

существенного вклада в эхо-сигнал не создает. Поэтому в выражении (7) члены с $n = 3$ не учитываются. В оставшейся части необходимо изменить значения a_n на

$$a_1 = \frac{2\xi}{\lambda} (1 - \kappa^2), \quad a_2 = \frac{2\xi\kappa^4}{a^2 (1 + \kappa^2)}.$$

Кроме того, следует положить $S_n^0(\tau, x) = S_1^0(\tau, x)$, $R_n^0(\tau, x) = R_1^0(\tau, x)$ ($n = 1, 2$). Это касается также формулы (8), где $R_3^0(\tau, x)$ следует заменить на $R_1^0(\tau, x)$. Естественно, что в этих условиях случай (9) выпадает из рассмотрения.

Аналогично в описании дифракционных эхо-импульсов (11) следует положить

$$A_{ni}(r) = \frac{(\kappa^2 - \lambda^2) \xi}{2^{2/3} A'(q_n) \sqrt{l_{10}} \sqrt{r^2 - 1}},$$

где q_n — нули функции Эйри [7], а вместо функции $U_m(\alpha, \tau)$ взять функцию $U_{m+\frac{1}{2}}(\alpha, \tau)$.

Суммируя все полученные эхо-импульсы, возбужденные падающим ограниченным пучком цилиндрических волн при $f(\tau) = \delta(\tau)$, и подставляя результат в формулу (2), получаем полный эхо-сигнал при любом заполнении посылки $f(\tau)$ в виде свертки.

1. Агрест М. М., Максимов М. З. Теория неполных цилиндрических функций и их приложения. — М.: Атомиздат, 1965. — 351 с.
2. Векслер Н. Д., Кутсер М. Э. Асимптотика поля давления в определенном скачке при дифракции плоской акустической волны на упругой цилиндрической оболочке. — Прикл. математика и механика, 1976, 40, № 3, с. 509—519.
3. Метсавэр Я. А., Векслер Н. Д., Стулов А. С. Дифракция акустических импульсов на упругих телах. — М.: Наука, 1979. — 239 с.
4. Поддубняк А. П. Рассеяние ограниченного звукового пучка на акустически мягком круговом цилиндре. — Акуст. журн., 1979, 25, № 1, с. 108—112.
5. Федорюк М. В. Метод перевала. — М.: Наука, 1977. — 368 с.
6. Фридлиндер Ф. Звуковые импульсы. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 232 с.
7. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. — М.: Мир, 1964. — 428 с.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 16.11.82

УДК 539.3 : 534.26

Е. А. Вдович

ОПТИМИЗАЦИЯ ИМПУЛЬСА ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ, ПАДАЮЩЕЙ НА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО С АКУСТИЧЕСКИМ НАПОЛНИТЕЛЕМ

Рассмотрим упругое полупространство, контактирующее по границе $z = E + H$ с акустической средой (среда 1). На расстоянии $z = H$ от границы контакта в упругом полупространстве находится слой (среда 3) толщины E , заполненный вязкой сжимаемой жидкостью. Предполагаем, что на полупространство набегают зондирующий импульс продолжительности t_1 , возбужденный сосредоточенными силами вида $\vec{F} = \left\{ 0, 0, k_0 f(t) \frac{d}{dz} \delta(z - z_0) \right\}$, размещенными в среде 1 на расстоянии $z = z_0$ ($z_0 \geq E + H$).

Задача определения волн, отраженных от границ раздела рассматриваемых сред, сводится к решению системы волновых уравнений

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \xi^2} - \chi_i^2 \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \tau^2} = n_0 f_i(\tau) \delta(\xi - \xi_0) \quad (i = \bar{1}, 4) \quad (1)$$

при нулевых начальных условиях, условиях затухания на бесконечности и условиях равенства нормальных перемещений и давлений на границах

контакта. Здесь $f_1(\tau) = f(\tau)$; $f_2(\tau) = f_3(\tau) = f_4(\tau) \equiv 0$; $\xi = \frac{z}{H}$; $\tau = \frac{c_2 t}{H}$; $\kappa_1 = \frac{c_2}{c_1}$; $\kappa_3 = \frac{c_4}{c_3}$; $\kappa_2 = \kappa_4 = 1$; $f(\tau)$ — искомая функция управления; $\Phi_i(\xi, \tau)$ — скалярные потенциалы перемещений в i -й среде, причем $i = 2$ соответствует $E < z < E + H$, $i = 4$ соответствует $z < 0$; c_i — скорость продольных волн в i -й среде; k_0, n_0 — множители, имеющие размерности силы и скалярного потенциала перемещений соответственно.

