если r нечетное, то

$$\left|\frac{P_r}{Q_r} - f(x, y)\right| \leqslant A_3\left(\frac{8}{9(4-\sqrt{2})^2}\right)^{\frac{r-1}{2}} - A_4\left(\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\right)^{r-1}, \qquad (20)$$

где

$$A_3 = \frac{1+R}{M(84\sqrt{2}-13)} + \frac{4(1+R)}{M(4-R^2)}; \quad A_4 = \frac{1+R}{M(84\sqrt{2}-13)}.$$

Выбрав $K_3 = \max\{C_3, A_3\}$, $K_4 = \min\{C_4, A_4\}$, получим оценку (6). Теорема доказана.

Замечание. Выполнение первых двух условий теоремы обеспечивает равномерную сходимость двумерной цепной дроби (2).

1. *Боднар Д. І.* Аналог ознаки збіжності Ворпіцького для гіллястих ланцюгових дробів.— В кн.: Питання якісної теорії диференціальних рівнянь та їх застосування. К. : Ін-т математики АН УРСР, 1978, с. 7—8.
2. *Боднар Д. И., Кучминская Х. И.* О сходимости разложения функции двух переменных в соответствующую ветвящуюся цепную дробь.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 11, с. 3—6.
3. *Боднар Д. И., Олексив И. Я.* О сходимости ветвящихся цепных дробей с неотрицательными членами.— Укр. мат. журн., 1976, 28, № 3, с. 373—377.
4. *Кучминская Х. И.* Соответствующая и присоединенная ветвящиеся цепные дроби для двойного степенного ряда.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 7, с. 614—617.
5. *Murphy J. A., O'Donohoe M. R.* A two-variable generalization of the Stieltjes-type continued fraction.— J. Comput. and Appl. Math., 1978, 4, N 3, p. 181—190.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 05.07.82

УДК 517.518

Н. А. Недашковский

О СХОДИМОСТИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ

Многочисленные применения в электротехнике [2], физике [3], механике [6] требуют дальнейшего всестороннего развития аналитической теории ветвящихся цепных дробей (ВЦД). Целью настоящей работы является получение новых достаточных признаков сходимости и вычислительной устойчивости ВЦД с комплексными элементами.

Рассмотрим композицию

$$S_0(W) = s_0(W), \quad S_m = S_{m-1}(s_{k_1k_2\ldots k_m}(W)) \quad (m = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (1)$$

дробно-линейных преобразований

$$s_0(W) = W, \quad s_{k_1k_2\ldots k_m} = \sum_{k_m=1}^{N} \frac{a_{k_1k_2\ldots k_m}}{b_{k_1k_2\ldots k_m} + W} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (2)$$

Бесконечной ветвящейся цепной дробью будем называть композицию $S(W)$ бесконечного числа дробно-линейных преобразований. В дальнейшем ВЦД будем записывать в виде

$$D = \sum_{k_1=1}^{N} \frac{a_{k_1}}{b_{k_1}} + \sum_{k_2=1}^{N} \frac{a_{k_1k_2}}{b_{k_1k_2}} + \ldots + \sum_{k_i=1}^{N} \frac{a_{k_1k_2\ldots k_i}}{b_{k_1k_2\ldots k_i}} + \ldots \qquad (3)$$

Конечную дробь

$$D^m = \sum_{k_1=1}^{N} \frac{a_{k_1}}{b_{k_1}} + \sum_{k_2=1}^{N} \frac{a_{k_1k_2}}{b_{k_1k_2}} + \ldots + \sum_{k_m=1}^{N} \frac{a_{k_1k_2\ldots k_m}}{b_{k_1k_2\ldots k_m}} \qquad (4)$$

будем называть m-й подходящей дробью бесконечной ВЦД (3). Нам также понадобятся обозначения

$$D^{m}_{k_1k_2\ldots k_s} = b_{k_1k_2\ldots k_s} + \sum_{k_{s+1}=1}^{N} \frac{a_{k_1k_2\ldots k_{s+1}}}{b_{k_1k_2\ldots k_{s+1}}} + \ldots + \sum_{k_m=1}^{N} \frac{a_{k_1k_2\ldots k_m}}{b_{k_1k_2\ldots k_m}}. \tag{5}$$

Определение 1. ВЦД (3) называется абсолютно сходящейся, если сходится следующий ряд, составленный из подходящих дробей:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} | D^{\nu+1} - D^{\nu} |. \tag{6}$$

