Используя формулы (8), уравнения (6), (12) и граничные условия (9), (11), (13) теории взаимосвязанной механотермодиффузии для тел с тонкими покрытиями в зависимости от решения конкретных задач могут быть записаны также относительно переменных t, c или S, c. В частном случае, при $d_s = 0$, $\lambda_\theta = \lambda_3$, $G' = \infty$ из функционала (1) вытекает вариационное уравнение взаимосвязанной термоупругости для тел с покрытием, моделируемым тонкой оболочкой на основе классической теории Кирхгофа — Лява. Тогда, определяя интегральные характеристики температуры в виде

$$T_1 = (1 + 2h_t h)^{-1} [(1 + h_t h) t_т + h_t t_c^+],$$
$$T_2 = (1 + 2h_t h)^{-1} [h_t h (t_c^+ - t_т)], \tag{14}$$

из уравнений (9), (11) без учета влияния деформации на процесс теплопроводности получаем граничные условия термомеханического контакта на границе тело — покрытие, которые совпадают с уравнениями [5], полученными иным путем.

1. *Абовский Н. П., Андреев Н. П., Деруга А. П.* Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек.— М. : Наука, 1978.— 288 с.
2. *Ефимов В. А., Малый В. И., Толкачева Н. М.* Контактная задача для упругого тела с тонким покрытием.— Механика твердого тела, 1969, № 1, с. 166—174.
3. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью.— Киев : Наук. думка, 1973.— 248 с.
4. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* Вариационная форма уравнений теории термодиффузионных процессов в деформируемом твердом теле.— Прикл. математика и механика, 1969, 33, № 4, с. 774—776.
5. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* Температурные поля и напряжения в телах с тонкими покрытиями.— Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1967, вып. 7, с. 227—233.
6. *Похмурский В. И.* Выносливость сталей и сплавов после их диффузионного насыщения.— Физ.-хим. механика материалов, 1967, 3, № 5.
7. *Седов Л. И.* Математические методы построения новых моделей сплошных сред.— Успехи мат. наук, 1965, 20, вып. 5, с. 121—181.
8. *Швец Р. Н., Раврик М. С.* О вариационных уравнениях термодиффузии деформируемых тонких оболочек с конечной сдвиговой жесткостью.— Прикл. механика, 1983, 19, № 2, с. 83—88.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 04.10.82

УДК 539.3

Ю. Д. Зозуляк

СИЛОВОЕ НАГРУЖЕНИЕ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С ЦЕЛЬЮ ОПТИМИЗАЦИИ ОСТАТОЧНЫХ СВАРОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Рассмотрим осесимметричный случай стыкования кольцевым швом двух свободных от внешней нагрузки однородных оболочек вращения постоянной толщины $2h$. Оболочки отнесены к единой канонической системе координат и на краях $s = s_1$, s_2, подлежащих сварке, имеют равные радиусы поперечных сечений.

Ставится задача об рациональном выборе такой нормальной силовой нагрузки $q_n(s)$ (места ее приложения и интенсивности), которой необходимо предварительно нагрузить оболочки, чтобы после их сварки и снятия этой нагрузки уровень остаточных сварочных напряжений в составной оболочке был минимальным.

Предполагаем, что усадочные деформации в свариваемых под воздействием внешней нагрузки оболочках вращения мало отличаются от аналогичных для оболочек, свариваемых без дополнительного нагрева. Представим разрешающие функции V, θ, которыми описывается напряженно-деформированное состояние составной оболочки, в виде трех составляющих

$$V = \sum_{i=1}^{3} V_i, \quad \theta = \sum_{i=1}^{3} \theta_i, \tag{1}$$

где индексам $i = 1$ соответствуют разрешающие функции нагруженных усилиями $q_n(s)$ оболочек со свободными краями $s = s_1, s_2$, подлежащими сварке; $i = 2$ — разрешающие функции для составной оболочки при заданной на участке $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$ величине остаточных деформаций ε_1^0, ε_2^0, $\varkappa_1^0$, $\varkappa_2^0$, которые возникают в зоне сварного кольцевого шва; $i = 3$ — разрешающие функции для составной оболочки, находящейся под воздействием силовой нагрузки — $q_n(s)$.

