4. *Доброхотова М. А.* Об ограниченности решений линейных дифференциальных уравнений третьего порядка.— Учен. зап. Яросл. пед. ин-та. Сер. мат., 1960, 34, с. 17—34.
5. *Костенко Е. С.* Интегрирование в замкнутой форме и асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка.— Дифференц. уравнения, 1974, 10, № 10, с. 1900—1904.
6. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа.— М. : Наука, 1965.
7. *Матковский А. П., Мухачев В. А.* Фундаментальные системы для дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами.— Мат. заметки, 1970, 8, № 6, с. 71—78.
8. *Павлюк И. А., Бурим В. М., Пасенченко Ю. А.* Приближенно-аналитические решения неавтономных дифференциальных уравнений.— Киев : Вища школа, 1980.— 232 с.
9. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Мир, 1964.— 477 с.

Тернопольский финансово-экономический институт

Получено 17.12.81

УДК 517.98

Г. М. Кесельман

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ С НЕКЛАССИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

При изучении некоторых вопросов гидроупругости возникают задачи, в которых граничные условия содержат производные более высокого порядка, чем дифференциальные уравнения [3]. В настоящей работе в абстрактной форме рассмотрен один естественный подход, при котором возникают краевые задачи с нетрадиционными граничными операторами. В частности, для дифференциальных операторов этот подход позволяет рассматривать задачи, содержащие в краевых условиях производные более высокого порядка, чем в уравнении.

Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, A — замкнутый плотно заданный линейный оператор, действующий в $\mathfrak{H}$ и обладающий тем свойством, что сопряженный к нему оператор $A_0 \overset{\text{df}}{=} A^*$ является симметрическим: $A_0 \subset A$; $D(A)$ — область определения оператора A. В области $D(A)$ введем скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_A$, определяемое нормой графика оператора A:

$$(f, g)_A = (f, g) + (Af, Ag). \tag{1}$$

Так как оператор A замкнут, то область $D(A)$ замкнута относительно метрики, определяемой нормой (1). Поэтому $D(A)$ со скалярным произведением (1) образует гильбертово пространство, которое обозначим $D[A]$. Очевидно, $D(A_0)$ образует в $D[A]$ замкнутое подпространство. Пусть

$$U = D[A] \ominus D(A_0)$$

и P — оператор ортогонального проектирования в $D[A]$ на U. Обозначим $B = A|_{D(A^2)}$ — сужение оператора A на область $D(B) = D(A^2)$, $B_0 = A|_{D(A_0A)}$. Оператор B можно рассматривать как в $\mathfrak{H}$, так и в $D[A]$.

Используя свойства операторов $(1 + T^*T)^{-1}$, $T(1 + T^*T)^{-1}$ (см., например, работу [4]), где T — произвольный замкнутый плотно заданный линейный оператор, можно доказать справедливость следующих утверждений.

Лемма 1. Множество $D(B_0) = D(A_0A)$ является плотным в пространстве $D[A]$.

Лемма 2. Оператор B, рассматриваемый как оператор, действующий в пространстве $D[A]$, является замкнутым.

Лемма 3. Пусть T — замкнутый плотно заданный в $\mathfrak{H}$ оператор и $C = T(1 + T^*T)^{-1}$. Тогда $C^* = T^*(1 + TT^*)^{-1}$.

Лемма 4. $D(B_0^{\circledast}) \subset D(B)$, где $B_0^{\circledast}$ — оператор, сопряженный B_0 в пространстве $D[A]$.

Опишем оператор $B^{\circledast}$.

Теорема 1. Область определения оператора $B^{\circledast}$ определяется равенством

$$D(B^{\circledast}) = D(B_0) = \{g \in D(B) : PAg = 0\}$$
$$\text{и } \forall g \in D(B^{\circledast}) \quad B^{\circledast} g = Ag - APg. \tag{2}$$

Доказательство. Так как $B_0 \subset B$, то $B^{\circledast} \subset B_0^{\circledast}$, и в силу леммы 4 $D(B^{\circledast}) \subset D(B)$. Пусть $f \in D(B)$, $g \in D(B^{\circledast})$.

