лентны совместимости алгебраической системы, полученной из условий разрешимости задачи (3):
$\dim \operatorname{Ker} K = -\alpha - r$ (r — ранг матрицы указанной системы).

Нами построено решение уравнения (1) в предположении, что функции $a(t)$ и $b(t)$ терпят разрывы в различных точках кривой Γ.

Рассмотрим теперь случаи, когда у этих функций есть общие точки разрыва.

Для простоты предположим, что точки t_m и t_1 совпадают. Тогда решение уравнения (1) ищем в пространстве $L_2(\Gamma, \rho)$, где $\rho(t) = |t - t_1|^{\sigma_1} \ldots \ldots |t - t_{m-1}|^{\sigma_{m-1}}$. Числа $\sigma_2, \ldots, \sigma_{m-1}$ выбираем, как и в предыдущем случае. Относительно σ_1 поступим следующим образом. Введем числа a_1 и a_2 так:

$$\pi a_1 = \arg a(t_1 + 0) - \arg a(t_1 - 0), \quad \pi a_2 = \arg b(t_1 - 0) - \arg b(t_1 + 0).$$

Если $a_i \in (-1, 0]$, $i = 1, 2$, то σ_1 выберем произвольно из интервала $[0, 1)$. Если $a_i \in (-2, -1]$, $i = 1, 2$, то σ_1 выберем так, чтобы было справедливо неравенство $\max\{|a_1|, |a_2|\} - 1 < \sigma_1 < 1$. Аналогично поступим в случае, когда несколько точек разрыва коэффициентов $a(t)$ и $b(t)$ совпадают.

Указанным выше методом можно строить решение уравнения (1) и в более узких заданных пространствах функций $L_2(\Gamma, \rho)$, когда числа σ_j выбираются из более широкого интервала $-1 < \sigma_j < 1$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Если

$$\arg a(t_k + 0) - \arg a(t_k - 0) \neq \pi(\pm 1 - \sigma_k), \quad k = \overline{1, l},$$
$$\arg b(t_k - 0) - \arg b(t_k + 0) \neq \pi(\pm 1 - \sigma_k), \quad k = \overline{l + 1, m},$$

то видоизменяя приведенные выше рассуждения, можно построить решение уравнения (1) в $L_2(\Gamma, \rho)$.

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.— М. : Наука, 1977.— 640 с.
2. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.— М. : Наука, 1977.— 448 с.
3. *Хведелидзе Б. В.* Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной.— М., 1975, с. 5—162. (Итоги науки и техники/ ВИНИТИ. Соврем. прибл. математики; Т. 7).
4. *Черский Ю. И.* Интегральные уравнения, сводящиеся к двум задачам Римана.— Докл. АН СССР, 1979, 248, № 4, с. 802—805.
5. *Черський Ю. Й.* Сингулярне інтегральне рівняння зі зсувом.— Доп. АН УРСР. Сер. А., 1980, № 12, с. 15—18.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР, Львов

Получено 14.04.82

УДК 517.524

Н. А. Недашковский

ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

Важное место в теории обычных цепных дробей занимает изучение сходимости. Получены эффективные достаточные и необходимые признаки сходимости дробей с действительными и комплексными членами [3—5].

Исследуем сходимость ветвящихся цепных дробей (ВЦД) вида

$$b_0 + \sum_{k_1=1}^{N} \cfrac{a_{k_1}}{b_{k_1} + \sum\limits_{k_2=1}^{N} \cfrac{a_{k_1 k_2}}{b_{k_1 k_2} + \vdots + \sum\limits_{k_m=1}^{N} \cfrac{a_{k_1 k_2 \ldots k_m}}{b_{k_1 \ldots k_m} + \vdots}}} \tag{1}$$

с комплексными элементами. Для дроби (1) введем сокращенные обозначения

$$D^{(m)}_{k_1 \dots k_m} = b_{k_1 \dots k_m},$$

$$D^{(m)}_{k_1 \dots k_s} = b_{k_1 \dots k_s} + \sum_{k_{s+1}=1}^{N} \frac{a_{k_1 \dots k_{s+1}}}{D^{(m)}_{k_1 \dots k_{s+1}}}. \tag{2}$$

Определение 1. Ветвящаяся цепная дробь называется абсолютно сходящейся, если сходится ряд из подходящих дробей

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} | D_0^{(\nu+1)} - D_0^{(\nu)} |.$$

Для ветвящихся цепных дробей существует некоторый способ, позволяющий мажорировать одну ВЦД другой.

