

где

$$m_1(t) = \frac{t}{(1+4t^2)^2},$$

$$m_2(t) = \frac{1+t}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2(1+t)}{3+(1+t)^2} - \frac{t}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2t}{3+t^2},$$

$$M_1 = -\frac{2}{\Delta} \int_{-1}^1 m_1(t) m_2(t) dt,$$

$$M_2 = \frac{2}{\Delta} \int_{-1}^1 m_1^2(t) dt,$$

$$\Delta = \int_{-1}^1 m_1^2(t) dt \int_{-1}^1 m_2^2(t) dt - \left[\int_{-1}^1 m_1(t) m_2(t) dt \right]^2 > 0.$$

Соответствующие усилиям $N_0(t)$ распределения напряжений X_y в полуплоскости $y < 0$ имеют вид

$$X_y(x, y) = \frac{2M_1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{y^2 m_1(t) (t-x)}{[(t-x)^2 + y^2]^2} dt + \frac{2M_2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{y^2 m_2(t) (t-x)}{[(t-x)^2 + y^2]^2} dt,$$

в частности, в точке $(0, -\frac{1}{2})$ $X_y = 0$.

Из-за громоздкости здесь не приводятся решения, минимизирующие нормы $\int_{-1}^1 |N(t)| dt$ и $\max_{t \in [-1, 1]} |N(t)|$.

1. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1966.— 524 с.
2. Касьянюк С. А. К методу моментов в теории оптимального управления.— Автоматика и телемеханика, 1970, № 8, с. 169—171.
3. Касьянюк С. А., Ткачук Г. И. Об одном классе экстремальных задач математической теории упругости.— Прикл. механика, 1971, 7, вып. 9, с. 57—63.
4. Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач.— Докл. АН СССР, 1963, 151, № 3, с. 501—504.

Киевский институт инженеров
гражданской авиации

Получено 20.03.81

УДК 539.385

А. П. Поддубняк

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ВОЛНЫ КРУЧЕНИЯ НА ДВУХСЛОЙНОЙ УПРУГОЙ СФЕРЕ

Пусть на двухслойную упругую сферу в упругой среде набегают плоская волна кручения (рис. 1), вызывающая тангенциальные смещения

$$u'_\varphi(r, \theta, \tau) = u_0 r \sin \theta f(\tau + r \cos \theta), \quad f(\tau) = 0, \quad \tau \leq 0. \quad (1)$$

Здесь и далее u_0 — постоянная, имеющая размерность смещения; r, θ, φ — сферические координаты с началом отсчета в центре рассеивателя; $f(\tau)$ — закон изменения импульса во времени; $\tau = ct/a$; c_0, c_1, c_2 и ρ_0, ρ_1, ρ_2 — объемные скорости волн сдвига и плотность материалов соответственно во внешней среде, оболочке и заполнителе; t — время; a, b — радиусы оболочки; $\varepsilon = b/a < 1$. Все линейные характеристики задачи отнесены к внешнему радиусу оболочки a .

Для определения переизлученного сигнала необходимо решить дифференциальные уравнения крутильных колебаний [1]

$$-\frac{\partial(r\omega_\theta)}{\partial r} + \frac{\partial\omega_r}{\partial\theta} = \frac{r}{2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \tau^2},$$

где

$$\omega_\theta = -\frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_\varphi), \quad \omega_r = \frac{1}{2r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\varphi \sin \theta)$$

в каждой области с учетом условий упругого контакта

$$u_\varphi^0 = u_\varphi^1, \quad \tau_{r\varphi}^0 = \tau_{r\varphi}^1 \quad (r = 1),$$

$$u_\varphi^1 = u_\varphi^2, \quad \tau_{r\varphi}^1 = \tau_{r\varphi}^2 \quad (r = \varepsilon),$$

принципа причинности [5] и ограниченности искомых решений. При этом следует учесть, что полное поле u_φ^0 в окружающей объект среде имеет вид $u_\varphi^0 = u_\varphi^i + u_\varphi^e$, где u_φ^e — эхо-сигнал.