Введем в рассмотрение ВЦД

$$D^* = \sum_{k_1=1}^{N} \frac{a^*_{k_1}}{b^*_{k_1}} + \sum_{k_2=1}^{N} \frac{a^*_{k_1k_2}}{b^*_{k_1k_2}} + \ldots + \sum_{k_i=1}^{N} \frac{a^*_{k_1k_2\ldots k_i}}{b^*_{k_1k_2\ldots k_i}} + \ldots \tag{7}$$

Теорема 1. Пусть дроби (3) и (7) эквивалентны таким образом, что существует последовательность ненулевых констант $\{r_{k_1\ldots k_s}\}$, которая для всех $s = 1, 2, 3, \ldots$ удовлетворяет условию

$$a^*_{k_1\ldots k_s} = r_{k_1k_2\ldots k_s} r_{k_1k_2\ldots k_{s-1}} a_{k_1k_2\ldots k_s}, \tag{8}$$

$$b^*_{k_1k_2\ldots k_s} = r_{k_1k_2\ldots k_s} b_{k_1k_2\ldots k_s}. \tag{9}$$

Тогда абсолютная сходимость дроби (7) достаточна для абсолютной сходимости ВЦД (3).

Доказательство. Используя формулу разности между соседними подходящими дробями, можем записать

$$| D^{m+1} - D^{m} | = \left| \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_m=1}^{N} \frac{a_{k_1k_2\ldots k_{m+1}}}{b_{k_1k_2\ldots k_{m+1}}} \prod_{i=1}^{m} \frac{a_{k_1k_2\ldots k_i}}{D^{m}_{k_1\ldots k_i} D^{m+1}_{k_1\ldots k_i}} \right| =$$

$$= \left| \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_m=1}^{N} r_{k_1} \frac{a_{k_1k_2\ldots k_{m+1}} r_{k_1k_2\ldots k_{m+1}} r_{k_1k_2\ldots k_m}}{b_{k_1k_2\ldots k_{m+1}}} \prod_{i=1}^{m} \frac{a_{k_1\ldots k_{m+1}} r_{k_1\ldots k_i} r_{k_1\ldots k_{i-1}}}{D^{m}_{k_1\ldots k_i} D^{m+1}_{k_1\ldots k_i} r^2_{k_1\ldots k_i}} \right| =$$

$$= \left| \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_{m+1}=1}^{N} r_{k_1} \frac{a^*_{k_1k_2\ldots k_{m+1}}}{b^*_{k_1k_2\ldots k_{m+1}}} \prod_{i=1}^{m} \frac{a^*_{k_1k_2\ldots k_i}}{D^{*m}_{k_1k_2\ldots k_i} D^{*m+1}_{k_1k_2\ldots k_i}} \right|, \tag{10}$$

откуда

$$\sum_{m=1}^{\infty} | D^{m+1} - D^{m} | \leqslant \max \{r_{k_1}\} \sum_{m=1}^{\infty} | D^{*m} - D^{*m+1} |, \tag{11}$$

что и требовалось доказать.

Полученная теорема об эквивалентных преобразованиях ВЦД позволяет получить ряд достаточных признаков сходимости для дробей с комплексными элементами. Введем в рассмотрение ВЦД, эквивалентную данной бесконечной дроби (3):

$$\sum_{k_1=1}^{N} \frac{a_{k_1}\rho_{k_1}}{b_{k_1}\rho_{k_1}} + \sum_{k_2=1}^{N} \frac{a_{k_1k_2}\rho_{k_1}\rho_{k_1k_2}}{b_{k_1k_2}\rho_{k_1k_2}} + \ldots + \sum_{k_i=1}^{N} \frac{a_{k_1\ldots k_i}\rho_{k_1\ldots k_i}\rho_{k_1\ldots k_{i-1}}}{b_{k_1\ldots k_i}\rho_{k_1\ldots k_i}} + \ldots \tag{12}$$

Теорема 2. Если существуют такие действительные $p_{k_1k_2\ldots k_i} > N$, что для элементов дроби (3) выполняются неравенства

$$\left| \frac{a_{k_1}}{b_{k_1}} \right| \leqslant \frac{p_{k_1} - N}{p_{k_1}}, \tag{13}$$

$$\frac{| a_{k_1k_2\ldots k_i} |}{| b_{k_1k_2\ldots k_{i-1}} b_{k_1k_2\ldots k_i} |} \leqslant \frac{p_{k_1k_2\ldots k_i} - N}{p_{k_1k_2\ldots k_{i-1}} p_{k_1k_2\ldots k_i}} \quad (i = 1, 2, \ldots; \ \ k_i = \overline{1, N}), \tag{14}$$

то ВЦД (3) абсолютно сходится к некоторому конечному значению d.