В качестве функционального критерия оптимальности примем условие минимума энергии упругой деформации [3], которую с учетом (1) можно записать так:

$$K = \frac{\pi D_1}{b}\left\langle \int\limits_{s_0}^{s_1} F ds + \int\limits_{s_1}^{s_2}\left\{ r(\dot V_2 + \dot V_3)^2 - 2\nu \dot r(\dot V_2 + \dot V_3)(V_2 + V_3) + \right.\right.$$

$$+ \frac{\dot r^2}{r}(V_2 + V_3)^2 + b\left[r(\dot\theta_2 + \dot\theta_3)^2 + 2\nu\dot r(\dot\theta_2 + \dot\theta_3)(\theta_2 + \theta_3) + \right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{\dot r^2}{r}(\theta_2 + \theta_3)^2\right]\right\} ds + \int\limits_{s_2}^{s_*} F ds \right\rangle. \qquad (2)$$

Здесь $F = r\dot V^2 - 2\nu\dot r V\dot V + \frac{\dot r^2}{r} V^2 + b\left(r\dot\theta^2 + 2\nu\dot r\theta\dot\theta + \frac{\dot r^2}{r}\theta^2\right)$; $b \equiv \frac{D_0}{D_1} = 3(1 - \nu^2)/h^2$; $D_1 = \frac{2Eh^3}{3(1 - \nu^2)}$ — изгибная жесткость; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; $r = r(s)$ — радиус поперечного сечения; s — длина дуги меридиана, отсчитываемая от сечения $s = s_0$; точкой обозначается производная по дуге s. При этом функции θ_i, V_i должны удовлетворять следующей системе разрешающих уравнений:

$$L_1\theta_1 - \kappa_2 V_1 = 0,$$

$$L_2 V_1 + b\kappa_2\theta_1 = \frac{1}{D_1\kappa_2}\left[q_n - 2\frac{\dot\kappa_2}{\kappa_2} q_n - \kappa_2\int\limits_{s_0}^{s} q_n r\dot r du \frac{d}{ds}\left(\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_2^2 r^2}\right)\right],$$

$$L_1\theta_2 - \kappa_2 V_2 = 0, \quad L_2 V_2 + b\kappa_2\theta_2 = 0, \quad L_1\theta_3 - \kappa_2 V_3 = 0,$$

$$L_2 V_3 + b\kappa_2\theta_3 = -\frac{1}{D_1\kappa_2}\left[q_n - 2\frac{\dot\kappa_2}{\kappa_2} q_n - \kappa_2\int\limits_{s_0}^{s} q_n r\dot r du \frac{d}{ds}\left(\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_2^2 r^2}\right)\right] \qquad (3)$$

для $s_0 < s < s_1$ и $s_2 < s < s_*$;

$$L_1\theta_2 - \kappa_2 V_2 = (1 - \nu)\frac{\dot r}{r}(\varkappa_2^0 - \varkappa_1^0) - \dot\varkappa_1^0 - \nu\varkappa_2^0,$$

$$L_2 V_2 + b\kappa_2\theta_2 = b\left[\frac{\dot r}{r}(\varepsilon_2^0 - \varepsilon_1^0) + \dot\varepsilon_2^0\right],$$

$$L_1\theta_3 - \kappa_2 V_3 = 0, \quad L_2 V_3 + b\kappa_2\theta_3 = 0 \qquad (4)$$

для $s_1 < s < s_2$, где

$$L_1 = \frac{d^2}{ds^2} + \frac{\dot r}{r}\frac{d}{ds} - \left(\frac{\dot r^2}{r^2} + \nu\kappa_1\kappa_2\right);$$

$$L_2 = \frac{d^2}{ds^2} + \frac{\dot r}{r}\frac{d}{ds} - \left(\frac{\dot r^2}{r^2} - \nu\kappa_1\kappa_2\right);$$

κ_1, κ_2 — кривизны меридианов и параллелей.