Теорема 1. Если для ветвящейся дроби (1) существует такая абсолютно сходящаяся дробь

$$\tilde{b}_0 + \sum_{k_1=1}^{N} \cfrac{\tilde{a}_{k_1}}{\tilde{b}_{k_1} + \sum\limits_{k_2=1}^{N} \cfrac{\tilde{a}_{k_1k_2}}{\tilde{b}_{k_1k_2} + \vdots + \sum\limits_{k_m=1}^{N} \cfrac{\tilde{a}_{k_1 \dots k_m}}{\tilde{b}_{k_1 \dots k_m} + \vdots}}},$$

что

$$| D^{(m)}_{k_1 \dots k_s} | \geqslant \hat{D}^{(m)}_{k_1 \dots k_s} > 0, \tag{3}$$

$$\tilde{a}_{k_1k_2 \dots k_s} \notin]-|a_{k_1 \dots k_s}|, |a_{k_1 \dots k_s}|[$$

и все $a_{k_1k_2 \dots k_s}$ одного знака, то ВЦД (1) абсолютно сходится.

Доказательство. Используя формулу разности между двумя подходящими дробями

$$D_0^{(m+1)} - D_0^{(m)} = (-1)^m \sum_{k_1, \dots, k_{m+1}=1}^{N} \frac{a_{k_1 \dots k_{m+1}}}{b_{k_1k_2 \dots k_{m+1}}} \prod_{i=1}^{m} \frac{a_{k_1 \dots k_i}}{D^{(m)}_{k_1 \dots k_i} D^{(m+1)}_{k_1 \dots k_i}},$$

можно записать

$$| D_0^{(m+1)} - D_0^{(m)} | \leqslant \left| \sum_{k_1, \dots, k_{m+1}=1}^{N} \frac{|a_{k_1 \dots k_{m+1}}|}{|b_{k_1 \dots k_{m+1}}|} \prod_{i=1}^{m} \frac{|a_{k_1 \dots k_i}|}{|D^{(m)}_{k_1 \dots k_i}| \, |D^{(m+1)}_{k_1 \dots k_i}|} \right|,$$

откуда с учетом условий (3) получаем

$$| D_0^{(m+1)} - D_0^{(m)} | \leqslant$$

$$\leqslant \left| \sum_{k_1, \dots, k_{m+1}=1}^{N} \frac{\tilde{a}_{k_1 \dots k_{m+1}}}{\tilde{b}_{k_1 \dots k_{m+1}}} \prod_{i=1}^{m} \frac{\tilde{a}_{k_1 \dots k_i}}{\tilde{D}^{(m)}_{k_1 \dots k_i} \tilde{D}^{(m+1)}_{k_1 \dots k_i}} \right| = \left| \tilde{D}_0^{(m+1)} - \tilde{D}_0^{(m)} \right|.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} | D_0^{(\nu+1)} - D_0^{(\nu)} |$ также сходится, что и требовалось доказать.

Определение 2. Пусть M — некоторое подмножество точек комплексной плоскости. M называется областью сходимости дроби (1) с комплексными членами $a_{k_1k_2 \dots k_s}$ и $b_{k_1k_2 \dots k_s} (1 \leqslant k_s \leqslant N)$, если для всех $a_{k_1 \dots k_s} \in M$ и $b_{k_1 \dots k_s} \in M$ ВЦД (1) сходится.

Определение 3. Подмножество R комплексной плоскости, которому принадлежат значения всех подходящих дробей и значения бесконечных

ВЦД (1) при условии, что все $b_{k_1k_2\ldots k_s} \in M$ и $a_{k_1k_2\ldots k_s} \in M$, и которое не может быть уменьшено, называется областью значений ВЦД (1).

