ствие этого и результата (8) получаем окончательно оценку

$$\iint\limits_{D_T} \left\{ \varepsilon^2 \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 \right] + R^2 \right\} dD_T \leqslant C\varepsilon^{4N+2}, \tag{16}$$

которая и доказывает асимптотический характер разложения (3).

Сформулируем результат настоящей работы.

**Теорема.** Пусть выполняются условия 1) — 3). Тогда решение задачи (1), (2) допускает асимптотическое разложение (3), где $v_i\ (x,\ t)$ $(i = 0, \ldots$ $\ldots, N)$ определяются из уравнений (4); функции $\Pi_i\ (\xi,\ t)$, $Q_i\ (\eta,\ t)$ — суть функции типа пограничного слоя в окрестности границ $x = 0$ и $x = l$ соответственно и являются решениями задач (5), (6); $R\ (x,\ t,\ \varepsilon)$ удовлетворяет неравенству (16).

Если условие 3) не выполняется, то задача не поддается исследованию методом програничного слоя. Возможно, что в этом случае асимптотика может быть построена методом подъема в пространство большей размерности [6], методом согласования асимптотических разложений [4] или методом канонического оператора [8] при соответствующем развитии этих методов.


1. *Бутузов В. Ф.* Угловой погранслой в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений.— Мат. сб., 1977, **104**, № 3, с. 460—485.
2. *Валиев М. А.* Асимптотическое решение задачи Коши для гиперболического уравнения с параметром.— Тр. Моск. энергет. ин-та, 1972, вып. 146, с. 2—12.
3. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.— Успехи мат. наук, 1957, **12**, № 5, с. 3—122.
4. *Ильин А. М., Леликова Е. Ф.* Метод сращивания асимптотических разложений для уравнения $\varepsilon\Delta u - a\,(x,\ y)\ u_y = f\,(x,\ y)$ в прямоугольнике.— Мат. сб., 1975, **96**, № 4, с. 568—583.
5. *Курант Р.* Уравнения с частными производными.— М. : Мир, 1964.— 840 с.
6. *Ломов С. А.* Формализм неклассической теории возмущений.— Докл. АН СССР, 1973, **212**, № 1, с. 33—36.
7. *Маслов В. П.* Переход при $h \to 0$ уравнения Гейзенберга в уравнение движения одноатомного идеального газа.— Теорет. и мат. физика, 1969, **1**, № 31, с. 378—383.
8. *Мищенко А. С., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е.* Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора.— М. : Наука, 1978.— 352 с.
9. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Мир, 1970.— 720 с.
10. *Цимбал В. М.* Задача Коші для гіперболічного рівняння з малим параметром.— В кн.: Питання якісної теорії диференціальних рівнянь та їх застосування. К. : Наук. думка, 1978, с. 63—64.
11. *Цимбал В. М.* Задача Коші для сингулярно збуреного гіперболічного рівняння.— Вісн. Льв. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1981, вип. 18, с. 11—14.
12. *Шафиев Н. К.* Асимптотика по малому параметру решения смешанной задачи для одного гиперболического уравнения.— Докл. АН СССР, 1980, **252**, № 5, с. 1074—1078.


Львовский университет Получено 22.06.81

УДК 519.21

Р. В. Бобрик

## О ПЛОТНОСТИ МЕРЫ, СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ РЕШЕНИЮ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ СО СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

В настоящей статье рассматриваются вопросы абсолютной непрерывности меры, порожденной решением характеристической задачи для нелинейного дифференциального уравнения гиперболического типа с гауссовым возмущением относительно некоторой гауссовой меры и вычисляется соответствующая плотность.

В области $D = \{(x,\ y):\ 0 \leqslant x \leqslant a_1,\ 0 \leqslant y \leqslant a_2\}$ рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^2 u\,(x,\ y)}{\partial x \partial y} + f\,(x,\ y,\ u\,(x,\ y)) = \xi\,(x,\ y) + b\,(x,\ y),$$
$$u\,(x,\ 0) = \varphi_1\,(x), \quad u\,(0,\ y) = \varphi_2\,(y), \quad \varphi_1\,(0) = \varphi_2\,(0) = 0, \tag{1}$$

где $\xi(x, y)$ — гауссово поле с нулевым средним и корреляционной функцией $K(x, y)$, а функции $f(x, y, u)$, $b(x, y)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$ являются некоторыми неслучайными функциями. Это уравнение эквивалентно интегральному уравнению

$$u(x, y) + \int_0^x \int_0^y f(s_1, s_2, u(s_1, s_2))\, ds_1 ds_2 = \eta(x, y), \tag{2}$$

$$\eta(x, y) = \int_0^x \int_0^y \xi(s_1, s_2)\, ds_1 ds_2 + \gamma(x, y),$$

$$\gamma(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) + \int_0^x \int_0^y b(s_1, s_2)\, ds_1 ds_2.$$

Введем функцию $K^{(1/2)}(x, y)$ из соотношения

$$K(x_1, x_2, y_1, y_2) = \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} K^{(1/2)}(x_1, x_2, s_1, s_2)\, K^{(1/2)}(s_1, s_2, y_1, y_2)\, ds_1 ds_2$$

