Оказывается, однако, что условие (*iii*) следует из условий (*ii*) и (*iv*) по формуле (9) с учетом свойства (*i*) матрицы **A** (то же и в работе [1]).

Таким образом, система уравнений Эйлера — Пуассона третьего порядка имеет вид

$$\mathbf{A}\mathbf{r} + \mathbf{q}\partial_p \cdot \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{B}\mathbf{q} + \mathbf{c} = \mathbf{0},$$

где матрицы **A**, **B** и столбец **c** удовлетворяют условиям (*i*), (*ii*), (*iv*) — (*vii*) и матрица **A** кососимметрическая. На самом деле,

$$B_{ik} = q^l L_{p^i p^k q^l} - L_{p^i p^k} + 2p^l L_{q^i p^k x^l} - p^l L_{q^k p^i x^l} + L_{q^i x^k} - L_{q^k x^i} + \\ + 2L_{q^i p^k t} - L_{q^k p^i t};$$

$$c_i = q^k p^l L_{p^i q^k x^l} - q^k L_{x^i q^k} + q^k L_{p^i q^k t} + p^k p^l L_{q^i x^k x^l} - p^k L_{p^i x^k} + \\ + 2p^k L_{q^i x^k t} + L_{q^i t t} - L_{p^i t} + L_{x^i}.$$

П р и м е р 3. Рассмотрим систему уравнений второго порядка. Положим **A** = 0. Условия (*ii*), (*iv*) — (*vii*) превращаются в эквивалентную форму условий Гельмгольца [3].

П р и м е р 4. Рассмотрим систему уравнений первого порядка. Положим **B** = 0. Условия (*v*) и (*vi*) указывают на линейную зависимость $\lambda = \mathbf{W}\mathbf{p} + \mathbf{w}$ с антисимметрической матрицей **W**, зависящей только от переменных t и **x**. Тождество (*vii*) превращается в условия самосопряженности λ [4]:

$$\partial_{x[i} W_{j]k} + \partial_{x^k} W_{ij} = 0, \quad \partial_x \wedge \mathbf{w} + \partial_t \mathbf{W} = 0.$$

1. *Мацюк Р. Я.* О существовании лагранжиана для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1981, вып. 13, с. 34—38.
2. *Anderson I. M.* Tensorial Euler — Lagrange expressions and conservation laws.— Aeq. Math., 1978, **17**, N 2/3, p. 255—291.
3. *Engels E.* On the Helmholtz conditions for the existence of a Lagrange formalism.— Nuova cim. B, 1975, **26**, N 2, p. 481—492.
4. *Hojman S.* Construction of genotopic transformations for first order systems of differential equations.— Hadronic J., 1981, 5, N 1, p. 174—184.
5. *Horndeski G. V.* Differential operators associated with the Euler — Lagrange operator.— Tensor, 1974, **28**, p. 303—318.
6. *Kolář I.* On the Euler — Lagrange differential in fibered manifolds.— Repts Math. Phys., 1977, **12**, N 3, p. 301—305.
7. *Lawruk B., Tulczyjew W. M.* Criteria for partial differential equations to be Euler — Lagrange equations.— J. Different Equat., 1977, **24**, N 2, p. 211—225.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 28.07.82

УДК 517.52

Х. И. Кучминская

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ ДВУМЕРНЫХ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

Разложение функции в соответствующую цепную дробь является одним из наиболее употребляемых способов построения ее дробно-рациональных приближений. В работах [2, 3] введено понятие соответствующей цепной дроби для двукратного степенного ряда, вопрос поточечной сходимости которой приводит к рассмотрению числовой дроби вида

$$\cfrac{a_{00}}{\Phi_0 + \cfrac{a_{11}}{\Phi_1 + \cdots}} = \frac{a_{00}\,|}{|\,\Phi_0} + \frac{a_{11}\,|}{|\,\Phi_1} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_{ii}\,|}{|\,\Phi_i}, \qquad (1)$$

где $\Phi_i = b_{ii} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k+i,i}|}{|b_{k+i,i}} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_{i,k+i}|}{|b_{i,k+i}}$, $i = 0, 1, \ldots$; a_{ij}, b_{ij} ($i, j = 0, 1, \ldots$) — комплексные числа.