С помощью интегрального преобразования Фурье по τ и метода разделения переменных точное решение задачи находим в виде интеграла свертки

$$u_\varphi^e = \int_{-\infty}^{\tau} f(\tau - \xi) U_e(r, \theta, \xi) d\xi. \quad (2)$$

Здесь

$$U_e(r, \theta, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}_e(r, \theta, \omega) e^{-i\omega\tau} d\omega; \quad (3)$$

$$\bar{U}_e(r, \theta, \omega) = \frac{u_0}{i\omega} \sum_{l=1}^{\infty} (-i)^l (2l + 1) a_l(\omega) h_l^{(1)}(\omega r) P_l^1(\cos \theta); \quad (4)$$

$$a_l(\omega) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{F_l}{y} \right); \quad F_l = \frac{z^2 - q}{z^2 - q}; \quad q = \frac{D_{10}}{D_{20}};$$

$$D_{10} = \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & 0 \\ A_{32} & A_{33} & A_{43} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix}; \quad D_{20} = \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} & 0 \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix};$$

$$A_{12} = j_l(\omega_1), \quad A_{13} = n_l(\omega_1); \quad A_{22} = N_1 [\omega_1 j_l'(\omega_1) - j_l(\omega_1)];$$

$$A_{23} = N_1 [\omega_1 n_l'(\omega_1) - n_l(\omega_1)]; \quad A_{32} = j_l(\bar{\omega}_1); \quad A_{34} = j_l(\bar{\omega}_2);$$

$$A_{33} = n_l(\bar{\omega}_1); \quad A_{42} = \bar{\omega}_1 j_l'(\bar{\omega}_1) - j_l(\bar{\omega}_1); \quad A_{43} = \bar{\omega}_1 n_l'(\bar{\omega}_1) - n_l(\bar{\omega}_1);$$

$$A_{44} = N_2 [\bar{\omega}_2 j_l'(\bar{\omega}_2) - j_l(\bar{\omega}_2)]; \quad \omega_j = \frac{\omega}{\beta_j}; \quad \bar{\omega}_j = \varepsilon \omega_j;$$

$$y = \frac{h_l^{(1)}(\omega)}{h_l^{(2)}(\omega)}; \quad z_j = \omega \frac{h_l^{(j)'}(\omega)}{h_l^{(j)}(\omega)} - 1 \quad (j \neq 0); \quad \beta_j = \frac{c_j}{c_0};$$

$$N_1 = \frac{\mu_1}{\mu_0}; \quad N_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1}; \quad \mu_j = c_j^2 \rho_j; \quad j = 0, 1, 2;$$

$j_l(x)$, $n_l(x)$, $h_l^{(j)}(x)$ ($j = 1, 2$) — сферические функции Бесселя; $P_\alpha^1(x)$ — присоединенные функции Лежандра первого рода.

Ряд (4), представляющий собой с точностью до $e^{-i\omega\tau}$ тангенциальное смещение в стационарной переизлученной волне кручения, разложенное по нормальным модам, с помощью преобразования Зоммерфельда — Ватсона [6] можно представить в виде контурного интеграла по комплексной переменной $\alpha = l$. Часть этого интеграла с контуром интегрирования, охватывающим полюсы функции $F(\alpha) = F_l$ при $\text{Im } \alpha \geq 0$, позволяет выделить вклады, соответствующие различного типа поверхностным волнам [8]. Здесь мы вычислим другую часть интеграла с контуром C_s вдали от указанных полюсов, что соответствует рассмотрению волн отражения и

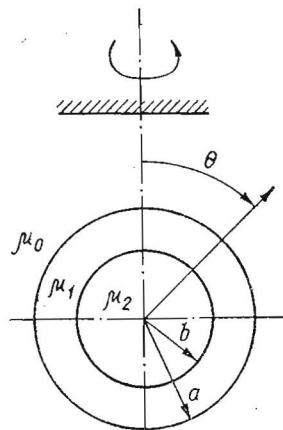


Рис. 1

прохождения [3]. Этот интеграл имеет вид

$$\bar{U}_{e,g} = \frac{u_0}{i\omega} \int_{C_s} e^{-\frac{i\pi\alpha}{2}} (2\alpha + 1) a_\alpha(\omega) h_\alpha^{(1)}(\omega r) R_\alpha^1(\theta) d\alpha, \quad (5)$$

где

$$R_\alpha^1(\theta) = \frac{1}{2} \left[P_\alpha^1(\cos \theta) - \frac{2i}{\pi} Q_\alpha^1(\cos \theta) \right];$$

$Q_\alpha^1(x)$ — присоединенная функция Лежандра второго рода.

