С учетом неравенств (7) имеем

$$\sum_{r=0}^{\infty}\left|\frac{A_{r+1}}{B_{r+1}}-\frac{A_r}{B_r}\right|\leqslant\frac{\hat{A}_0}{\hat{B}_0}-\lim_{m\to\infty}\frac{\hat{A}_{m+1}}{\hat{B}_{m+1}}=\lim_{m\to\infty}\frac{|a_{00}|}{\hat{Q}_0^{(m)}}\leqslant 1,$$

т. е. двумерная цепная дробь (1) абсолютно сходится.

Поскольку

$$\left|\frac{A_m}{B_m}\right|=\left|\frac{a_{00}}{Q_0^{(m-1)}}\right|\leqslant\frac{|a_{00}|}{\hat{Q}_0^{(m-1)}}\leqslant 1,$$

то множество значений дроби (1) принадлежит кругу $|z|\leqslant 1$.

Теорема 2. Двумерная цепная дробь (1) с комплексными компонентами, удовлетворяющая условиям

$$|b_{ii}|\geqslant 1+|a_{i+1,i}|+|a_{i,i+1}|+|a_{i+1,i+1}|, \tag{10}$$

$$|b_{ij}|\geqslant|a_{i+1,j}|+1,\quad i\neq j,\ i>j,$$

$$|b_{ij}|\geqslant|a_{i,j+1}|+1,\quad i\neq j,\ i<j$$

абсолютно сходится и множество ее значений принадлежит кругу

$$|z|\leqslant|a_{00}|. \tag{11}$$

Легко установить по рассмотренной в теореме 1 схеме, что в условиях теоремы 2 двумерная цепная дробь (5) является мажорантой для дроби (1), предварительно по индукции доказав справедливость неравенств

$$|Q_i^{(s-2i-1)}|\geqslant\hat{Q}_i^{(s-2i-1)}\geqslant 1,\quad |Q_{1i}^{(s-2i-1)}|\geqslant\hat{Q}_{1i}^{(s-2i-1)}\geqslant 1,$$

$$|Q_{2i}^{(s-2i-1)}|\geqslant\hat{Q}_{2i}^{(s-2i-1)}\geqslant 1. \tag{12}$$

1. *Боднар Д. И., Кучминская Х. И.* О сходимости разложения функции двух переменных в соответствующую ветвящуюся цепную дробь.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 11, с. 3—6.
2. *Кучминская Х. И.* Соответствующая и присоединенная ветвящиеся цепные дроби для двойного степенного ряда.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 7, с. 614—617.
3. *Murphy J. A., O'Donohoe M. R.* A two-variable generalization of the Stieltjes-type continued fraction.— J. Comput. and Appl. Math., 1978, 4, N 3, p. 181—190.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 15.06.82

УДК 517.524

О. Н. Сусь

СХОДИМОСТЬ К ФУНКЦИИ ЕЕ ФОРМАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ В ДВУМЕРНУЮ СООТВЕТСТВУЮЩУЮ ЦЕПНУЮ ДРОБЬ

Пусть функция $f(x, y)$ двух комплексных переменных, определенная в некоторой области D, представима в виде ряда

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij}x^iy^j. \tag{1}$$

Тогда соответствующая ряду (1) двумерная цепная дробь имеет вид

$$f(x,y)=\cfrac{a_{00}}{1+\Phi_0+\sum\limits_{i=1}^{\infty}\cfrac{a_{ii}xy\,|}{|\,1+\Phi_i}},\quad \Phi_i=\sum_{n=i}^{\infty}\frac{a_{n+1,n}x\,|}{|\,1}+\sum_{n=i}^{\infty}\frac{a_{n,n+1}y\,|}{|\,1}, \tag{2}$$

коэффициенты a_{ik} однозначно определяются по коэффициентам c_{ik} [4, 5].