В граничных сечениях $s = s_1, s_2$ разрешающие функции θ_i, V_i должны удовлетворять условиям свободных краев при $i = 1$ и условиям механического сопряжения при $i = 2, 3$. Тогда задача оптимизации напряженного состояния составной оболочки сводится к нахождению экстремума функционала (2) на множестве допустимых функций V_i, θ_i, q_n, удовлетворяющих соотношениям (3), (4) и условиям механического сопряжения Из решений этой задачи получим такие экстремальные условия в сечениях $s = s_1, s_2$

на граничные значения разрешающих функций:

$$V_2 + V_3 = 0, \quad \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \nu \frac{\dot{r}}{r} (\theta_2 + \theta_3) = 0. \tag{5}$$

Определяя из уравнений систем (3), (4) с учетом соотношений (5) разрешающие функции θ_i, V_i, получаем систему ограничений на искомое распределение силовой нагрузки, обеспечивающей низкий уровень остаточных сварочных напряжений.

В качестве примера рассмотрим задачу об определении рациональной нагрузки при сварке двух длинных цилиндрических оболочек $\left(\kappa_1 = 0, \kappa_2 = \frac{1}{R}, r = R\right)$. В этом случае системы разрешающих уравнений (3), (4) значительно упрощаются и с использованием соотношений (5) приходим к таким интегральным ограничениям на искомое распределение нагрузки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[q_n(x_0) - \frac{D_0}{R} \varepsilon_2^0(x_0)\right] e^{-|x-x_0|} [\cos(x - x_0) - \sin|x - x_0||\, dx_0 = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[q_n(x_0) - \frac{D_0}{R} \varepsilon_2^0(x_0)\right] e^{-|x-x_0|} \cos(x - x_0) \operatorname{sgn}(x - x_0)\, dx_0 = 0, \tag{6}$$

где $x = az/R$; $a^4 = 3(1 - \nu^2) R^2/4h^2$; z — осевая координата, отсчитываемая от оси шва. Отметим, что условия (6) позволяют оптимизировать остаточные сварочные напряжения, используя при этом различные схемы нагружения.

Исследования выполнены для случая, когда оболочки нагружались нормальной силовой нагрузкой постоянной интенсивности q_0 при заданном параболическом $\varepsilon_2^0 = \varepsilon_{20}^0 \left(1 - \frac{x^2}{\eta^2}\right)$ законе распределения остаточных деформаций в области $-\eta \leqslant x \leqslant \eta$. Тогда согласно условию (6) интенсивность силовой нагрузки и связь между параметрами η_1 и η_2 ($\eta_1 \geqslant \eta$, $\eta_2 - \eta_1 > 0$), характеризующими ее расположение, определяются соотношениями

$$q_0 = \frac{D_0 \varepsilon_{20}^0}{R\eta^2} [\eta + \eta (e^{-2\eta} \cos 2\eta + \sin 2\eta) + e^{-2\eta} \cos 2\eta - 1] \times$$
$$\times [e^{-(\eta_1+\eta)} \sin(\eta_1 + \eta) - e^{-(\eta_2+\eta)} \sin(\eta_2 + \eta) - e^{-(\eta_2-\eta)} \sin(\eta_2 - \eta) -$$
$$- e^{-(\eta_1-\eta)} \sin(\eta_1 - \eta)]^{-1},$$

$$e^{-(\eta_1+\eta)} [\cos(\eta_1 + \eta) - \sin(\eta_1 + \eta)] - e^{-(\eta_2+\eta)} [\cos(\eta_2 + \eta) -$$
$$- \sin(\eta_2 + \eta)] + e^{-(\eta_2-\eta)} [\cos(\eta_2 - \eta) - \sin(\eta_2 - \eta)] -$$
$$- e^{-(\eta_1-\eta)} [\cos(\eta_1 - \eta) - \sin(\eta_1 - \eta)] =$$
$$= \frac{D_0}{R q_0 \eta^2} [1 - 2\eta e^{-2\eta} \sin 2\eta - e^{-2\eta} (\cos 2\eta + \sin 2\eta)]. \tag{7}$$

Для случая распределения остаточных деформаций в виде ступенчатой функции аналогичные соотношения получены ранее в работе [1].