Определение 1. Подходящей дробью n-го порядка дроби (1) называется конечная дробь

$$\frac{A_n}{B_n} = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{a_{ii}|}{|\Phi_i^{(n-2i-1)}}, \quad \Phi_i^{(m)} = b_{ii} + \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{k+i,i}|}{|b_{k+i,i}} + \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{i,k+i}|}{|b_{i,k+i}},$$

$$m = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

где $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ — целая часть числа $\frac{n-1}{2}$; $\Phi_i^{(0)} = b_{ii}$, $n = 1, 2, \ldots$; $A_0 | B_0 = 0$.

Определение 2. Двумерная цепная дробь (1) с комплексными компонентами называется сходящейся, если существует и конечен предел последовательности ее подходящих дробей. Величину этого предела в случае его существования будем называть значением бесконечной дроби (1).

Определение 3. Двумерная цепная дробь (1) называется абсолютно сходящейся, если сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{A_n}{B_n} \right|.$$

Теорема 1. Двумерная цепная дробь (1) с комплексными компонентами, удовлетворяющая условиям

$$|b_{ii}| \geqslant |a_{ii}| + 3, \quad |b_{ij}| \geqslant |a_{ij}| + 1, \quad i \neq j, \ i, j = 0, 1, \ldots \tag{3}$$

абсолютно сходится и множество ее значений принадлежит кругу

$$|z| \leqslant 1. \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим двумерную цепную дробь вида

$$\cfrac{-|a_{00}|}{\hat{\Phi}_0 - \cfrac{|a_{11}|}{\hat{\Phi}_1 - \ddots}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{-|a_{ii}|}{|\hat{\Phi}_i}, \tag{5}$$

где

$$\hat{\Phi}_i = |b_{ii}| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-|a_{k+i,i}|}{||b_{k+i,i}|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-|a_{i,k+i}|}{||b_{i,k+i}|};$$

$$\hat{\Phi}_i^{(m)} = |b_{ii}| + \sum_{k=1}^{m} \frac{-|a_{k+i,i}|}{||b_{k+i,i}|} + \sum_{k=1}^{m} \frac{-|a_{i,k+i}|}{||b_{i,k+i}|}, \ \hat{\Phi}_i^{(0)} = |b_{ii}|, \ m = 0, 1, \ldots$$

При введении обозначений

$$Q_i^{(s-2i-1)} = \Phi_i^{(s-2i-1)} + \sum_{j=i+1}^{\left[\frac{s-1}{2}\right]} \frac{a_{jj}|}{|\Phi_j^{(s-2j-1)}},$$

$$\hat{Q}_i^{(s-2i-1)} = \hat{\Phi}_i^{(s-2i-1)} + \sum_{j=i+1}^{\left[\frac{s-1}{2}\right]} \frac{-|a_{jj}|}{|\hat{\Phi}_j^{(s-2j-1)}};$$

$$Q_{1j}^{(s-2i-1)} = b_{i+j,i} + \sum_{k=j+1}^{s-2i-1} \frac{a_{i+k,i}|}{|b_{i+k,i}}, \quad Q_{2j}^{(s-2i-1)} = b_{i,i+j} + \sum_{k=j+1}^{s-2i-1} \frac{a_{i,i+k}|}{|b_{i,i+k}},$$

$$\hat{Q}_{1j}^{(s-2i-1)}=|b_{i+j,i}|+\sum_{k=j+1}^{s-2i-1}\frac{-|a_{i+k,i}|}{|b_{i+k,i}|},\ \hat{Q}_{2j}^{(s-2i-1)}=|b_{i,i+j}|+$$

$$+\sum_{k=j+1}^{s-2i-1}\frac{-|a_{i,i+k}|}{|b_{i,i+k}|},$$

$$i=\overline{0,\left[\frac{s-1}{2}\right]},\ j=\overline{1,\ s-2i-1}$$

справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$Q_i^{(s-2i-1)}=\Phi_i^{(s-2i-1)}+\frac{a_{i+1,i+1}}{Q_{i+1}^{(s-2i-3)}},$$

$$\hat{Q}_i^{(s-2i-1)}=\hat{\Phi}_i^{(s-2i-1)}-\frac{|a_{i+1,i+1}|}{\hat{Q}_{i+1}^{(s-2i-3)}},$$