Подходящей дробью r-го порядка двумерной цепной дроби (2) называется выражение

$$\frac{P_r}{Q_r} = \cfrac{a_{00}}{1 + \Phi_0^{(r-1)} + \sum\limits_{i=1}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} \frac{a_{ii}xy\,|}{|\,1 + \Phi_i^{(r-2i-1)}}}, \qquad (3)$$

где

$$\Phi_i^{(k)} = \sum_{p=i}^{k} \frac{a_{p+1,i}x\,|}{|\,1} + \sum_{p=i}^{k} \frac{a_{i,p+1}y\,|}{|\,1}.$$

Предположим, что при разложении функции $f(x, y)$ в соответствующую двумерную цепную дробь известны остатки $u_{ij}(x, y) = u_{ij}$, $i, j = 0, 1, 2, \ldots$ такие, что

$$f(x, y) = \cfrac{a_{00}}{1 + \hat{\Phi}_0^{(r-1)} + \sum\limits_{i=1}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} \frac{a_{ii}xy|}{|\,1 + \hat{\Phi}_i^{(r-2i-1)}} + \frac{u_{\left[\frac{r-1}{2}\right]+1,\left[\frac{r-1}{2}\right]+1}}{|\,1}}, \qquad (4)$$

где

$$\hat{\Phi}_i^{(k)} = \sum_{p=i}^{k} \frac{a_{p+1,i}x\,|}{|\,1} + \frac{u_{k+2,i}\,|}{|\,1} + \sum_{p=i}^{k} \frac{a_{i,p+1}y\,|}{|\,1} + \frac{u_{i,k+2}\,|}{|\,1}.$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть 1) функция $f(x, y)$ двух комплексных переменных определена в области D, $D = \{|x| < M, |y| < M, |xy| < M\}$, где M — произвольная положительная константа; 2) $|a_{ij}| \leqslant \beta / M$, $0 < \beta \leqslant 1/8$; 3) остатки u_{ij}, $i, j = 0, 1, 2, \ldots$ соответствующей двумерной цепной дроби (4) принадлежат области $|1 + u_{ij}| \geqslant 1/R$, где $R = 2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)$.

Тогда дробь (2) сходится к функции $f(x, y)$ и справедливы оценки:

при $0 < \beta < 1/8$

$$\left|\frac{P_r}{Q_r} - f(x, y)\right| \leqslant K_1 \left(\frac{4\beta}{(\sqrt{1-4\beta} + \sqrt{1-8\beta})^2}\right)^{\frac{r}{2}} - K_2 \left(\frac{4\beta}{(1 + \sqrt{1-4\beta})^2}\right)^{r}; \qquad (5)$$

при $\beta = 1/8$

$$\left|\frac{P_r}{Q_r} - f(x, y)\right| \leqslant K_3 \left(\frac{8}{9(4 - \sqrt{2})^2}\right)^{\frac{r}{2}} - K_4 \left(\frac{1}{3 + 2\sqrt{2}}\right)^{r}, \qquad (6)$$

где K_i, $i = \overline{1, 4}$ — положительные абсолютные константы, зависящие от M, R и β.

Доказательство. Используя известную методику [3] для формулы разности между подходящей дробью r-го порядка и функцией $f(x, y)$, получаем

$$\frac{P_r}{Q_r} f(x, y) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} (-1)^i \frac{(\hat{\Phi}_i^{(r-2i-1)} - \Phi_i^{(r-2i-1)}) \prod\limits_{j=0}^{i} a_{jj}(xy)^j}{\prod\limits_{j=0}^{i} Q_j^{(r-2j-1)} \prod\limits_{j=0}^{i} \hat{Q}_j^{(r-2j-1)}} +$$

$$+ \frac{(-1)^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} \prod\limits_{j=0}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} a_{jj}(xy)^j\, u_{\left[\frac{r-1}{2}\right]+1,\left[\frac{r-1}{2}\right]+1}}{\prod\limits_{j=0}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} Q_j^{(r-2j-1)} \prod\limits_{j=0}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} \hat{Q}_j^{(r-2j-1)}}. \qquad (7)$$

