УДК 534.26

В. И. Демчук, В. Н. Максимович, О. В. Магийович

РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ ГИДРОАКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ УПРУГИМ КОНЕЧНЫМ ЦИЛИНДРОМ

В работах [1, 3] достаточно полно освещены вопросы по изучению особенностей взаимодействия бесконечных упругих тел с акустической средой. Однако мало исследованы задачи, когда область, занимаемая упругим телом, является неканонической, так как при этом возникают трудности, связанные с необходимостью удовлетворения условиям контакта. В данной работе рассматривается метод точного решения задачи об установившихся вынужденных колебаниях упругого цилиндра конечной длины в жидкости. При решении задачи для давления в акустической среде использовано интегральное представление [4], а общее решение динамических уравнений теории упругости для конечного упругого цилиндра строится в виде рядов [2]. После удовлетворения условиям контакта задача сведена к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

Пусть в безграничной идеальной сжимаемой жидкости, характеризующейся скоростью звука c_0 и плотностью ρ_0, имеется сплошной упругий конечный цилиндр длиной $2H$ и радиусом a, перпендикулярно продольной оси которого падает плоская акустическая гармоническая во времени волна давления частоты Ω_0. Отнесем безграничную жидкую среду с цилиндром к цилиндрической системе координат (r_1, z_1, θ), в которой ось oz_1 совмещена с осью цилиндра и цилиндр занимает область $-H \leqslant z_1 \leqslant H$, $r_1 \geqslant a$. Полное гидродинамическое давление в жидкости P представим в виде суммы давлений падающей волны P^i и отраженных и переизлученных цилиндром волн P^e:

$$P = P^i + P^e. \tag{1}$$

Представим удовлетворяющее условию Зоммерфельда решение волнового уравнения Гельмгольца в виде [4]

$$P^e = \int\limits_{\Sigma} \left(P^e |_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial n_0} G - \frac{\partial}{\partial n} P^e |_{\Sigma} G \right) d\sigma, \tag{2}$$

где Σ — граничная поверхность цилиндра; $G = (4\pi r^*)^{-1} \exp(i\omega_0 r^*)$ — фундаментальное решение оператора Гельмгольца [4]; $r^{*2} = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \times \cos(\theta - \theta_0) + (z - z_0)^2$ — расстояние между точкой наблюдения $(r, z\ \theta)$ и точкой (r_0, z_0, θ_0) на поверхности Σ; $\frac{\partial}{\partial n_0}$ — производная по внешней нормали к поверхности Σ в точке (r_0, z_0, θ_0); $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по внешней нормали к поверхности Σ в точке (r, z, θ). Здесь введены безразмерные (отнесенные к радиусу a) координаты $r = \frac{r_1}{a}$; $z = \frac{z_1}{a}$; $h = \frac{H}{a}$. Используя для функции G представление [4]

$$G = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^\infty \lambda J_0(\lambda r^*) \frac{\exp(-|z - z_0| \varkappa)}{\varkappa} d\lambda \tag{3}$$

и применяя здесь теорему сложения для цилиндрических функций, получаем

$$G = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^\infty \varepsilon_k \cos k(\theta - \theta_0) \int\limits_0^\infty \lambda J_k(\lambda r_0) J_k(\lambda r) \frac{\exp(-|z - z_0| \varkappa)}{\varkappa} d\lambda,$$

$$\varkappa^2 = \lambda^2 - \omega_0^2, \quad \omega_0 = \frac{\Omega_0 a}{c_0}, \quad \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_k = 2, \quad k \geqslant 1. \tag{4}$$