$$Q_{1j}^{(s-2i-1)}=b_{i+j,i}+\frac{a_{i+j+1,i}}{Q_{1,j+1}^{(s-2i-1)}},\ Q_{2j}^{(s-2i-1)}=b_{i,i+j}+\frac{a_{i,i+j+1}}{Q_{2,j+1}^{(s-2i-1)}},$$

$$\hat{Q}_{1j}^{(s-2i-1)}=|b_{i+j,i}|-\frac{|a_{i+j+1,i}|}{\hat{Q}_{1,j+1}^{(s-2i-1)}};\quad \hat{Q}_{2j}^{(s-2i-1)}=|b_{i,i+j}|-\frac{|a_{i,i+j+1}|}{\hat{Q}_{2,j+1}^{(s-2i-1)}},\tag{6}$$

$$i=\overline{0,\left[\frac{s-1}{2}\right]},\ j=\overline{1,\ s-2i-1}.$$

Методом полной математической индукции докажем, что выполняются неравенства

$$|Q_i^{(s-2i-1)}|\geqslant\hat{Q}_i^{(s-2i-1)}\geqslant|a_{ii}|,$$

$$|Q_{1j}^{(s-2i-1)}|\geqslant\hat{Q}_{1j}^{(s-2i-1)}\geqslant|a_{i+j,i}|,\tag{7}$$

$$|Q_{2j}^{(s-2i-1)}|\geqslant\hat{Q}_{2j}^{(s-2i-1)}\geqslant|a_{i,i+j}|.$$

Действительно, при $j=s-2i-1\neq 0$

$$|Q_{1,s-2i-1}^{(s-2i-1)}|=|b_{s-i-1,i}|=\hat{Q}_{1,s-2i-1}^{(s-2i-1)}\geqslant|a_{s-i-1,i}|+1>|a_{s-i-1,i}|,$$

$$i=\overline{0,\left[\frac{s-1}{2}\right]}.$$

Предположив, что второе из неравенств (7) справедливо для произвольного j $(s-2i-1\geqslant j\geqslant m>1)$, докажем его справедливость для $j=m-1$. На основании соотношений (3), (6) получаем

$$|Q_{1,m-1}^{(s-2i-1)}|=\left|b_{i+m-1,i}+\frac{a_{i+m,i}}{Q_{1m}^{(s-2i-1)}}\right|\geqslant|b_{i+m-1,i}|-\frac{|a_{i+m,i}|}{|Q_{1m}^{(s-2i-1)}|}\geqslant$$

$$\geqslant|b_{i+m-1,i}|-\frac{|a_{i+m,i}|}{\hat{Q}_{1m}^{(s-2i-1)}}=\hat{Q}_{1,m-1}^{(s-2i-1)}\geqslant|a_{i+m-1,i}|+1-1=|a_{i+m-1,i}|.$$

Аналогично доказывается справедливость третьего из неравенств (7). Поскольку

$$\Phi_i^{(s-2i-1)}=b_{ii}+\frac{a_{i+1,i}}{Q_{11}^{(s-2i-1)}}-\frac{a_{i,i+1}}{Q_{21}^{(s-2i-1)}}$$

то с учетом только что доказанных неравенств находим

$$|\Phi_i^{(s-2i-1)}-\Phi_i^{(s-2i)}|\leqslant\frac{\prod_{k=1}^{s-2i}|a_{k+i,i}|}{\prod_{k=1}^{s-2i-1}|Q_{1k}^{(s-2i-1)}|\prod_{k=1}^{s-2i}Q_{1k}^{(s-2i)}}+$$

$$
+\frac{\prod\limits_{k=1}^{s-2i}|a_{i,k+i}|}{\prod\limits_{k=1}^{s-2i-1}|Q_{2k}^{(s-2i-1)}|\prod\limits_{k=1}^{s-2i}|Q_{2k}^{(s-2i)}|}\leqslant\frac{(-1)^{s-2i}\prod\limits_{k=1}^{s-2i}(-|a_{k+i,i}|)}{\prod\limits_{k=1}^{s-2i-1}\hat{Q}_{1k}^{(s-2i-1)}\prod\limits_{k=1}^{s-2i}\hat{Q}_{1k}^{(s-2i)}}+
$$

$$
+\frac{(-1)^{s-2i}\prod\limits_{k=1}^{s-2i}(-|a_{i,k+i}|)}{\prod\limits_{k=1}^{s-2i-1}\hat{Q}_{2k}^{(s-2i-1)}\prod\limits_{k=1}^{s-2i}\hat{Q}_{2k}^{(s-2i)}}=\hat{\Phi}_i^{(s-2i-1)}-\hat{\Phi}_i^{(s-2i)} \tag{8}
$$