Отметим, что при введении обозначений

$$Q_i^{(r-2i-1)} = 1 + \Phi_i^{(r-2i-1)} + \sum_{j=i+1}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} \frac{a_{jj}xy}{1+\Phi_i^{(r-2j-1)}} \tag{8}$$

справедливо рекуррентное соотношение

$$Q_i^{(r-2i-1)} = 1 + \Phi_i^{(r-2i-1)} + \frac{a_{i+1,i+1}xy}{Q_{i+1}^{(r-2i-3)}}, \quad \frac{1}{Q_i^{(p)}} = 0, \; p < 0. \tag{9}$$

Рассмотрим случай $0 < \beta < {}^1/_8$. Чтобы оценить разность $\hat{\Phi}_i^{(r-2i-1)} - \Phi_i^{(r-2i-1)}$, введем сокращенные обозначения

$$Q_{1j}^{(r-2j-1)} = 1 + \sum_{p=j+1}^{r-2j-1} \frac{a_{j+p,j}x\,|}{|\,1}, \quad Q_{2j}^{(r-2j-1)} = 1 + \sum_{p=j+1}^{r-2j-1} \frac{a_{i,i+p}y\,|}{|\,1},$$

$$\hat{Q}_{1j}^{(r-2j-1)} = 1 + \sum_{p=j+1}^{r-2j-1} \frac{a_{i+p,i}x\,|}{|\,1} + \frac{u_{r-i,i}\,|}{|\,1}, \tag{10}$$

$$\hat{Q}_{2j}^{(r-2j-1)} = 1 + \sum_{p=j+1}^{r-2j-1} \frac{a_{i,i+p}y\,|}{|\,1} + \frac{u_{i,r-i}\,|}{|\,1}.$$

Тогда

$$\left|\hat{\Phi}_i^{(r-2i-1)} - \Phi_i^{(r-2i-1)}\right| \leqslant \frac{\prod\limits_{j=1}^{r-2i-1} |a_{i+j,i}x^{r-2i-1}|\,|u_{r-2i,-i}|}{\left|\prod\limits_{j=1}^{r-2i-1} Q_{1j}^{(r-2j-1)} \prod\limits_{j=1}^{r-2i-1} \hat{Q}_{1j}^{(r-2j-1)}\right|} +$$

$$+ \frac{\prod\limits_{j=1}^{r-2i-1} |a_{i,i+j}y^{r-2i-1}|\,|u_{i,r-2i}|}{\left|\prod\limits_{j=1}^{r-2i-1} Q_{2j}^{(r-2j-1)} \prod\limits_{j=1}^{r-2i-1} \hat{Q}_{2j}^{(r-2j-1)}\right|}. \tag{11}$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{|Q_{1j}^{(r-2j-1)}|} \leqslant \frac{2}{1+\sqrt{1-4\beta}},$$

получаем

$$\left|\hat{\Phi}_i^{(r-2i-1)} - \Phi_i^{(r-2i-1)}\right| \leqslant 2\beta(1+R)\left(\frac{4\beta}{(1+\sqrt{1-4\beta})^2}\right)^{r-2i-2}. \tag{12}$$

Используя условия теоремы, рекуррентное соотношение (9) и методику работы [2], находим

$$|Q_i^{(r-2j-1)}| \geqslant \frac{\sqrt{1-4\beta}+\sqrt{1-8\beta}}{2}, \quad |\hat{Q}_i^{(r-2j-1)}| \geqslant \frac{\sqrt{1-4\beta}+\sqrt{1-8\beta}}{2}. \tag{13}$$

Подставляя только что найденные оценки (12), (13) в (7), получаем

$$\left|\frac{P_r}{Q_r} - f(x,y)\right| \leqslant \frac{2(1+R)(4\beta)^r\beta}{M(4+3\sqrt{2})((1+\sqrt{1-4\beta})^2)^{r-2}} \times$$

$$\times \left(\left(\frac{(1+\sqrt{1-4\beta})^4}{4\beta(\sqrt{1-4\beta}+\sqrt{1-8\beta})^2}\right)^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} - 1\right) + \frac{K_0}{M} \times$$

$$\times \left(\frac{4\beta}{(\sqrt{1-4\beta}+\sqrt{1-8\beta})^2}\right)^{\left[\frac{r-1}{2}\right]-1}. \tag{14}$$