Теорема 2. Ветвящаяся дробь (1) с комплексными элементами, удовлетворяющими условиям

$$|b_{k_1\ldots k_s}| \geqslant |a_{k_1\ldots k_s}| + N \quad (1 \leqslant k_s \leqslant N,\ s = 0, 1, 2, \ldots,) \tag{4}$$

абсолютно сходится, а ее область значений принадлежит кругу

$$|z - b_0| \leqslant N. \tag{5}$$

Доказательство. Рассмотрим ВЦД вида

$$|b_0| + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{-|a_{k_1\ldots k_s}|}{|b_{k_1\ldots k_s}|} \tag{6}$$

и введем обозначения:

$$\tilde{D}^{(m)}_{k_1\ldots k_m} = |b_{k_1\ldots k_m}|, \tag{7}$$

$$\hat{D}^{(m)}_{k_1\ldots k_s} = |b_{k_1\ldots k_s}| - \sum_{k_{s+1}=1}^{N} \frac{|a_{k_1\ldots k_{s+1}}|}{\tilde{D}^{(m)}_{k_1\ldots k_{s+1}}}.$$

Методом полной математической индукции назад докажем справедливость неравенств

$$|D^{(m)}_{k_1\ldots k_s}| \geqslant \tilde{D}^{(m)}_{k_1\ldots k_s} \geqslant |a_{k_1\ldots k_s}|. \tag{8}$$

Действительно, для $s = m$ согласно условиям (4) теоремы имеем

$$|D^{(m)}_{k_1\ldots k_m}| = |b_{k_1\ldots k_m}| = \hat{D}^{(m)}_{k_1\ldots k_s} \geqslant |a_{k_1\ldots k_m}| + N.$$

Предполагая, что неравенство (8) выполняется и для произвольного p $(s \leqslant p \leqslant m)$, докажем его справедливость для $p = s - 1$.

Действительно, на основании выражений (4), (7) и (8) получаем

$$|a_{k_1\ldots k_{s-1}}| \leqslant |a_{k_1\ldots k_{s-1}}| + N - \sum_{k_s=1}^{N} \frac{|a_{k_1\ldots k_s}|}{D^{(m)}_{k_1\ldots k_m}} \leqslant |b_{k_1\ldots k_{s-1}}| -$$

$$- \sum_{k_s=1}^{N} \frac{|a_{k_1\ldots k_s}|}{\tilde{D}^{(m)}_{k_1\ldots k_s}} = \tilde{D}^{(m)}_{k_1\ldots k_{s-1}} \leqslant |b_{k_1\ldots k_{s-1}}| - \sum_{k_s=1}^{N} \frac{|a_{k_1\ldots k_s}|}{D^{(m)}_{k_1\ldots k_s}}.$$

Таким образом, элементы дробей (1) и (6) удовлетворяют условию мажорации. Следовательно, достаточно показать сходимость дроби (6).

В силу неравенства (8) справедливы соотношения

$$|\tilde{D}^{(m+1)}_0 - \tilde{D}^{(m)}_0| = \left| \sum_{k_1,\ldots,k_{m+1}=1} \frac{-|a_{k_1\ldots k_{m+1}}|}{b_{k_1\ldots k_{m+1}}} \prod_{i=1}^{m} \frac{-|a_{k_1\ldots k_i}|}{\tilde{D}^{(m)}_{k_1\ldots k_i}\tilde{D}^{(m+1)}_{k_1\ldots k_i}} \right| =$$

$$= (-1)^{m+1} \sum_{k_1,\ldots,k_{m+1}=1}^{N} \frac{-|a_{k_1\ldots k_{m+1}}|}{|b_{k_1\ldots k_{m+1}}|} \prod_{i=1}^{m} \frac{-|a_{k_1\ldots k_i}|}{\tilde{D}^{(m)}_{k_1\ldots k_i}\tilde{D}^{(m+1)}_{k_1\ldots k_i}} = \tilde{D}^{(m)}_0 - \tilde{D}^{(m+1)}_0. \tag{9}$$