Функция $F(\alpha)$, входящая в интеграл (5), имеет такой же вид, что и в задаче рассеяния акустических волн на двухслойной жидкой сфере [3].

Поэтому пользуясь при $|\omega| \gg 1$, $|\alpha| \gg 1$, $|\omega - \alpha| = O(|\omega|^{-\frac{1}{3}})$ асимптотическими разложениями Дебая для сферических функций Бесселя [6] и асимптотической формулой [2]

$$R_\alpha^1(\theta) \approx \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi \sin \theta}} e^{i\left(\nu\theta + \frac{\pi}{4}\right)} \quad \left(\nu = \alpha + \frac{1}{2}\right),$$

после преобразований интеграл (5) вычисляем по методу перевала [4]. В результате получаем

$$\bar{U}_{e,g} \approx \bar{U}_{000} - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{U}_{mnk} K_{mnk}. \quad (6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{U}_{mnk} &= G_{mnk} e^{i\omega\tau_{mnk}} \quad (n, k = 0, 1, 2, \dots, m \geq n); \\ K_{mnk} &= \frac{i^{k+n} m! (n+k-1)!}{(m-n)! n! (n-1)! k!}; \quad G_{000} = s_0 R_{12} F_{000}^{-1}; \\ G_{mnk} &= s_0 T_{12} T_{21} R_{21}^{m-1} \bar{R}_{12}^{m-n} (\bar{T}_{12} \bar{T}_{21})^n \bar{R}_{21}^k F_{mnk}^{-1}; \\ F_{mnk}^0 &= 2r \cos \kappa \left[1 - \cos \gamma \left(\frac{m\beta_1}{\cos \delta} - \frac{m\beta_1}{\varepsilon \cos \eta} \right) + \frac{k+n}{\varepsilon \cos \xi} \beta_2 \right] - \cos \gamma; \\ F_{mnk} &= \sqrt{|F_{mnk}^0|}; \quad \tau_{mnk} = r \cos \kappa - 2 \cos \gamma + \frac{2m}{\beta_1} (\cos \delta - \varepsilon \cos \eta) + \\ &\quad + \frac{2(k+n)}{\beta_2} \varepsilon \cos \xi; \\ s_0 &= u_0 \sin \gamma \sqrt{\frac{\sin 2\gamma}{2r \sin \theta}} \exp \left\{ i \left[1 + \operatorname{sgn}(F_{mnk}^0) \right] \frac{\pi}{4} \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

При этом $\sin \gamma = N = \frac{\nu}{\omega}$ — решения уравнений седловой точки

$$\theta_{mnk} = (k+n)(\pi - 2\xi) - \kappa + 2\gamma + 2m(\eta - \delta), \quad (8)$$

где

$$r \sin \kappa = \frac{\sin \delta}{\beta_1} = \frac{\varepsilon \sin \eta}{\beta_1} = \frac{\varepsilon \sin \xi}{\beta_2} = \sin \gamma,$$

а $\theta_{mnk} = \theta$ — полярный угол точки наблюдения во внешней упругой среде, в которую поступают рассеянные волны.

Подставив выражение (6) в формулы (3) и (2), найдем тангенциальные смещения в переизлученном импульсе:

$$u_{\varphi,g}^e \approx u_{000} - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u_{mnk} K_{mnk}, \quad (9)$$

$$u_{mnk} = G_{mnk} f(\tau - \tau_{mnk}) \quad (n, k = 0, 1, 2, \dots; m \geq n).$$

Анализ уравнений седловой точки (8) и формул (6), (7), (9) показывает, что первый компонент в (9) соответствует импульсу, отраженному от внешней поверхности объекта. Последующие составляющие отвечают импуль-

сам прохождения. При этом число $m - 1$ ($m = 1, 2, \dots$) равно количеству отражений преломленной волны от внешней поверхности внутри объекта, число n ($n = 1, 2, \dots$) — числу преломлений в заполнителе, а число