Здесь

$$K_0 = \begin{cases} 0, & \text{если } r \text{ четное,} \\ \dfrac{1+R}{1-2\beta R^2}, & \text{если } r \text{ нечетное.} \end{cases}$$

В частности, при четном r

$$\left|\frac{P_r}{Q_r} - f(x, y)\right| \leqslant C_1 \left(\frac{4\beta}{(\sqrt{1-4\beta}+\sqrt{1-8\beta})^2}\right)^{\frac{r}{2}} - C_2 \left(\frac{4\beta}{(1+\sqrt{1-4\beta})^2}\right)^r, \tag{15}$$

где

$$C_1 = \frac{8\beta^2 (1+R)(\sqrt{1-4\beta}+\sqrt{1-8\beta})^2}{M(4+3\sqrt{2})}; \quad C_2 = \frac{2\beta(1+R)(1+\sqrt{1-4\beta})^4}{M(4+3\sqrt{2})},$$

и при нечетном r

$$\left|\frac{P_r}{Q_r} - f(x, y)\right| \leqslant A_1 \left(\frac{4\beta}{(\sqrt{1-4\beta}+\sqrt{1-8\beta})^2}\right)^{\frac{r-1}{2}} - A_2 \left(\frac{4\beta}{(1+\sqrt{1-4\beta})^2}\right)^{r-1}, \tag{16}$$

где

$$A_1 = \frac{8\beta^2 (1+R)(1+\sqrt{1-4\beta})^2}{M(4+3\sqrt{2})} + \frac{1+R}{M(1-2\beta R^2)};$$

$$A_2 = \frac{8\beta^2 (1+R)(1+\sqrt{1-4\beta})^2}{M(4+3\sqrt{2})}.$$

Выбрав $K_1 = \max\{C_1, A_1\}$, $K_2 = \min\{C_2, A_2\}$, получим требуемую оценку (5).

Пусть $\beta = {}^1/_8$. Используя очевидное неравенство, которое справедливо для конечной цепной дроби [1]

$$\frac{1}{2} = 1 - \cfrac{1/4}{1 - \cfrac{1/4}{1 - \cdots}} < \left[1 + \cfrac{1/4}{1 + \cfrac{1/4}{1 + \cdots + 1/4}}\right] < 1 + \cfrac{1/4}{1 - \cfrac{1/4}{1 - \cdots}} = \frac{3}{2},$$

и рекуррентное соотношение (9), получаем

$$|Q^{(r-2i-1)}| \geqslant \frac{3}{8}(4-\sqrt{2}), \quad |\hat{Q}^{(r-2i-1)}| \geqslant \frac{3}{8}(4-\sqrt{2}). \tag{17}$$

Следовательно, оценка разности между $f(x, y)$ и r-й подходящей дробью принимает вид

$$\left|\frac{P_r}{Q_r} - f(x, y)\right| \leqslant \frac{1+R}{M(84\sqrt{2}-13)(3+2\sqrt{2})^{r-1}} \times \left(\left(\left(\frac{8(3+2\sqrt{2})^2}{9(4-\sqrt{2})^2}\right)^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} - 1\right) + \frac{\hat{K}_0}{M}\left(\frac{8}{9(4-\sqrt{2})^2}\right)^{\left[\frac{r-1}{2}\right]+1}\right). \tag{18}$$

Здесь

$$\hat{K}_0 = \begin{cases} 0, & \text{если } r \text{ четное,} \\ \dfrac{4(1+R)}{4-R^2}, & \text{если } r \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Если r четное, то

$$\left|\frac{P_r}{Q_r} - f(x, y)\right| \leqslant C_3 \left(\frac{8}{9(4-\sqrt{2})^2}\right)^{\frac{r}{2}} - C_4 \left(\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\right)^r, \tag{19}$$