Таким образом,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\hat{D}^{(\nu+1)}_0 - \hat{D}^{(\nu)}_0| \leqslant |b_0| - |b_0| + \sum_{k_1=1}^{N} \frac{|a_{k_1}|}{\hat{D}^{(m+1)}_{k_1}} \leqslant N,$$

откуда с учетом неравенства (8) заключаем, что

$$|D^{(m)}_0 - b_0| = \left| \sum_{k_1=1}^{N} \frac{a_{k_1}}{D^{(m)}_{k_1}} \right| \leqslant \sum_{k_1=1}^{N} \frac{|a_{k_1}|}{\hat{D}^{(m)}_{k_1}} \leqslant N,$$

т. е. ВЦД (1) абсолютно сходится. Так как

$$|D_0^{(m)}-b_0|=\left|\sum_{k_1=1}^{N}\frac{a_{k_1}}{D_{k_1}^{(m)}}\right|\leqslant\sum_{k_1=1}^{N}\frac{|a_{k_1}|}{|\hat{D}_{k_1}^{(m)}|}\leqslant N$$

согласно неравенству (8), то область значений дроби (1) принадлежит кругу

$$|z-b_0|\leqslant N,$$

что и доказывает теорему.

При $N=1$, т. е. для обычной цепной дроби, полученный признак совпадает с известным достаточным признаком сходимости, который был независимо доказан А. А. Марковым [2] для дробей с действительными элементами, И. В. Слешинским [3] и А. Прингсхеймом [4] для дробей с комплексными членами. Следующий достаточный признак по имеющимся данным не имеет аналога в теории обычных цепных дробей.

Теорема 3. Ветвящаяся цепная дробь (1) с комплексными членами, удовлетворяющими условиям

$$|b_{k_1\ldots k_s}|\geqslant 1+\sum_{k_{s+1}=1}^{N}|a_{k_1\ldots k_{s+1}}|\quad(1\leqslant k_s\leqslant N;\ s=0,1,\ldots),\tag{10}$$

абсолютно сходится, а ее область значений принадлежит кругу

$$|z-b_0|\leqslant\sum_{k_1=1}^{N}|a_{k_1}|.\tag{11}$$

Доказательство. Как и в теореме 2, введем в рассмотрение ВЦД (6) и обозначения (7). По индукции докажем справедливость неравенства

$$|D_{k_1\ldots k_m}^{(m)}|\geqslant\hat{D}_{k_1\ldots k_s}^{(m)}\geqslant 1.\tag{12}$$

Действительно, для $s=m$ согласно условиям (10) теоремы имеем

$$|D_{k_1\ldots k_m}^{(m)}|=|b_{k_1\ldots k_m}|=\hat{D}_{k_1\ldots k_m}^{(m)}\geqslant 1+\sum_{k_{m+1}=1}^{N}|a_{k_1\ldots k_{m+1}}|.$$

Предположим, что неравенство (12) справедливо для произвольного p $(m\geqslant p\geqslant s)$ и докажем его справедливость для $p=s-1$:

$$1\leqslant|b_{k_1\ldots k_{s-1}}|-\sum_{k_s=1}^{N}|a_{k_1\ldots k_s}|\leqslant|b_{k_1\ldots k_{s-1}}|-\sum_{k_s=1}^{N}\frac{a_{k_1\ldots k_s}}{D_{k_1\ldots k_s}^{(m)}}=$$

$$=\hat{D}_{k_1\ldots k_s}^{(m)}\leqslant|b_{k_1\ldots k_{s-1}}|-\sum_{k_s=1}^{N}\left|\frac{a_{k_1\ldots k_s}}{D_{k_1\ldots k_s}^{(m)}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|b_{k_1\ldots k_{s-1}}+\sum_{k_s=1}^{N}\frac{a_{k_1\ldots k_s}}{D_{k_1\ldots k_s}^{(m)}}\right|=|D_{k_1\ldots k_{s-1}}^{(m)}|.$$

