/2}]^{1/2},$$

$$k_{2m} = (2hc_{m1})^{-1}\,[4c_{m2}^2 - s_0^2 - s_0(8c_{m2}^2 + s_0^2)^{1/2}]^{1/2},$$

$$c_{m1}^2 = 0{,}5s^{-2}c_1^{-4}c_2^2\,(c_{m2}^2 - c_1^2 - \nu_{1m}v_1^2)^2, \quad c_{m2}^2 = c_2^2 + \nu_{2m}v_2^2,$$

$$s_0 < c_{m2}, \quad m = 1,\ 2,\ 3.$$

Главный член в асимптотическом решении имеет вид

$$u(x_1, t) \sim \frac{\pi^{1/2}\varphi(k_{1m})[2(k_{2m}hc_{m1})^2 + s_0^2]^{3/4}}{(2k_{1m}t)^{1/2}\, c_{m1}h\, [(k_{1m}hc_{m1})^2 - 3c_{m2}^2]^{1/2}} \cos\left[k_{m1}x_1 - k_{2m}a(k_{2m}) + \frac{\pi}{4}\right] +$$

$$+ \frac{\pi^{1/2}\varphi(k_{2m})\,[2(k_{1m}hc_{m1})^2 + s_0^2]^{3/2}}{(2k_{2m}t)^{1/2}\, c_{m1}h\,[3c_{m2}^2 - (k_{2m}hc_{m1})^2]^{1/2}} \cos\left[k_{2m}x_1 - k_{2m}a(k_{2m}) + \frac{\pi}{4}\right], \quad m = 1, 2, 3.$$

Таким образом, допущение о неизменяемости смещения $u_3^{(1)}$ по толщине слоя дает возможность получить асимптотическое выражение для волнового пакета.

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин.— М. : Наука, 1977.— 272 с.
2. *Геворкян А. В.* Магнитоупругие волны Лява при наличии продольного магнитного поля.— Учен. зап. Ереван. ун-та, 1981, № 1, с. 137—140.
3. *Нелинейные* волны / Под ред. С. Лейбовича, А. Сибасса.— М. : Мир, 1977.— 319 с.
4. *Новацкий В.* Теория упругости.— М. : Мир, 1975.— 872 с.
5. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества.— М. : Наука, 1976.— 616 с.
6. *Bhattacharya S., Sengupta P. R.*. Surface waves in magnetoviscoelastic solids under initial stress.— Gerlands Beitr. Geophys. 1978, **6**, p. 489—499.
7. *De S. N., Sengupta P. R.* Surface waves in magnetoelastic initially stressed conducting media.— Pure and Appl. Geophys., 1971, **88**, p. 44—52.
8. *Kaliski S., Rogula D.* Rayleigh waves in a magnetic field in the case of a perfect conductor.— Proc. Vibr. Probl. Pol. Acad. Sci. 1960, N 5, p. 63—80.
9. *Murdoch A. I.* The propagation of surface wave in bodies with material boundaries.— J. Mech. and Phys. Solids, 1976, **24**, N 1, p. 137—146.

Институт механики
АН АрмССР

Поступила в редколлегию
28.12.81