Доказательство. Применив обобщенный признак сходимости Прингсхейма [5] для ВЦД (12), получим соотношения

$$|b_{k_1}\rho_{k_1}| \geqslant N + |a_{k_1}\rho_{k_1}|, \tag{15}$$

$$|b_{k_1k_2\ldots k_i}\rho_{k_1k_2\ldots k_i}| \geqslant N + |a_{k_1k_2\ldots k_i}\rho_{k_1k_2\ldots k_i}\rho_{k_1k_2\ldots k_{i-1}}|, \tag{16}$$

выполнение которых достаточно для абсолютной сходимости дроби (3) согласно теореме 1. Положим

$$\rho_{k_1k_2\ldots k_s} = |p_{k_1k_2\ldots k_s}/b_{k_1k_2\ldots k_s}|,$$

откуда

$$\left|\frac{a_{k_1}}{b_{k_1}}\right| \leqslant \frac{p_{k_1} - N}{p_{k_1}}$$

и, следовательно,

$$p_{k_1k_2\ldots k_i} \geqslant N + \left|a_{k_1k_2\ldots k_i}\frac{p_{k_1k_2\ldots k_i}}{b_{k_1k_2\ldots k_i}}\frac{p_{k_1k_2\ldots k_{i-1}}}{b_{k_1k_2\ldots k_{i-1}}}\right|,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Пусть $b_{k_1k_2\ldots k_i} = 1$ и $p_{k_1k_2\ldots k_i} = 2N$, тогда получим следующий достаточный признак сходимости

$$|a_{k_1k_2\ldots k_i}| \leqslant \frac{1}{4N} \tag{17}$$

для бесконечной ВЦД вида

$$\sum_{k_1=1}^{N}\frac{a_{k_1}}{1} + \sum_{k_2=1}^{N}\frac{a_{k_1k_2}}{1} + \ldots + \sum_{k_i=1}^{N}\frac{a_{k_1k_2\ldots k_i}}{1} + \ldots \tag{18}$$

Для $N = 1$ этот признак получен Ворпицким [7] и обобщен на случай произвольного N Д. И. Боднаром [1].

Следствие 2. Положим $a_{k_1k_2\ldots k_s} = 1$ и $p_{k_1k_2\ldots k_{2s}} = p_{k_1k_2\ldots k_{2s-1}} = N|b_{k_1k_2\ldots k_{2s}}|$. Тогда на основании теоремы 2 получим следующие соотношения:

$$\frac{1}{|b_{k_1k_2\ldots k_{2i-1}}b_{k_1k_2\ldots k_{2i}}|} \leqslant \frac{N|b_{k_1k_2\ldots k_{2i}}| - N}{b^2_{k_1k_2\ldots k_{2i}}N^2},$$

$$\frac{1}{|b_{k_1k_2\ldots k_{2i-1}}|} + \frac{1}{N|b_{k_1k_2\ldots k_{2i}}|} \leqslant \frac{1}{N} \tag{19}$$

или более сильное неравенство

$$\frac{1}{|b_{k_1k_2\ldots k_{2i-1}}|} + \frac{1}{|b_{k_1k_2\ldots k_{2i}}|} \leqslant \frac{1}{N}. \tag{20}$$

Условия (19), (20) являются достаточными признаками сходимости для бесконечной дроби

$$\sum_{k_1=1}^{N}\frac{1}{b_{k_1}} + \sum_{k_2=1}^{N}\frac{1}{b_{k_1k_2}} + \ldots + \sum_{k_i=1}^{N}\frac{1}{b_{k_1k_2\ldots k_i}} + \ldots \tag{21}$$

Теорема 3. Если существуют такие действительные $p_{k_1k_2\ldots k_i} > 1$, что для элементов дроби (3) выполняются неравенства

$$\sum_{k_1=1}^{N}\left|\frac{p_{k_1}a_{k_1}}{b_{k_1}}\right| \leqslant p_{k_1} - 1,$$

$$\sum_{k_i=1}^{N}\left|\frac{p_{k_1k_2\ldots k_{i-1}}a_{k_1k_2\ldots k_i}p_{k_1k_2\ldots k_i}}{b_{k_1k_2\ldots k_i}b_{k_1k_2\ldots k_{i-1}}}\right| \leqslant p_{k_1k_2\ldots k_{i-1}} - 1, \tag{22}$$

то ВЦД (3) абсолютно сходится к некоторому конечному значению d.