Тогда

$$(Bf, g)_A = (Af, g)_A = (Af, g) + (A^2 f, Ag) =$$
$$= (A(1-P)f, g) + (APf, g) + (A^2 f, (1-P)Ag) + (A^2 f, PAg) =$$
$$= ((1-P)f, Ag) + (APf, g) + (Af, A(1-P)Ag) + (A^2 f, PAg) =$$
$$= (f, Ag) - (Pf, Ag) + (APf, g) + (Af, A^2 g) - (Af, APAg) + (A^2 f, PAg). \tag{3}$$

Так как

$$(f, Ag) + (Af, A^2 g) = (f, Ag)_A,$$
$$(Af, APAg) - (A^2 f, PAg) = (Af, APAg)_A$$

(при этом использовано равенство $A^2 P = -P$ (см. [2])), $(APf, g) - (Pf, Ag) = (APf, g)_A$, то равенство (3) примет вид

$$(Bf, g)_A = (f, Ag)_A + (APf, g)_A - (Af, APAg)_A. \tag{4}$$

Как известно [2], сужение оператора A на $PD(A) = U$ является унитарным оператором в метрике $D[A]$, квадрат которого равен $-I$, поэтому $(A/U)^{\circledast} = -A/U$. Следовательно,

$$(APf, g)_A = (APf, Pg)_A = -(Pf, APg)_A = -(f, APg)_A$$

и равенство (4) можно записать так:

$$(Bf, g)_A = (f, Ag)_A - (f, APg)_A - (Af, APAg)_A. \tag{5}$$

Пусть f — произвольный элемент, принадлежащий $D(B_0) \subset D(B)$. Тогда

$$(Af, APAg)_A = 0, \quad (Bf, g)_A = (f, (A - AP)g)_A.$$

В силу леммы 1 $D(B_0)$ плотно в $D[A]$, поэтому из последнего равенства ледует, что $B^{\circledast} g = Ag - APg$ и в силу равенства (5) $\forall f \in D(B)$

$$(Af, APAg)_A = 0.$$

Так как $U \subset AD(B)$, то $APAg = 0$, что равносильно равенству $PAg = 0$.

Таким образом, доказано включение $D(B^{\circledast}) \subset D(B_0)$. Справедливость обратного включения проверяется аналогично.

Замечание. Пусть A — линейный оператор, определенный в пространстве $L_2[0, 1]$ равенством $Ay = (-i)^n y^{(n)}$. Тогда равенство $Py = 0$ эквивалентно системе равенств

$$y^{(k)}(0) = 0, \quad y^{(k)}(1) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

В силу теоремы 1 краевые условия для оператора $B^{\circledast}$ имеют вид

$$y^{(n+k)}(0) = 0, \quad y^{(n+k)}(1) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

в то время как $B^{\circledast} y$ строится из производных, порядок которых не превышает n.

Предположим, что оператор A_0 имеет самосопряженные расширения. Каждое самосопряженное расширение A_1 оператора A_0 характеризуется областью определения

$$D(A_1) = D(A_0) \oplus U_1,$$

где $U_1 \subset U$; $AU_1 = U \ominus U_1$. Здесь ортогональное дополнение следует понимать в метрике пространства $D[A]$. Пусть P_1 — оператор ортогонального проектирования на подпространство AU_1 в пространстве $D[A]$. Тогда

$$D(A_1) = \{f \in D(A) : P_1 f = 0\}.$$

Рассмотрим оператор $B_1 : D[A] \to D[A]$, который определяется следующим образом:

$$D(B_1) = \{f \in D(B) : P_1 Af = 0\}$$

$$\text{и } \forall f \in D(B_1) \quad B_1 f = Af - \frac{1}{2} APf.$$

Теорема 2. Оператор B_1 является самосопряженным в пространстве $D[A] : B_1^{\circledast} = B_1$.