и предположим, что

$$\int_0^{a_1} \int_0^{a_2} \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} (K^{(1/2)}(s_1, s_2, s_3, s_4))^2\, ds_1 ds_2 ds_3 ds_4 < \infty. \tag{3}$$

На пространстве $L_2(D)$, где обычным способом введены скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ и норма $\|\cdot\|$, определим ядерный интегральный оператор $K$ с ядром $K(x_1, x_2, y_1, y_2)$ и интегральный оператор Гильберта — Шмидта $K^{1/2}$ с ядром $K^{1/2}(x_1, x_2, y_1, y_2)$. Предположим, что функция $f(x, y, u)$ непрерывна по совокупности переменных и имеет ограниченную производную $\frac{\partial f(x, y, u)}{\partial u}$, функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$ дифференцируемы, а $b(x, y)$ непрерывна в $D$. Эти условия, а также условие (3) обеспечивают существование и единственность почти, наверное, решения уравнения (1). Вероятностную меру, соответствующую этому решению, обозначим через $\mu_1$, а через $\mu_2$ — вероятностную меру, соответствующую случайному полю $\eta(x, y)$, которое в силу гауссовости $\xi(x, y)$ является также гауссовым.

Для нахождения условий эквивалентности мер $\mu_1$ и $\mu_2$ и вида плотности применим теорему Рамера [5], которую для наших целей можно сформулировать следующим образом [3].

**Теорема 1.** Пусть в гильбертовом пространстве $H$ заданы две меры $\mu$ и $\nu$, где $\mu$ гауссова со средним нуль и корреляционным оператором $R$, а $\nu(A) = \mu(T^{-1}A)$, где $Tx = x + R^{1/2}\lambda(x)$, $R = (R^{1/2})(R^{1/2})^*$. Если преобразование $T(\cdot)$ является взаимно однозначным и непрерывным, функция $\lambda(x)$ дифференцируема вдоль пространства $R^{1/2}H$, а оператор $R^{1/2}\lambda'(x)$ является оператором Гильберта — Шмидта, для оператора $I + R^{1/2}\lambda'(x)$ существует обратный, тогда $\nu \sim \mu$ и

$$\frac{d\mu}{d\nu}(x) = |\widetilde{\det}(I + R^{1/2}\lambda'(x))| \exp\left\{-\beta(\lambda(x), R^{-1/2}x) - \frac{1}{2}\|\lambda(x)\|^2\right\}, \tag{4}$$

где $\beta(\cdot, \cdot)$ — аналог стохастического интеграла [3]; $\widetilde{\det}(I + R^{1/2}\lambda'(x))$ — регуляризованный определитель оператора $I + R^{1/2}\lambda'(x)$.

Предположим, что в уравнении (1) $b(x, y) \equiv \varphi_1(x) \equiv \varphi_2(y) \equiv 0$. Тогда случайное поле $\eta(x, y)$ имеет нулевое математическое ожидание и корреляционную функцию

$$R(x_1, x_2, y_1, y_2) = \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{y_1} \int_0^{y_2} K(s_1, s_2, s_3, s_4)\, ds_1 \ldots ds_4,$$

а функция $R^{(1/2)}(x_1, x_2, y_1, y_2) = \int\limits_0^{y_1}\int\limits_0^{y_2} K^{(1/2)}(x_1, x_2, s_1, s_2)\,ds_1 ds_2$ в силу условия (3) является ядром Гильберта — Шмидта.

Уравнение (2) можно представить в виде

$$u(x, y) + \int\limits_0^{a_1}\int\limits_0^{a_2} R^{(1/2)}(x, y, s_1, s_2)\,g(s_1, s_2, u(s_1, s_2))\,ds_1 ds_2 = \eta(x, y),$$

если предположить, что уравнение

$$\int\limits_0^{a_1}\int\limits_0^{a_2} R^{(1/2)}(x, y, s_1, s_2)\,g(s_1, s_2, u(s_1, s_2))\,ds_1 ds_2 = \int\limits_0^{x}\int\limits_0^{y} f(s_1, s_2, u(s_1, s_2))\,ds_1 ds_2$$

имеет решение. Для этого достаточно, чтобы имело решение уравнение

$$\int\limits_0^{a_1}\int\limits_0^{a_2} K^{(1/2)}(x, y, s_1, s_2)\,g(s_1, s_2, u(s_1, s_2))\,ds_1 ds_2 = f(x, y, u(x, y)),$$

В силу ранее сделанных предположений относительно функции $f(x, y, u)$ оператор

$$(\dot I + R^{1/2} g'_u)\,u(x, y) \equiv u(x, y) + \int\limits_0^{x}\int\limits_0^{y} \frac{\partial f(s_1, s_2, u(s_1, s_2))}{\partial u}\,ds_1 ds_2$$