и

$$
|\Phi_i^{(s-2i-1)}|\geqslant|b_{ii}|-\frac{|a_{i+1,i}|}{\hat{Q}_{11}^{(s-2i-1)}}-\frac{|a_{i,i+1}|}{\hat{Q}_{21}^{(s-2i-1)}}=\hat{\Phi}_i^{(s-2i-1)}\geqslant|a_{ii}|+1. \tag{9}
$$

Для первого неравенства (7) согласно условиям (3) при $i=k$ и $s-1=2k$, $s-1=2k+1$ соответственно получаем

$$
|Q_k^{(0)}|=|b_{kk}|=\hat{Q}_k^{(0)}\geqslant|a_{kk}|+3>|a_{kk}|,
$$

$$
|Q_k^{(1)}|=\left|b_{kk}+\frac{a_{k+1,k}}{b_{k+1,k}}+\frac{a_{k,k+1}}{b_{k,k+1}}\right|\geqslant\hat{Q}_k^{(1)}>|a_{kk}|.
$$

Предполагая, что первое неравенство (7) справедливо для произвольного i ($k\geqslant i\geqslant p$), докажем его справедливость при $i=p-1$:

$$
|Q_{p-1}^{(s-2p+1)}|=\left|\Phi_{p-1}^{(s-2p+1)}+\frac{a_{pp}}{Q_p^{(s-2p-1)}}\right|\geqslant|\Phi_{p-1}^{(s-2p+1)}|-\frac{|a_{pp}|}{\hat{Q}_p^{(s-2p-1)}}=
$$

$$
=\hat{Q}_{p-1}^{(s-2p+1)}\geqslant|a_{p-1,p-1}|+1-1=|a_{p-1,p-1}|.
$$

Обозначая подходящие дроби r-го порядка для дроби (5) через $\hat{A}_r/\hat{B}_r$, $r=0,1,\ldots$ и учитывая формулу разности для подходящих дробей двумерной цепной дроби [1], получаем

$$
\left|\frac{A_{r+1}}{B_{r+1}}-\frac{A_r}{B_r}\right|\leqslant\sum_{i=0}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]}\frac{|\Phi_i^{(r-2i-1)}-\Phi_i^{(r-2i)}|\prod\limits_{j=0}^{i}|a_{jj}|}{\prod\limits_{j=0}^{i}|Q_j^{(r-2j-1)}||Q_j^{(r-2j)}|}+
$$

$$
+\frac{\prod\limits_{i=0}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]+1}|a_{ii}|}{\prod\limits_{j=0}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]}|Q_j^{(r-2j-1)}|\prod\limits_{j=0}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]+1}|Q_j^{(r-2j)}|}\leqslant\frac{(-1)^{\left[\frac{r-1}{2}\right]}\prod\limits_{i=0}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]+1}(-|a_{ii}|)}{\prod\limits_{j=0}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]}\hat{Q}_j^{(r-2j-1)}\prod\limits_{j=0}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]+1}\hat{Q}_j^{(r-2j)}}+
$$

$$
+\sum_{i=0}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]}\frac{(\hat{\Phi}_i^{(r-2i-1)}-\hat{\Phi}_i^{(r-2i)})(-1)^{i+1}\prod\limits_{j=0}^{i}(-|a_{jj}|)}{\prod\limits_{j=0}^{i}\hat{Q}_j^{(r-2j-1)}\hat{Q}_j^{(r-2j)}}=\frac{\hat{A}_r}{\hat{B}_r}-\frac{\hat{A}_{r+1}}{\hat{B}_{r+1}}.
$$

Следовательно,

$$
\left|\frac{A_{r+1}}{B_{r+1}}-\frac{A_r}{B_r}\right|\leqslant\frac{\hat{A}_r}{\hat{B}_r}-\frac{\hat{A}_{r+1}}{\hat{B}_{r+1}},
$$