Доказательство. Очевидно, $B_1 + \frac{1}{2} AP \supset B_0$. Следовательно, $\left(B_1 + \frac{1}{2} AP\right)^{\circledast} \subset B_0^{\circledast}$ и в силу леммы 4 $D(B_1^{\circledast}) \subset D(B)$. Пусть $f \in D(B_1)$, $g \in D(B_1^{\circledast})$. Тогда, учитывая равенство $(AP)^{\circledast} = -AP$, как при доказательстве теоремы 1 получаем

$$B_1^{\circledast} g = Ag - \frac{1}{2} APg$$

и

$$(Af,\ APAg)_A = 0. \tag{6}$$

Пусть $P_2 = P - P_1$, P_2 — оператор ортогонального проектирования в $D[A]$ на подпространство U_1. Как известно [2], оператор A отображает U_1 на U_2 и U_2 на U_1. Это позволяет преобразовать равенство (6) к виду

$$0 = (Af,\ APAg)_A = (P_1Af + P_2Af,\ A(P_1 + P_2)Ag)_A =$$
$$= (P_2Af,\ AP_1Ag + AP_2Ag)_A = (P_2Af,\ AP_1Ag)_A.$$

Так как $U_1 \subset AD(B_1)$, то отсюда следует, что $AP_1Ag = 0$, а последнее возможно только при $P_1Ag = 0$.

Таким образом, доказано, что $B_1^{\circledast} \subset B_1$. Легко проверить справедливость обратного включения.

С помощью полученных теорем можно решать некоторые задачи спектральной теории для операторов с нетрадиционными краевыми условиями. Для иллюстрации этого рассмотрим в пространстве $L_2[0, 1]$ самосопряженный оператор A_1, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y) = -y'' + q(x)y \tag{7}$$

и краевыми условиями

$$\alpha_{i1}y'(0) + \alpha_{i0}y(0) + \beta_{i1}y'(1) + \beta_{i0}y(1) = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Для простоты предположим, что функция $q(x)$ непрерывно дифференцируема.

Пусть T — линейный оператор, определяемый в $L_2[0, 1]$ дифференциальным выражением (7) и краевыми условиями

$$\alpha_{i1}y'''(0) + \alpha_{i0}y''(0) + \beta_{i1}y'''(1) + \beta_{i0}y''(1) +$$
$$+ \gamma_{i1}y'(0) + \gamma_{i0}y(0) + \delta_{i1}y'(1) + \delta_{i0}y(1) = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Здесь γ_{ij}, δ_{ij} — произвольные комплексные числа.

Теорема 3. Множество корневых векторов оператора T является полным в $L_2[0, 1]$.

Доказательство. В силу теоремы 2 оператор B_1, определенный в пространстве $D[A]$ выражением

$$-y'' + q(x)y - \frac{1}{2} APy$$

и краевыми условиями

$$\alpha_{i1}(-y'''(0)+q'(0)y(0)+q(0)y'(0))+\alpha_{i0}(-y''(0)+q(0)y(0))+$$
$$+\beta_{i1}(-y'''(1)+q'(1)y(1)+q(1)y'(1))+\beta_{i0}(-y''(1)+$$
$$+q(1)y(1))=0\quad(i=1,\ 2),$$

является самосопряженным. Легко видеть, что он дискретный. Кроме того, в пространстве $D[A]$ оператор AP и функционалы $y(0)$, $y(1)$, $y'(0)$, $y'(1)$ ограничены. Поэтому, как показано в работе [1], система корневых векторов оператора T полна в $D[A]$. Так как $\|y\|\leqslant\|y\|_A$ и $D[A]$ плотно в $\mathfrak{H}$, то эта система будет полной и в $\mathfrak{H}=L_2[0,\ 1]$.