Представим функцию P^e в виде ряда Фурье

$$P^e = \sum_{n=0}^\infty P_n^e(r, z) \cos n\theta. \tag{5}$$

Тогда, исходя из формулы (2) и используя выражение для G в виде (4), функцию $P_n^e(r, z)$ можем записать так:

$$P_n^e(r, z) = \int\limits_{-h}^{h} \left[P_n^e(r, z_0)\big|_{r=1} G_n^1 - \frac{\partial}{\partial z} P_n^e(r, z_0)\big|_{r=1} G_n \right] dz_0 +$$

$$+ 2\int\limits_0^1 \left[P_n^e(r_0, z)\big|_{z=h} G_n^2 - \frac{\partial}{\partial r} P_n^e(r_0, z)\big|_{j=h} G_n \right] dr_0, \qquad (6)$$

где

$$G_n = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \lambda J_n(\lambda r_0) J_n(\lambda r) \frac{\exp(-|z - z_0|\varkappa)}{\varkappa} d\lambda;$$

$$G_n^1 = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \lambda^2 J_n'(\lambda) J_n(\lambda r) \frac{\exp(-|z - z_0|\varkappa)}{\varkappa} d\lambda;$$

$$G_n^2 = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \lambda J_n(\lambda r_0) J_n(\lambda r) \exp(-|z - z_0|\varkappa)\, d\lambda.$$

Входящие в правую часть формулы (6) неизвестные функции представим в виде рядов

$$P_n^e(r, z_0)\big|_{r=1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{n\nu} \cos\beta_\nu z_0, \quad \frac{\partial}{\partial r_0} P_n^e(r, z_0)\big|_{r=1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{n\nu}^* \cos\beta_\nu z_0,$$

$$P_n^e(r_0, z)\big|_{z=h} = \sum_{j=0}^{\infty} g_{nj} J_n(\gamma_{jn} r), \frac{\partial}{\partial z_0} P_n^e(r_0, z)\big|_{z=h} = \sum_{j=0}^{\infty} g_{nj}^* J_n(\gamma_{jn} r). \qquad (7)$$

Здесь $f_{n\nu}$, $f_{n\nu}^*$, g_{nj}, g_{nj}^* — неизвестные коэффициенты. Подставляя разложения (7) в (6) и вычисляя возникающие при этом интегралы, для функции $P_n^e(r, z)$ получаем окончательное выражение

$$P_n^e(r, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{n\nu} \int\limits_0^\infty \lambda^2 J_n'(\lambda) J_n(\lambda r) \frac{\cos\beta_\nu z - (-1)^{\nu+1} \operatorname{ch}(\varkappa z)\exp(-\varkappa h)}{\varkappa^2 + \beta_\nu^2} d\lambda -$$

$$- \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{n\nu}^* \int\limits_0^\infty J_n(\lambda) J_n(\lambda r) \frac{\cos\beta_\nu z - (-1)^{\nu+1} \operatorname{ch}(\varkappa z)\exp(-\varkappa h)}{\varkappa^2 + \beta_\nu^2} d\lambda -$$

$$- \sum_{j=0}^{0} g_{nj} J_n(\gamma_{jn}) \int\limits_0^\infty \frac{\lambda^2}{\gamma_{jn}^2 - \lambda^2} J_n'(\lambda) J_n(\lambda r) \operatorname{ch}(\varkappa z)\exp(-\varkappa h)\, d\lambda -$$

$$- \sum_{j=0}^{\infty} g_{nj}^* J_n(\gamma_{jn}) \int\limits_0^\infty \frac{\lambda^2}{\varkappa(\gamma_{jn}^2 - \lambda^2)} J_n'(\lambda) J_n(\lambda r) \operatorname{ch}(\varkappa z)\exp(-\varkappa h)\, d\lambda. \qquad (8)$$