Таким образом, выполняется условие мажорации. Следуя схеме, рассмотренной в предыдущей теореме, легко установить, что в условиях данной теоремы выполняется равенство (9). Следовательно,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|D_0^{(\nu+1)}-D_0^{(\nu)}|\leqslant|b_0|-|b_0|+\sum_{k_1=1}^{N}\frac{|a_{k_1}|}{|D_{k_1}^{(m)}|}\leqslant\sum_{k_1=1}^{N}|a_{k_1}|$$

и ВЦД (1) абсолютно сходится. Так как

$$|D_0^{(m)}-b_0|\leqslant\sum_{k_1=1}^{N}\left|\frac{a_{k_1}}{D_{k_1}^{(m)}}\right|\leqslant\sum_{k_1=1}^{N}|a_{k_1}|$$

согласно неравенству (12), то область значений дроби (1) принадлежит кругу

$$|z - b_0| \leqslant \sum_{k_1=1}^{N} |a_{k_1}|,$$

что и требовалось доказать.

Интересна взаимосвязь полученных признаков сходимости. Согласно исследованиям работы [1], ВЦД (1) можно формально представить как решение X_1 бесконечной системы линейных алгебраических уравнений с правой частью

$$(b_0, a_1, a_2, \ldots, a_N, 0, 0, \ldots, 0 \ldots)^T$$

и матрицей A вида

$$\begin{Vmatrix} b_1 & 0 & \ldots & 0 & a_{11} & \ldots & a_{1N} & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & b_2 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{21} & \ldots & a_{2N} & \ldots \\ \cdots & & & & & & & & & & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & b_N & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & b_{11} & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \cdots & & & & & & & & & & \cdots \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & b_{1N} & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{21} & \ldots & 0 & \ldots \\ \cdots & & & & & & & & & & \cdots \\ 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & b_{2N} & \ldots \\ \cdots & & & & & & & & & & \cdots \end{Vmatrix}.$$

Тогда условие сходимости (4) для матрицы бесконечной системы дает диагональное преобладание по столбцам, а условие (10) — по строкам.

1. *Крупка З. И., Шмойлов В. И.* О параллельном вычислении алгоритмов, представленных ветвящимися цепными дробями.— Многопроцессор. вычисл. структуры, 1980, № 2/11, с. 78—80.
2. *Марков А. А.* Избранные труды по теории непрерывных дробей и функций, наименее отклоняющихся от нуля.— М.; Л. : Гостехиздат, 1948.— 411 с.
3. *Слешинский И. В.* К вопросу о сходимости непрерывных дробей.—Мат. сб., 1888, **14**, с. 337—343.
4. *Thron W. J.* Some results and problems in the analitic theory of continued fractions.— Math. Stud., 1964, **32**, N 1/2, p. 61—73.
5. *Wall H. S.* Analitic theory of continued fractions.— New York : D. Yan Nostrand co., 1948.— 433 p.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР,
Львов

Получено 15.04.81

УДК 512.8

Б. З. Шаваровский

ПОЛУСКАЛЯРНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МАТРИЦ С ПОПАРНО РАЗЛИЧНЫМИ КОРНЯМИ ИХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО МНОГОЧЛЕНА

Пусть $A(x)$ — регулярная $n \times n$-матрица степени m с элементами из кольца $\mathbb{C}[x]$. Предположим, что характеристический многочлен $\Delta(x) = \det A(x)$ не имеет кратных корней. В настоящей работе найдена полная система инвариантов матрицы $A(x)$ относительно полускалярно эквивалентных преобразований [1].

Предложение 1. Существуют такие корни $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ характеристического многочлена $\Delta(x)$, что матрица $A(x)$ полускалярно эквивалентна [1] матрице вида

$$QA(x)R(x) = \begin{Vmatrix} E_{n-1} & 0 \\ \bar{b}(x) & \Delta(x) \end{Vmatrix} = F(x), \tag{1}$$