Доказательство. Применив достаточный признак сходимости [4]

$$|b_{k_1k_2\ldots k_{i-1}}| \geqslant 1 + \sum_{k_i=1}^{N} |a_{k_1k_2\ldots k_i}| \tag{23}$$

к дроби (12), получим условие сходимости

$$|b_{k_1k_2\ldots k_{i-1}}\rho_{k_1k_2\ldots k_{i-1}}| \geqslant 1 + \sum_{k_i=1}^{N} |a_{k_1k_2\ldots k_i}\rho_{k_1k_2\ldots k_i}\rho_{k_1k_2\ldots k_{i-1}}|. \tag{24}$$

Положив $\rho_{k_1k_2\ldots k_s} = \dfrac{p_{k_1k_2\ldots k_s}}{b_{k_1k_2\ldots k_s}}$, получим неравенство

$$1 + \sum_{k_i=1}^{N} \left| \frac{p_{k_1k_2\ldots k_{i-1}} a_{k_1k_2\ldots k_i} p_{k_1k_2\ldots k_i}}{b_{k_1k_2\ldots k_i} b_{k_1k_2\ldots k_{i-1}}} \right| \leqslant \left| \frac{b_{k_1k_2\ldots k_{i-1}}}{b_{k_1k_2\ldots k_{i-1}}} \right| p_{k_1k_2\ldots k_{i-1}},$$

из которого следует неравенство (22). При выполнении неравенства (22) дробь (3) согласно теореме 1 сходится абсолютно. Это и требовалось доказать.

Следствие 3. Положим $b_{k_1k_2\ldots k_i} = 1$ и $p_{k_1k_2\ldots k_i} = 2$. Тогда получим достаточный признак сходимости ВЦД

$$\sum_{k_i=1}^{N} |a_{k_1k_2\ldots k}| \leqslant \frac{1}{4} \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\ \ k_i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N) \tag{25}$$

для дробей вида (18).

Следствие 4. Пусть $a_{k_1k_2\ldots k_i} = 1$ и $p_{k_1k_2\ldots k_{2s-1}} = p_{k_1k_2\ldots k_{2s-1}} = |b_{k_1k_2\ldots k_{2s-1}}| > 1$. Тогда условие сходимости (22) перепишется в виде

$$\sum_{k_{2s}=1}^{N} \left| \frac{b_{k_1k_2\ldots k_{2s-1}}}{b_{k_1k_2\ldots k_{2s}}} \right| \leqslant |b_{k_1k_2\ldots k_{2s-1}}| - 1,$$

откуда немедленно следует достаточный признак сходимости

$$\frac{1}{|b_{k_1k_2\ldots k_{2s-1}}|} + \sum_{k_{2s}=1}^{N} \frac{1}{|b_{k_1k_2\ldots k_{2s}}|} \leqslant 1 \ (s = 1,\ 2,\ \ldots;\ \ k_{2s} = \overline{1,\ N};$$

$$k_{2s-1} = \overline{1,\ N}) \tag{26}$$

для ВЦД вида (21) с комплексными элементами.

Остановимся на анализе вычислительной устойчивости ВЦД. При вычислениях оконечных ВЦД на ЭВМ погрешности возникают по двум причинам: во-первых, из-за округления самих компонент дробей и, во-вторых, при выполнении арифметических операций над ними. В работах [4, 5] проанализированы погрешности округления, которые возникают при вычислении ВЦД на ЭВМ с t-разрядной мантиссой, за счет приближенного выполнения арифметических операций. Методом обратного анализа погрешностей показано, что процессу вычисления дроби на ЭВМ снизу — вверх соответствуют эквивалентные возмущения компонент дроби, которые не превышают по модулю погрешностей округления этих элементов до t разрядов ЭВМ. Этот результат позволяет сконцентрировать наше внимание только на устойчивости ВЦД относительно возмущений их компонент.