Скалярные потенциалы перемещений падающей и отраженной волн находятся из решения рассматриваемой задачи методом преобразования Лапласа по безразмерному времени τ и в оригиналах имеют соответственно вид

$$\Phi_1^1 = -d \int_0^\tau f(t) S_+ [\tau - \kappa |\xi_0 - \xi| - t] dt, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1^2 = & -a \sum_{k=0}^{\infty} V^k \int_0^\tau f(t) S_+ [\tau - \kappa (\xi_0 - \varepsilon - h) - \kappa (\xi - \varepsilon - h) - 2hk - t] dt + \\ & + b \sum_{n=0}^{\infty} V^n \sum_{k=0}^{\infty} V^k \int_0^\tau f(t) S_+ [\tau - \kappa (\xi_0 - \varepsilon - h) - \kappa (\xi - \varepsilon - h) - 2\kappa\varepsilon n - \\ & - 2h(k+1) - t] dt - b \sum_{n=0}^{\infty} V^n \sum_{k=0}^{\infty} V^k \int_0^\tau f(t) S_+ [\tau - \kappa (\xi_0 - \varepsilon - h) - \\ & - \kappa (\xi - \varepsilon - h) - 2\kappa\varepsilon(n+1) - 2h(k+1) - t] dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\Phi_1^1 + \Phi_1^2 = \Phi_1$; $d = \frac{n_0}{2\kappa m}$; $a = \frac{n_0}{\kappa(\kappa m + 1)}$; $b = \frac{n_0(\kappa m - 1)}{\kappa(\kappa m + 1)^2}$; $V = \left(\frac{\kappa m - 1}{\kappa m + 1}\right)^2$; $m_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1}$; $m_3 = \frac{\rho_4}{\rho_3}$; $m_2 = m_4 = 1$; $h = 1$; $\varepsilon = \frac{E}{H}$; ρ_i — плотность i -й среды.

Ставим задачу определения такого оптимального закона изменения давления в падающей волне, который обеспечивает на границе $\xi = \varepsilon + h$ максимальное давление в отраженной волне. За критерий оптимальности принимаем условие минимума разности энергий падающей и отраженной волн при $\xi = \varepsilon + h$ [1].

Способ решения сформулированной задачи аналогичен способу решения задачи оптимизации нормально падающего звукового импульса в системе акустическая среда — упругий слой. В данном случае оптимальное давление в падающем импульсе продолжительности $\kappa (\xi_0 - \varepsilon - h) < \tau_1 \leq \leq 2h + \kappa (\xi_0 - \varepsilon - h)$ имеет постоянную интенсивность во времени и определяется формулой $P_1^1 = \frac{p}{\tau_1}$.

Для импульсов продолжительности $\kappa (\xi_0 - \varepsilon - h) + 2h < \tau_1 \leq \kappa (\xi_0 - \varepsilon - h) + 4h$ и $\kappa (\xi_0 - \varepsilon - h) + 2\kappa\varepsilon + 2h < \tau_1 \leq \kappa (\xi_0 - \varepsilon - h) + 4\kappa\varepsilon + 4h$ оптимальные давления в падающих волнах изменяются по линейному закону и представляются соответственно в виде

$$P_1^1 = \frac{2p(T_1\tau_1 - 3T_3\tau^*)}{\tau_1 T_2}, \quad (4)$$

$$P_1^2 = \frac{p[T_5 + 3T_4(\tau_1 - 2\tau^*)]}{\tau_1 T_5}, \quad \kappa (\xi_0 - \varepsilon - h) < \tau \leq \tau_1. \quad (5)$$