Функции $P_n^e|_\Sigma$ и $\frac{\partial}{\partial n} P_n^e|_\Sigma$, а значит, и введенные в рядах (7) неизвестные коэффициенты не являются независимыми. Следовательно, они удовлетворяют условиям, которые получим из формул, определяющих коэффициенты $f_{n\nu}$, g_{nj} через функции $P_n^e(z_0)$ и $P_n^e(r_0)$. Коэффициенты $f_{n\nu}$, g_{nj} и функции $P_n^e(z_0)$, $P_n^e(r_0)$ связаны зависимостями

$$f_{n\nu} = \frac{\varepsilon_n}{2h} \int\limits_{-h}^{h} P_n(z_0)\cos\beta_\nu z_0 dz_0, \quad g_{nj} = \varepsilon_{nj} \int\limits_0^1 r P_n^e(r_0) J_n(\gamma_{jn} r_0)\, dr_0, \qquad (9)$$

$$\beta_\nu = \frac{\nu\pi}{h}, \quad J_n'(\lambda_{jn}) = 0, \quad \varepsilon_{n0} = 2, \quad \varepsilon_{nj} = \frac{2\gamma_{jn}}{(\gamma_{jn}^2 - n^2) J_n^2(\gamma_{jn})}, \quad j \geqslant 1.$$

Подставляя сюда выражения для $P_n^e(r, z)$ (8), при $r = 1$ и $z = h$ соответственно получаем

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (f_{n\nu} F_{n\nu m} + f_{n\nu}^* F_{n\nu}^{*1}) + \sum_{j=0}^{\infty} (g_{nj} G_{nj\nu}^1 + g_{nj}^* G_{nj\nu}^{*1}) = 0,$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (f_{n\nu} F_{n\nu j}^2 + f_{n\nu}^* F_{n\nu j}^{*2}) + \sum_{j=0}^{\infty} (g_{nj} G_{njm}^2 + g_{nj}^* G_{nj}^{*2}) = 0, \qquad (10)$$

где $m = 0, 1, 2\ldots$;

$$F_{n\nu m}^1 = \int_0^{\infty} \lambda^2 J_n'(\lambda) J_n(\lambda) \frac{h(\varkappa^2 + \beta_\nu^2) - [1 - \exp(-2\varkappa h)]}{(\varkappa^2 + \beta_\nu^2)^2} d\lambda - \delta_{\nu m} \frac{2h}{\varepsilon_\nu};$$

$$F_{n\nu}^{*1} = \int_0^{\infty} \lambda J_n^2(\lambda) \frac{h(\varkappa^2 + \beta_\nu^2) - [1 - \exp(-2\varkappa h)]}{(\varkappa^2 + \beta_\nu^2)^2} d\lambda;$$

$$F_{n\nu j}^2 = \frac{(-1)^{\nu+1}}{2} J_n(\gamma_{\nu n}) \int_0^{\infty} \frac{\lambda^3 J_n'^2(\lambda)}{\gamma_{jn}^2 - n^2} \frac{1 - \exp(-2\varkappa h)}{\varkappa^2 - \beta_\nu^2} d\lambda;$$

$$G_{nj\nu}^1 = (-1)^j J_n(\gamma_{jn}) \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 J_n'(\lambda) J_n(\lambda) \varkappa}{\gamma_{jn}^2 - \lambda^2} \frac{1 - \exp(-2\varkappa h)}{\varkappa^2 + \beta_\nu^2} d\lambda;$$

$$F_{n\nu j}^{*2} = \frac{(-1)^{\nu}}{2} J_n(\gamma_{jn}) \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 J_n'(\lambda) J_n(\lambda)}{\gamma_{jn}^2 - \lambda^2} \frac{1 - \exp(-2\varkappa h)}{\varkappa^2 + \beta_\nu^2} d\lambda;$$

$$G_{nj\nu}^{*1} = (-1)^j J_n(\gamma_{jn}) \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 J_n'(\lambda) J_n(\lambda)}{\gamma_{jn}^2 - \lambda^2} \frac{1 - \exp(-2\varkappa h)}{\varkappa^2 + \beta_\nu^2} d\lambda;$$

$$G_{njm}^2 = -\frac{1}{2} J_n^2(\gamma_{jn}) \int_0^{\infty} \lambda [1 + \exp(-2\varkappa h)] \left(\frac{\lambda J_n'(\lambda)}{\gamma_{jn}^2 - \lambda^2} \right) d\lambda + \frac{\delta_{jm}}{\varepsilon_{jn}};$$

$$G_{nj}^{*2} = -\frac{1}{2} J_n^2(\gamma_{jn}) \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{\varkappa} [1 + \exp(-2\varkappa h)] \left(\frac{\lambda J_n'(\lambda)}{\gamma_{jn}^2 - \lambda^2} \right)^2 d\lambda;$$

$\delta_{\nu m}$ — дельта-функция Кронекера.