Численные расчеты проводились для оболочки $R/h = 40$ при $\nu = 0{,}3$; $\eta_1 = \eta = \frac{a}{10}, \frac{a}{20}$. Исследования величины напряжений, возникающих при параболическом законе распределения остаточных деформаций, для ненагруженных оболочек и при предварительном нагружении, определяемом соотношениями (7), показали, что предложенная расчетная схема рационального выбора силовой нагрузки позволяет понизить уровень остаточных напряжений приблизительно в два раза.

Отметим, что данная методика применима также и для выбора рациональных схем подогрева. При этом необходимо воспользоваться известной аналогией между математической постановкой силовой и температурной задач теории тонких оболочек [2] и в соотношения (3), (5), (6) вместо силовой нагрузки ввести интегральные характеристики искомого температурного поля.

1. *Зозуляк Ю. Д.* О применении силовой нагрузки в процессе сварки с целью оптимизации остаточных сварочных напряжений в цилиндрической оболочке.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1976, вып. 4, с. 51—53.
2. *Підстригач Я. С., Ярема С. Я.* Температурні напруження в оболонках.— К. : Наук. думка, 1961.— 212 с.
3. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Зозуляк Ю. Д.* Об оптимизации напряженного состояния в зоне локальной термообработки оболочек вращения.— Прикл. механика, 1975, 11, вып. 5, с. 3—7.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 28.12.81

УДК 621.791.011

И. Б. Дидух, В. Н. Максимович, Г. В. Пляцко, И. А. Черненко

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЫ КОНТАКТИРУЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРИ СВАРКЕ ТРЕНИЕМ

Качество сварных деталей трением существенно зависит от вида температурного поля, возникающего вследствие трения контактирующих поверхностей. Распределение температурного поля при сварке деталей с плоскими контактирующими поверхностями имеет сложный характер. В начальном периоде сварки температура неравномерно распределена в плоскости контакта — наибольшая температура возникает вблизи граничной поверхности [6] и только после некоторого периода времени происходит выравнивание температуры по сечению. Время сварки при этом, особенно для деталей больших размеров, может оказаться достаточно большим, что в ряде случаев приводит к перегреву металла в области сварного стыка и вследствие этого к снижению динамических характеристик сварных деталей [8]. С целью сокращения времени процесса с одновременным увеличением прочности соединения представляет интерес управлять температурным режимом в процессе сварки трением. Ниже рассматривается один из возможных способов регулирования теплового режима сварки, основанный на определении оптимальной формы контактирующих поверхностей.

Как известно, для получения качественного сварного соединения необходимо, чтобы температура в конце процесса сварки оказалась достаточно высокой и распределение ее по сечению в области стыка было близким к равномерному [5]. В связи с этим естественно определять оптимальное распределение источников тепла в сечении контакта $Q(r, \tau)$ из условий, что при заданном времени сварки τ_0 температура в стыке при $\tau = \tau_0$ достигает максимально возможной величины и равномерно распределена по сечению, т. е. $T(r, \tau_0, z) = \mathrm{const}$.

Рассмотрим задачу определения температурного режима в свариваемых трением двух цилиндрических телах радиусом R и длиной l_1 и l_2. Предположим, что физико-механические свойства их одинаковы. Тогда распределение температурного поля в процессе сварки описывается уравнением (теплофизические характеристики не зависят от температуры)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial \tau}\right) T = -\frac{W}{\lambda} \qquad (1)$$

при граничных и начальном условиях

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r} - \alpha T = 0 \qquad \text{при } r = R, \qquad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \pm \alpha_{1,2} T = 0 \quad \text{при } z = l_{1,2}, \qquad (3)$$

$$T|_{\tau=0} = 0.$$

Здесь τ — время; W — количество тепла, производимое источниками в единице объема за единицу времени; λ — коэффициент теплопроводности;