имеет ограниченный обратный и $\widetilde{\det}(\dot I + R^{1/2} g'_u) = 1$. Поэтому при $\gamma \equiv 0$ из теоремы 1 получаем эквивалентность мер $\mu_1$, $\mu_2$ и

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(z) = \exp\left\{-\int\limits_0^{a_1}\int\limits_0^{a_2} \langle K^{-1/2} f(x, y, z), w(dx, dy)\rangle - \frac{1}{2}\|K^{-1/2} f(x, y, z)\|^2\right\},$$

где $w(x, y)$ — винеровское поле, которое связано с полем $\xi(x, y)$ соотношением

$$\xi(x, y) = \int\limits_0^{a_1}\int\limits_0^{a_2} K^{(1/2)}(x, y, s_1, s_2)\,dw(s_1, s_2),$$

а $\int\limits_0^{a_1}\int\limits_0^{a_2} \langle \cdot, \cdot \rangle$ означает расширенный стохастический интеграл [2].

Если $\gamma(x, y) \not\equiv 0$, то используя теорему Гренандера об абсолютной непрерывности при сдвигах гауссовых мер в гильбертовом пространстве, получаем следующий результат.

**Теорема 2.** Пусть выполняются ранее сделанные предположения на известные параметры уравнения (1). Тогда, если интегральное уравнение (4) имеет решение и $R^{-1/2}\gamma \in L_2(D)$, то меры $\mu_1$, $\mu_2$ эквивалентны и плотность меры $\mu_2$ относительно меры $\mu_1$ имеет вид

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(z) = \exp\left\{-\int\limits_0^{a_1}\int\limits_0^{a_2} \langle K^{-1/2} f(x, y, z), w(dx, dy)\rangle - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\|K^{-1/2} f(x, y, z)\|^2 - (R^{-1/2}\gamma, R^{-1/2} z) + \frac{1}{2}\|R^{-1/2}\gamma\|^2\right\}. \qquad (5)$$

Формула (5) позволяет вычисление среднего значения функционала от решения уравнения (1) свести к вычислению среднего значения некоторого функционала по гауссовой мере, соответствующей случайному полю $\eta(x, y)$, где можно применить различные приближенные методы [4].


1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов.— М. : Наука, 1971.— 664 с.
2. *Далецкий Ю. Л., Парамонова С. И.* Интегрирование по частям и мерам в функциональном пространстве и некоторые применения.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1977, вып. 17, с. 51—61.

3. *Сохадзе Г. А., Шаташвили А. Д.* Об эквивалентности гауссовых мер при нелинейных преобразованиях в гильбертовом пространстве.— Докл. АН СССР, 1978, **240**, № 4, с. 790—793.
4. *Янович Л. А.* Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам.— Минск : Наука и техника, 1976.— 383 с.
5. *Ramer R.* On nonlinear transformations of Gaussian measures.— J. Funct. Anal., 1974, **15**, N 2, p. 166—187.

Институт прикладных проблем
механики и математики
АН УССР, Львов

Получено 28.12.81

УДК 517.948

М. К. Бугир

## ПРИЗНАКИ УСТОЙЧИВОСТИ И ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В различных приложениях к физике и механике часто приходится исследовать на устойчивость решения уравнений. Оказывается [9], что устойчивость решения линейного уравнения первого порядка

$$x' = B(t)\,x, \tag{1}$$

удовлетворяющего условию

$$x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

где

$$t \in j = [a, \omega), \quad \omega \leqslant \infty; \quad x_0, \quad x \in H, \quad B(t) \in L(H, H),$$

равносильна ограниченности всех решений этого уравнения. Здесь через $H$ обозначено гильбертово пространство, через $L\ (H,\ H)$ — пространство линейных операторов, действующих из $H$ в $H$.

Для уравнения второго порядка устойчивость решений эквивалентна ограниченности решений и их первых производных. При этом исследование уравнения

$$y'' + A(t)\,y = 0,$$

$$y(t), \quad y''(t) \in H, \quad A(t) \in L(H, H), \quad t \in j$$

заменой $y = x_1$, $y' = x_2$ можно свести к исследованию уравнения (1) в сдвоенном гильбертовом пространстве $H^2 = H \oplus H$ с оператором

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -A(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Для дальнейших результатов нам будет необходима лемма сравнения [9].

**Лемма.** Пусть имеем два уравнения

$$y'' + A(t)\,y = 0, \tag{3}$$

$$u'' + A(t)\,u = C(t)\,u, \tag{4}$$

$C\ (t) \in L\ (H,\ H)$. Кроме того, пусть выполнено условие

$$\int_{t_0}^{\infty} \| C(t) \|\, dt < \infty. \tag{5}$$

Тогда для ограниченности всех решений и их первых производных уравнения (3) необходимо и достаточно ограниченности решений и их первых производных уравнения (4).

Рассмотрим произвольную дважды непрерывно дифференцируемую положительную функцию $a\ (t)$ на интервале $j$. Построим выражение

$$\eta(t) = \frac{1}{4}\,\frac{a''(t)}{a(t)} - \frac{5}{16}\left[\frac{a'(t)}{a(t)}\right]^2, \tag{6}$$