Для получения полной системы уравнений для определения неизвестных коэффициентов $f_{n\nu}$, $f_{n\nu}^*$, g_{nj}, g_{nj}^* (кроме условий (10)) необходимо удовлетворить условиям контакта на наружной поверхности цилиндра. Для этого рассмотрим задачу теории упругости для конечного цилиндра.

Использовав результаты работы [2], представим компоненты вектора смещений для конечного упругого цилиндра в виде

$$u_r = u_{r0} + \sum_{n=1}^{\infty} u_{rn}(r, z) \cos n\theta,$$

$$u_z = u_{z0} + \sum_{n=1}^{\infty} u_{zn}(r, z) \cos n\theta, \qquad (11)$$

$$u_\theta = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{\theta n}(r, z) \sin n\theta.$$

Здесь

$$u_{r0} = E_{00} J_1(\omega_1 r) + \sum_{\nu=1}^{\infty} [A_{0\nu} I_1(g_1 r) + E_{0\nu} I_2(g_2 r)] \cos \beta_\nu z - \sum_{j=1}^{\infty} \Big[C_{0j} \frac{\gamma_{j0}}{p_1} \operatorname{ch}(p_1 z) +$$

$$+ B_{0j} \frac{p_2}{\gamma_{j0}} \operatorname{ch}(p_2 z) \Big] J_1(\gamma_{j0} r);$$

$$u_{z0} = B_{00}\sin(\omega_1 z) - \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[A_{0\nu}\frac{\beta_\nu}{g_1} I_0(g_1 r) +\right.$$

$$\left. + E_{0\nu}\frac{g_2}{\beta_\nu} I_0(g_2 r)\right]\sin\beta_\nu z + \sum_{j=1}^{\infty}\left[C_{0j}\,\mathrm{sh}\,(p_1 z) + B_{0j}\,\mathrm{sh}\,(p_2 z)\right] J_0(\gamma_{j0} r);$$

$$u_{rn} = E_{n0}\frac{dJ_n(\omega_1 r)}{dr} + H_{n0}\frac{n}{r}J_n(\omega_2 r) +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[A_{n\nu}\frac{dI_n(g_1 r)}{dr} - E_{n\nu}\frac{dI_n(g_2 r)}{dr} + H_{n\nu} I_n(g_2 r)\right]\cos\beta_\nu z +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty}\frac{B_{nj}}{\gamma_{jn}^2}\left[p_2\frac{\mathrm{ch}\,(p_2 z)}{\mathrm{sh}\,(p_2 z)} - \frac{\gamma_{jn}^2 + p_2^2}{2p_1}\,\frac{\mathrm{ch}\,(p_1 z)}{\mathrm{sh}\,(p_1 z)}\right];$$

$$u_{zn} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[-A_{n\nu}\beta_\nu I_n(g_1 r) + E_{n\nu}\frac{g_2^2}{\beta_\nu} I_n(g_2 r)\right]\sin\beta_\nu z +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} B_{nj}\left[\frac{\mathrm{sh}\,(p_2 z)}{\mathrm{sh}\,(p_2 h)} - \frac{\gamma_{jn}^0 + p_2^2}{2\gamma_{jn}^2}\,\frac{\mathrm{sh}\,(p_1 z)}{\mathrm{sh}\,(p_1 h)}\right] J_n(\gamma_{jn} r);$$