1. *Кесельман Г. М.* О слабом возмущении области определения самосопряженного оператора.— Вестн. Льв. политехн. ин-та, 1981, № 150, с. 45—46.
2. *Лянце В. Э.* О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве. — Теория функций и функцион. анализ, 1972, вып. 16, с. 165—186.
3. *Підстригач Я. С.* Про один випадок ускладнення граничних умов в задачах гідропружності.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1975, № 3, с. 235—238.
4. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу.— М. : Мир, 1979.— 592 с.

Львовский политехнический
институт

Получено 03.03.82

УДК 513.88

В. Э. Лянце, О. Г. Сторож

О РЕЗОЛЬВЕНТЕ ВОЗМУЩЕННОГО ОПЕРАТОРА

В настоящей статье под оператором понимается линейное отображение в гильбертовом пространстве и применяются следующие обозначения: $D(T)$, $R(T)$, $Z(T)$ — область определения, область значений и ядро оператора T; $\mathfrak{S}(H_1,\ H_2)$ — множество линейных, замкнутых, плотно определенных операторов $H_1\to H_2$; $\mathcal{B}(H_1,\ H_2)=\{T\in\mathfrak{S}(H_1,\ H_2):D(T)=H_1\}$; $\mathcal{B}_\infty(H_1,\ H_2)$ — множество компактных операторов из $\mathcal{B}(H_1,\ H_2)$; $\mathfrak{S}(H)=\mathfrak{S}(H,\ H)$; $\mathcal{B}(H)=\mathcal{B}(H,\ H)$; $\mathcal{B}_\infty(H)=\mathcal{B}_\infty(H,\ H)$; $D[T]$ — гильбертово пространство, совпадающее как множество $D(T)$ и снабженное скалярным произведением $(\cdot|\cdot)_T$ графика замкнутого оператора T; T^* — оператор, сопряженный к T; 1_H — единичный оператор в пространстве H.

Пусть H, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ — фиксированные комплексные гильбертовы пространства; L, $L_0\in\mathfrak{S}(H)$, $L_0\subset L$, $W_i\in\mathcal{B}(D[L],\ \mathfrak{H}_i)$, $i=1,\ 2$, $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_1\oplus\mathfrak{H}_2$, $W=W_1\oplus W_2$, $M=L_0^*$, $M_0=L^*$. Предположим, что $(\mathfrak{H},\ W)$ является краевой парой для $(L,\ L_0)$, т. е. что $R(W)=\mathfrak{H}$, $Z(W)=D(L_0)$. Известно [4], что существуют такие единственные $V_1\in\mathcal{B}(D[M],\ \mathfrak{H}_2)$, $V_2\in\mathcal{B}(D[M],\ \mathfrak{H}_1)$, что для всех $y\in D(L)$, $z\in D(M)$

$$(Ly\,|\,z)-(y\,|\,Mz)=(W_1y\,|\,V_2z)_{\mathfrak{H}_1}-(W_2y\,|\,V_1z)_{\mathfrak{H}_2}.\tag{1}$$

При этом, как легко видеть,

$$W_1MV_1^*=0,\quad W_1MV_2^*=-1_{\mathfrak{H}_1},\quad W_2MV_1^*=1_{\mathfrak{H}_2},\quad W_2MV_2^*=0.\tag{2}$$

Далее, пусть $\Phi_i\in\mathcal{B}_\infty(H,\ \mathfrak{H}_i)$, $i=1,\ 2$. Определим операторы S, L_1, $M_1:H\to H$ следующим образом:

$$D(S)=\{y\in D(L):W_1y=\Phi_1y\},\tag{3}$$

$$Sy=Ly+\Phi_2^*W_2y,\quad y\in D(S).\tag{4}$$

Здесь L_1 — сужение L на $Z(W_1)$; M_1 — сужение M на $Z(V_1)$. Из результатов работы [4] следует, что $S\in\mathfrak{S}(H)$, а L_1 и M_1 являются взаимно сопряженными.

Мы рассматриваем S как возмущение оператора L_1, изменяющее не только закон L его действия, но и оператор краевых условий W_1, и строим