поэтому

$$
\sum_{r=0}^{m}\left|\frac{A_{r+1}}{B_{r+1}}-\frac{A_r}{B_r}\right|\leqslant\sum_{r=0}^{m}\left(\frac{\hat{A}_r}{\hat{B}_r}-\frac{\hat{A}_{r+1}}{\hat{B}_{r+1}}\right)=\frac{\hat{A}_0}{\hat{B}_0}-\frac{\hat{A}_{m+1}}{\hat{B}_{m+1}}.
$$

С учетом неравенств (7) имеем

$$\sum_{r=0}^{\infty}\left|\frac{A_{r+1}}{B_{r+1}}-\frac{A_r}{B_r}\right|\leqslant\frac{\hat{A}_0}{\hat{B}_0}-\lim_{m\to\infty}\frac{\hat{A}_{m+1}}{\hat{B}_{m+1}}=\lim_{m\to\infty}\frac{|a_{00}|}{\hat{Q}_0^{(m)}}\leqslant 1,$$

т. е. двумерная цепная дробь (1) абсолютно сходится.

Поскольку

$$\left|\frac{A_m}{B_m}\right|=\left|\frac{a_{00}}{Q_0^{(m-1)}}\right|\leqslant\frac{|a_{00}|}{\hat{Q}_0^{(m-1)}}\leqslant 1,$$

то множество значений дроби (1) принадлежит кругу $|z|\leqslant 1$.

Теорема 2. Двумерная цепная дробь (1) с комплексными компонентами, удовлетворяющая условиям

$$|b_{ii}|\geqslant 1+|a_{i+1,i}|+|a_{i,i+1}|+|a_{i+1,i+1}|, \tag{10}$$
$$|b_{ij}|\geqslant|a_{i+1,j}|+1,\quad i\neq j,\ i>j,$$
$$|b_{ij}|\geqslant|a_{i,j+1}|+1,\quad i\neq j,\ i<j$$

абсолютно сходится и множество ее значений принадлежит кругу

$$|z|\leqslant|a_{00}|. \tag{11}$$

Легко установить по рассмотренной в теореме 1 схеме, что в условиях теоремы 2 двумерная цепная дробь (5) является мажорантой для дроби (1), предварительно по индукции доказав справедливость неравенств

$$|Q_i^{(s-2i-1)}|\geqslant\hat{Q}_i^{(s-2i-1)}\geqslant 1,\ |Q_{1i}^{(s-2i-1)}|\geqslant\hat{Q}_{1i}^{(s-2i-1)}\geqslant 1,$$
$$|Q_{2i}^{(s-2i-1)}|\geqslant\hat{Q}_{2i}^{(s-2i-1)}\geqslant 1. \tag{12}$$

1. *Боднар Д. И., Кучминская Х. И.* О сходимости разложения функции двух переменных в соответствующую ветвящуюся цепную дробь.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 11, с. 3—6.
2. *Кучминская Х. И.* Соответствующая и присоединенная ветвящиеся цепные дроби для двойного степенного ряда.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 7, с. 614—617.
3. *Murphy J. A., O'Donohoe M. R.* A two-variable generalization of the Stieltjes-type continued fraction.— J. Comput. and Appl. Math., 1978, 4, N 3, p. 181—190.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 15.06.82

УДК 517.524

О. Н. Сусь

СХОДИМОСТЬ К ФУНКЦИИ ЕЕ ФОРМАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ В ДВУМЕРНУЮ СООТВЕТСТВУЮЩУЮ ЦЕПНУЮ ДРОБЬ

Пусть функция $f(x, y)$ двух комплексных переменных, определенная в некоторой области D, представима в виде ряда

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij}x^iy^j. \tag{1}$$

Тогда соответствующая ряду (1) двумерная цепная дробь имеет вид

$$f(x, y)=\cfrac{a_{00}}{1+\Phi_0+\sum\limits_{i=1}^{\infty}\cfrac{a_{ii}xy\,|}{|\,1+\Phi_i}},\quad \Phi_i=\sum_{n=i}^{\infty}\frac{a_{n+1,n}x\,|}{|\,1}+\sum_{n=i}^{\infty}\frac{a_{n,n+1}y\,|}{|\,1}, \tag{2}$$

коэффициенты a_{ik} однозначно определяются по коэффициентам c_{ik} [4, 5].

Подходящей дробью r-го порядка двумерной цепной дроби (2) называ-