где

$$C_3 = \frac{9(1+R)(4-\sqrt{2})^2}{8M(84\sqrt{2}-13)(3+2\sqrt{2})}; \quad C_4 = \frac{(1+R)(3+2\sqrt{2})}{M(84\sqrt{2}-13)};$$

если r нечетное, то

$$\left|\frac{P_r}{Q_r} - f(x, y)\right| \leqslant A_3\left(\frac{8}{9(4-\sqrt{2})^2}\right)^{\frac{r-1}{2}} - A_4\left(\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\right)^{r-1}, \tag{20}$$

где

$$A_3 = \frac{1+R}{M(84\sqrt{2}-13)} + \frac{4(1+R)}{M(4-R^2)}; \quad A_4 = \frac{1+R}{M(84\sqrt{2}-13)}.$$

Выбрав $K_3 = \max\{C_3, A_3\}$, $K_4 = \min\{C_4, A_4\}$, получим оценку (6). Теорема доказана.

Замечание. Выполнение первых двух условий теоремы обеспечивает равномерную сходимость двумерной цепной дроби (2).

1. *Боднар Д. І.* Аналог ознаки збіжності Ворпіцького для гіллястих ланцюгових дробів.— В кн.: Питання якісної теорії диференціальних рівнянь та їх застосування. К. : Ін-т математики АН УРСР, 1978, с. 7—8.
2. *Боднар Д. И., Кучминская Х. И.* О сходимости разложения функции двух переменных в соответствующую ветвящуюся цепную дробь.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 11, с. 3—6.
3. *Боднар Д. И., Олексив И. Я.* О сходимости ветвящихся цепных дробей с неотрицательными членами.— Укр. мат. журн., 1976, 28, № 3, с. 373—377.
4. *Кучминская Х. И.* Соответствующая и присоединенная ветвящиеся цепные дроби для двойного степенного ряда.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 7, с. 614—617.
5. *Murphy J. A., O'Donohoe M. R.* A two-variable generalization of the Stieltjes-type continued fraction.— J. Comput. and Appl. Math., 1978, 4, N 3, p. 181—190.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 05.07.82

УДК 517.518

Н. А. Недашковский

О СХОДИМОСТИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ

Многочисленные применения в электротехнике [2], физике [3], механике [6] требуют дальнейшего всестороннего развития аналитической теории ветвящихся цепных дробей (ВЦД). Целью настоящей работы является получение новых достаточных признаков сходимости и вычислительной устойчивости ВЦД с комплексными элементами.

Рассмотрим композицию

$$S_0(W) = s_0(W), \quad S_m = S_{m-1}(s_{k_1k_2\ldots k_m}(W)) \quad (m = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1}$$

дробно-линейных преобразований

$$s_0(W) = W, \quad s_{k_1k_2\ldots k_m} = \sum_{k_m=1}^{N} \frac{a_{k_1k_2\ldots k_m}}{b_{k_1k_2\ldots k_m} + W} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2}$$

Бесконечной ветвящейся цепной дробью будем называть композицию $S(W)$ бесконечного числа дробно-линейных преобразований. В дальнейшем ВЦД будем записывать в виде

$$D = \sum_{k_1=1}^{N} \frac{a_{k_1}}{b_{k_1}} + \sum_{k_2=1}^{N} \frac{a_{k_1k_2}}{b_{k_1k_2}} + \ldots + \sum_{k_i=1}^{N} \frac{a_{k_1k_2\ldots k_i}}{b_{k_1k_2\ldots k_i}} + \ldots \tag{3}$$

Конечную дробь

$$D^m = \sum_{k_1=1}^{N} \frac{a_{k_1}}{b_{k_1}} + \sum_{k_2=1}^{N} \frac{a_{k_1k_2}}{b_{k_1k_2}} + \ldots + \sum_{k_m=1}^{N} \frac{a_{k_1k_2\ldots k_m}}{b_{k_1k_2\ldots k_m}} \tag{4}$$