$$u_{n\theta} = E_{n0}\frac{n}{r}J_n(\omega_1 r) + H_{n0}\frac{dJ_n(\omega_2 r)}{dr} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[A_{n\nu}\frac{n}{r}I_n(g_1 r) - E_{n\nu}\frac{n}{r}I_n(g_2 r) + H_{n\nu}\frac{dI_n(g_2 r)}{dr}\right]\cos\beta_\nu z +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty}\frac{B_{nj}}{\gamma_{jn}^2}\left[p_2\frac{\mathrm{ch}\,(p_2 z)}{\mathrm{sh}\,(p_2 h)} - \frac{\gamma_{jn}^2 + p_2^2}{2p_1}\,\frac{\mathrm{ch}\,(p_1 z)}{\mathrm{sh}\,(p_1 h)}\right]\frac{n}{r}J_n(\gamma_{jn} r);$$

$$C_{0j} = -B_{0j}\frac{\gamma_{j0}^2 + p_2}{2\gamma_{j0}^2}\,\frac{\mathrm{sh}\,(p_2 h)}{\mathrm{sh}\,(p_1 h)}, \quad A_{0\nu} = -E_{0\nu}\frac{\beta_\nu^2 + g_2^2}{2\beta_\nu^2}\,\frac{I_1(g_2)}{I_1(g_1)};$$

$$A_{n\nu} = E_{n\nu}\frac{\beta_\nu^2 + g_2^2}{2\beta_\nu^2}\,\frac{g_2 I_n'(g_2)}{g_1 I_n'(g_1)} - H_{n\nu}\frac{n I_n(g_2)}{2g_1 I_n(g_1)};$$

$I_n(gr)$ — модифицированная функция Бесселя. В выражениях (11) $E_{n\nu}$, $H_{n\nu}$, B_{nj} — произвольные неизвестные постоянные и, кроме того, $p_1^2 = \gamma_{jn}^2 - \omega_1^2$, $p_2^2 = \gamma_{jn}^2 - \omega_2^2$, $g_1^2 = \beta_\nu^2 - \omega_1^2$, $g_2^2 = \beta_\nu^2 - \omega_2^2$, $\omega_1 = \Omega_0 a c_1^{-1}$, $\omega_2 = \Omega_0 a c_2^{-1}$, c_1, c_2 — скорости продольных и поперечных волн.

Приравнивая скорости движения и напряжения на поверхности цилиндра (касательные напряжения в цилиндре на Σ равны нулю) скоростям движения и давлению в жидкости, получаем функциональные уравнения для определения введенных выше неизвестных коэффициентов. Раскладывая левые и правые части данных функциональных уравнений в ряды Фурье (при $r = 1$, $|z| < h$) и Фурье — Бесселя (при $z = h$, $0 < r < 1$) и приравнивая соответствующие коэффициенты этих рядов, получаем линейные алгебраические уравнения

$$\begin{gathered}
E_{n\nu}a_{n\nu}^1 + H_{n\nu}c_{n\nu}^1 + \sum_{j=0}^{\infty} B_{nj}b_{nj\nu}^1 + f_{n\nu}d_{n\nu} = s_{n\nu},\\
E_{n\nu}a_{n\nu}^2 + H_{n\nu}c_{n\nu}^2 + \sum_{j=0}^{\infty} B_{nj}b_{nj\nu}^2 = 0,\\
B_{nj}b_{nj}^3 + \sum_{\nu=0}^{\infty}(E_{n\nu}a_{n\nu j}^3 + H_{n\nu}c_{n\nu j}^3) + g_{nj}e_{nj} = s_{nj}, \qquad (12)\\
E_{n\nu}b_{n\nu}^4 + H_{n\nu}c_{n\nu}^4 + f_{n\nu}^* d_{n\nu}^* = s_{n\nu}^*,\\
B_{nj}b_{nj}^4 + g_{nj}^* d_{nj}^* = 0.
\end{gathered}$$