Давления в отраженных волнах будут такими:

$$\begin{aligned} P_1^1 = & \frac{ap[T_3 + 3T_2(\tau_1 - 2\tau^*)]}{\tau_1 d T_3} S_+(2h - \tau^*) + \\ & + \left\{ \frac{p[(a-r)T_3 - 12hrT_2]}{\tau_1 d T_3} + \frac{3(a-r)T_2(\tau_1 - 2\tau^*)}{\tau_1 d T_3} \right\} S_+(\tau^* - 2h), \end{aligned} \quad (6)$$

$$P_1^2 = \frac{p}{\tau_1 d T_5} \{ \{(a-r)(T_5 + 3T_4 \tau_1) + T_4 [6(r-a)\tau^* - 12hr]\} S_+ (2h + 2\kappa\varepsilon - \tau^*) + \{(a-r-c)(T_5 + 3T_4 \tau_1) + T_4 [6(a-r-c)\tau^* - 12(hr+hc+\kappa\varepsilon)]\} S_+ (\tau^* - 2h - 2\kappa\varepsilon) \}. \quad (7)$$

Здесь p — суммарное давление в падающей волне за время τ_1 ;

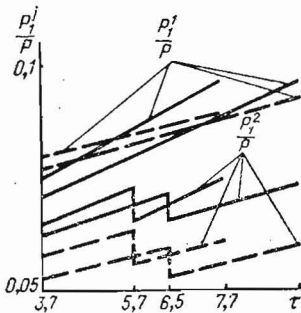
$$T_1 = 36hb(\tau_1 - 2h) [\tau_1(a-r) + 2hr] + (a-r) [3(a-r)\tau_1^3 + 36h^2r\tau_1 - 48h^3r] - d^2 3\tau_1^3;$$

$$T_2 = 6hr(\tau_1 - 2h)(a-r);$$

$$T_3 = 18hr(\tau_1 - 2h) [\tau_1(a-r) + 4hr] + (a-r) [3(a-r)\tau_1^3 + 36h^2r\tau_1 - 48h^3r] - d^2 3\tau_1^3;$$

$$T_4 = 6 \{ (hr+hc+\kappa\varepsilon)\tau_1 - 2[h^2r + c(h+\kappa\varepsilon)^2] (a-r-c) \};$$

$$T_5 = [d^2 - (a-r-c)^2] \tau_1^3 - c(a-r-c)(hr+hc+\kappa\varepsilon)\tau_1^2 - 24(hr+hc+\kappa\varepsilon)^2 \tau_1 + 64 [(hr+hc+\kappa\varepsilon)(h^2r + (h+\kappa\varepsilon)^2) + (a-r-c)(h^3r + c(h+\kappa\varepsilon)^3)];$$



$$r = \frac{2b}{\kappa m + 1}; \quad c = \frac{4mn_0(\kappa m - 1)}{(\kappa m + 1)^4}; \quad \tau^* = \tau - \kappa(\xi_0 - \varepsilon - h).$$

В качестве примера рассматривалась система, когда акустическая среда и промежуточный слой толщины ε заполнены водой, а упругое полупространство есть сталь или алюминий. Для падающего импульса продолжительности $\kappa(\xi_0 - \varepsilon - h) < \tau_1 \leq 2h + \kappa(\xi_0 - \varepsilon - h)$ давление в геометрически отраженной волне от стального полупространства будет $P_1^2 = 0,143p$, от полупространства из алюминия — $P_1^2 = 0,110p$. На рисунке приведено оптимальное распределение давления в падающем импульсе и в дифракционной волне для зондирующего импульса соответственно продолжительности $\tau_1 = 7,755$ и $\tau_1 = 9,424$. Сплошные линии соответствуют случаю стального полупространства, штриховые — случаю полупространства из алюминия.

1. Зозуляк Ю. Д., Вдович Е. А. Оптимизация импульса падающей волны в системе акустическая среда — упругий слой. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1979, вып. 9, с. 96—99.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР, Львов

Получено 12.07.82

УДК 621.837

В. Е. Бербюк

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРУГОГО МАНИПУЛЯТОРА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Возможны два подхода к исследованию движения промышленных роботов с учетом упругости звеньев. Первый — это изучение механики роботов в рамках моделей с сосредоточенными параметрами [1—4], второй — продиктован повышенными требованиями к точности функционирования данного класса механических систем и предполагает наличие модели с распределенными параметрами. Целью настоящей работы является построение матема-