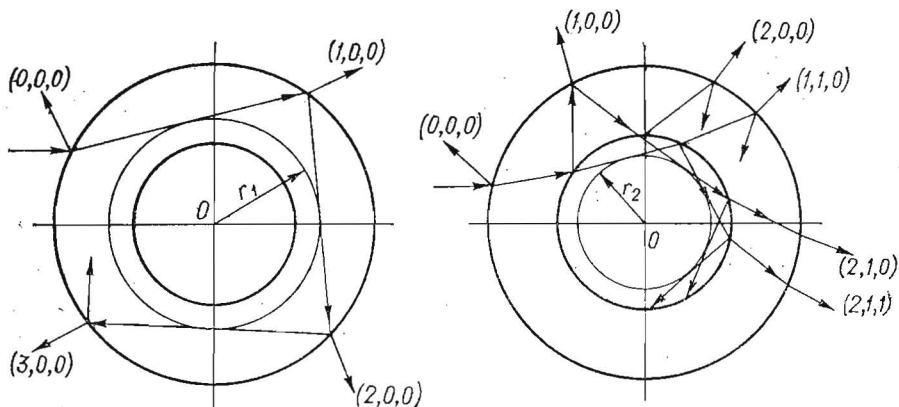


Рис. 2

$k - 1$ ($k = 1, 2, \dots$) — количеству внутренних отражений волн, проникающих в заполнитель. На рис. 2 изображен ход лучей отраженных и преломленных волн (mnk) в начальный период их распространения. Отсюда, в частности, следует, что волны, отраженные внутрь оболочки и заполнителя, образуют каустики — сферические поверхности радиусов $r_1 = \beta_1 \sin \gamma$ (в оболочке) и $r_2 = \beta_2 \sin \gamma$ (в заполнителе). Из геометрии

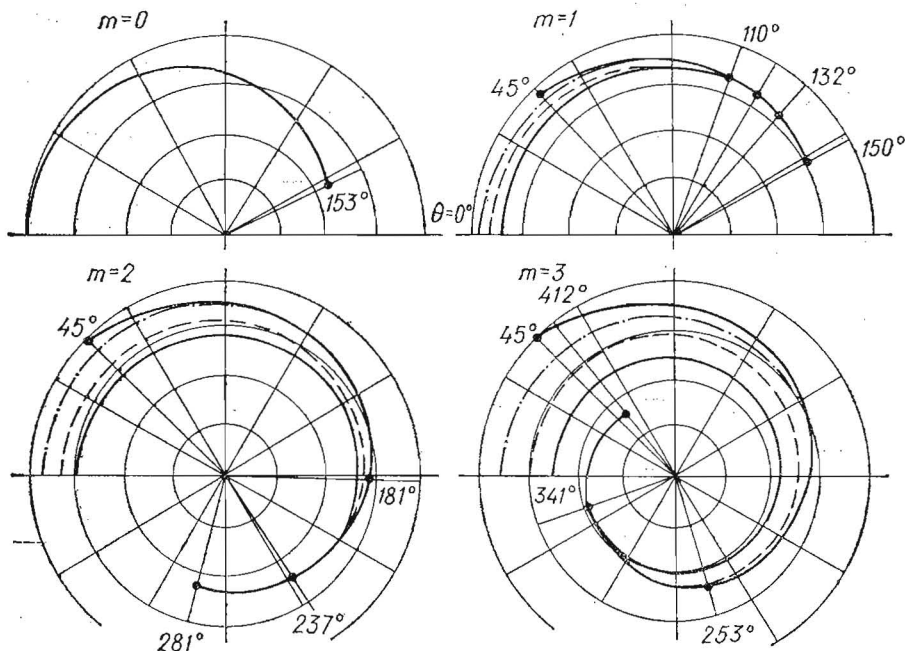


Рис. 3

рассеяния и формул (6), (7) следует, что величины τ_{mnk} определяют безразмерное время распространения волны кручения при отражении или преломлении их на объекте и поступлении в точку наблюдения. Уравнение седловой точки (8) и равенства

$$\tau = \tau_{mnk} \quad (n, k = 0, 1, 2, \dots; m \geq n)$$

при фиксированном моменте времени $\tau = \tau_0$ позволяют определить положение волнового фронта каждого импульса в отдельности, т. е. зависимость r