Коэффициенты $a_{n\nu}$, $a_{n\nu j}$, b_{nj}, $b_{nj\nu}$ c_{nj}, $d_{n\nu}$, e_{nj} ввиду их громоздкости здесь выписывать не будем (выражения для них можно получить, используя результаты работы [2]). Свободные члены (s_{nj}, $s_{n\nu}$, $\overset{*}{s}_{n\nu}$) в этих уравнениях являются коэффициентами разложения в ряды Фурье и Фурье — Бесселя падающей плоской волны в областях $r = 1$, $|z| < h$ и $z = h$, $r < 1$.

Уравнения (10) вместе с уравнениями (12) составляют полную систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов, через которые выражается решение рассматриваемой задачи. Используя результаты работы [2], можно заключить, что для неизвестных коэффициентов бесконечной системы справедливы асимптотические равенства

$$\lim_{\nu\to\infty} E_{n\nu} g_2 I_n'(g_2) = \lim_{j\to\infty} B_{nj} \frac{J_n(\gamma_{jn})}{h} = a_0, \quad \lim_{\nu\to\infty} H_{n\nu} = \text{const}. \tag{13}$$

Условия (13) дают возможность аналогично работе [2] построить эффективный алгоритм решения бесконечной системы (10), (12).

1. *Григолюк Э. И., Горшков А. Г.* Нестационарная гидроупругость оболочек.— Л. : Судостроение, 1974.— 207 с.
2. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах.— Киев : Наук. думка, 1981.— 284 с.
3. *Мэтсавэзр Я. А., Векслер Н. Д., Стулов Я. С.* Дифракция акустических импульсов на упругих телах.— М. : Наука, 1979.— 226 с.
4. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.— М. : Наука, 1977.— 735 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
26.02.82

УДК 517.96

В. С. Заячковский

ОДИН КРИТЕРИЙ ФАКТОРИЗАЦИИ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ С НЕОБРАТИМЫМ СТАРШИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Пусть задан регулярный ($\det A(z) \not\equiv 0$) операторный пучок $A(z) = z^n A_0 + z^{n-1} A_1 + \ldots + A_n$, где A_i — линейные операторы, действующие в линейном пространстве E, $\dim E = d$. Операторный пучок $B(z) = z^m 1_E + z^{m-1} B_1 + \ldots + B_m$, $m \leqslant n$, называется левым делителем пучка $A(z)$, если существует пучок $C(z)$ такой, что $A(z) = B(z) C(z)$. Делитель называется правильным, а факторизация спектральной, если спектры пучков $B(z)$ и $C(z)$ не пересекаются: $\sigma(B) \cap \sigma(C) = \varnothing$.

Задача факторизации операторных пучков рассматривалась обычно в предположении обратимости оператора A_0 [1 — 3, 5]. В общем случае в работе [4] был получен следующий результат.

Теорема. Регулярный пучок $A(z)$ имеет правильный левый делитель $B(z)$, спектр которого совпадает с заданной частью спектра σ пучка $A(z)$ тогда и только тогда, когда: а) суммарная кратность собственных значений $z \in \sigma$ равна md; б) $\operatorname{Im} S_0^{(nd,\, m)}(A, \sigma) = \operatorname{Im} S_0^{(nd,\, m+1)}$; в) оператор $S_0^{(nd,\, m)}(A, \sigma)$ обратим слева; здесь $S_r^{(p,\, q)}(A, \sigma)$ — ганкелева оператор-матрица вида

$$S_r^{(p,q)}(A, \sigma) = \| s_{r+i+j-1} \|; \quad i = \overline{1, p}, \ j = \overline{1, q}, \ r = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

а $s_j = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\Gamma z^j A^{-1}(z)\, dz$, $j = 0, 1, \ldots$; Γ — положительно ориентированный замкнутый спрямляемый контур, внутренность которого содержит σ и не содержит точек $\sigma(A) \setminus \sigma$.