Рассмотрим конечную ВЦД

$$\hat{D}^m = \sum_{k_1=1}^{N} \frac{\hat{a}_{k_1}}{\hat{b}_{k_1}} + \sum_{k_2=1}^{N} \frac{\hat{a}_{k_1k_2}}{\hat{b}_{k_1k_2}} + \ldots + \sum_{k_m=1}^{N} \frac{\hat{a}_{k_1k_2\ldots k_m}}{\hat{b}_{k_1k_2\ldots k_m}}, \tag{27}$$

элементы которой связаны с элементами дроби (4) соотношениями

$$\hat{a}_{k_1k_2\ldots k_s} = (1 + \alpha_{k_1k_2\ldots k_s})\, a_{k_1k_2\ldots k_s}, \tag{28}$$

$$\hat{b}_{k_1k_2\ldots k_s} = (1 + \beta_{k_1k_2\ldots k_s})\, b_{k_1k_2\ldots k_s},$$

где $\alpha_{k_1k_2\ldots k_s} \leqslant \delta < 1$; $\beta_{k_1k_2\ldots k_s} \leqslant \delta < 1$.

Определение 2. Будем говорить, что конечная ВЦД (4) устойчива относительно возмущений $\alpha_{k_1k_2\ldots k_s}$, $\beta_{k_1k_2\ldots k_s}$ $(s = \overline{1, m})$ ее элементов, если существует ограниченная константа C, не зависящая от m и такая, что

$$|\hat{D}^m - D^m| \leqslant C\delta. \tag{29}$$

Теорема 4. Пусть две конечные ВЦД эквивалентны таким образом, что для их элементов выполняются соотношения вида (8). Тогда из вычислительной устойчивости одной из ВЦД следует устойчивость другой.

Доказательство. Проверить утверждение теоремы можно, использовав формулу погрешностей округления при вычислении ВЦД [4] и схему доказательства теоремы 1.

Следствие 5. В работах [4, 5] показана вычислительная устойчивость конечных ВЦД, удовлетворяющих условиям (23) или обобщенному признаку Прингсхейма. По теореме 4 немедленно следует и вычислительная устойчивость ВЦД, удовлетворяющих условиям (14), (22), а также и (17), (19), (25), (26).

Все полученные признаки сходимости и вычислительной устойчивости легко проверяются, поэтому могут быть использованы на практике.

1. *Боднар Д. И.* Аналог признака сходимости Ворпицкого для ветвящихся цепных дробей.— В кн.: Математический сборник. Киев : Наук. думка, 1976, с. 40—43.
2. *Ерохов И. В.* Возможность применения аппарата цепных ветвящихся дробей для электротехнических расчетов.— Теорет. электротехника, 1978, № 24, с. 46—51.
3. *Журина М. И., Попова А. М., Прудников А. П.* Численное решение одного интегрального уравнения квантовой механики методом Падэ.— В кн.: Цепные дроби и их применение. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1976, с. 51—52.
4. *Недашковский Н. А.* Решение систем линейных алгебраических уравнений ветвящимися цепными дробями : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1980.— 16 с.
5. *Недашковский Н. А.* Сходимость и вычислительная устойчивость ветвящихся цепных дробей с элементами, удовлетворяющими условиям типа Прингсгейма.— В кн.: Питання якісної теорії диференціальних рівнянь та їх застосування. К.: Ін-т математики АН УРСР, 1978, с. 43—44.
6. *Терских В. П.* Цепные дроби — модели колеблющихся цепных систем.— В кн.: Цепные дроби и их применение. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1976, с. 34—41.
7. *Jones W. B., Thron W. J.* Cotinued fraction: analytic theory and applications.— In: Encyclopedia of mathematics and its applications, 1980, vol. 11, p. 428.

Тернопольский финансово-экономический институт Получено 24.08.82

УДК 512.8

О. М. Мельник

ПОДОБИЕ МАТРИЧНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Пусть полиномиальные матрицы $A(x) = Ex^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m$ и $B(x) = Ex^m + B_1x^{m-1} + \ldots + B_m$, где A_j, B_j $(j = \overline{1, m})$ — $n \times n$-матрицы над $\mathbb{C}$, имеют форму Смита $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \varepsilon_1(x), \ldots, \varepsilon_t(x))$. Тогда матрицы $A(x)$ и $B(x)$ полускалярно эквивалентны [1] соответственно матрицам

$$F^A(x) = C_1A(x)\,Q_1(x) =$$