от θ . В частности, при $r \gg 1$ из формул (7) имеем

$$r_{mnk}(\theta) \approx \tau_0 + 2 \cos \gamma - \frac{2m}{\beta_1} (\cos \delta - \varepsilon \cos \eta) - \frac{2(k+n)}{\beta_2} \varepsilon \cos \xi.$$

При этом уравнение седловой точки принимает вид

$$\theta_{mnk} \approx (k+n)(\pi - 2\xi) + 2\gamma - 2m(\delta - \eta).$$

Для определения седловых точек можно использовать графический способ, предложенный в работе [3]. Имея седловые точки, находим функции G_{mnk} и τ_{mnk} , а при заданной модуляции $f(\tau)$ импульса посылки — и форму переизлученных сигналов.

Численные расчеты выполнены для случая стальной оболочки ($\rho_1 = 7,70$ г/см³, $c_1 = 3240$ м/с), находящейся в среде из льда ($\rho_0 = 0,917$ г/см³, $c_0 = 1433$ м/с). Ядро в оболочке абсолютно жесткое ($\mu_2 = \infty$) или абсолютно мягкое ($\mu_2 = 0$). На рис. 3 изображены фронты отраженных ($m = 0$) и преломленных ($m = 1, 2, 3$) волн кручения. При $m \geq 1$ сплошные линии соответствуют значению $\varepsilon = 0,4$, штриховые — $\varepsilon = 0,6$, штрихпунктирные — $\varepsilon = 0,8$. Точками указаны угол тени отраженных волн (153°), критический угол волн прохождения (45°) и углы тени на заполнителе оболочки для волн прохождения.

1. Арутюнян Н. Х., Баблоян А. А. О двух динамических контактных задачах для упругой сферы. — Прикл. математика и механика, 1965, 29, вып. 3, с. 526—531.
2. Грилицкий Д. В., Поддубняк А. П. Рассеяние нестационарной волны кручения на жесткой неподвижной сфере в упругой среде. — Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1980, № 5, с. 86—92.
3. Поддубняк А. П. Отражение и преломление плоского звукового импульса на двухслойной акустической сфере. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 12, с. 46—50.
4. Федорюк М. В. Метод перевала. — М.: Наука, 1977. — 368 с.
5. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн: В 2-х т. — М.: Мир, 1978. — Т. 1. 522 с.
6. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. — М.: Мир, 1964. — 428 с.
7. Gérard A. Scattering of SH waves by spherical layer. — Int. J. Eng. Sci., 1979, 17, N 3, p. 313—327.
8. Überall H. Surface waves in acoustics. — In: Physical acoustics / Eds. W. P. Mason, R. N. Thurston, New York: Acad. press, 1973, 10, p. 1—60.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР,
Львов

Получено 10.03.82

УДК 539.4 : 538.569

В. В. Левченко, Н. А. Шульга

ОТРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ОТ РЕГУЛЯРНО-СЛОИСТОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРЕГРАДЫ

Распространение электромагнитных волн в неограниченной регулярно-слоистой среде изучалось несколькими авторами [1] на основании теории Флоке для уравнений с периодическими коэффициентами, хотя подробный анализ результатов до сих пор отсутствует. Теоретический интерес представляет также задача отражения волн от регулярно-слоистого полупространства, решение которой упрощает анализ практически важных вопросов взаимодействия электромагнитных волн с элементами конструкций радиотехнического назначения из полимерных композитных материалов [3], их разогрева электромагнитным полем [2, 5], зондирования таких материалов электромагнитными методами [4].

Рассмотрим регулярно-слоистый материал, образованный повторением «порождающего» слоя толщины h , состоящего в свою очередь из Q слоев различной толщины h_q ($h_1 + \dots + h_Q = h$) и электромагнитных свойств. Электромагнитное поле в диэлектрических слоях материала описывается [1] системой уравнений Максвелла относительно векторов электрической (магнитной) напряженности \vec{E} (\vec{H}) и индукции \vec{D} (\vec{B}), в которой пренебрегает-