УДК 517.946:517.958

Н. Н. Боголюбов (мл.), А. К. Прикарпатский

О КОНЕЧНО-ЗОННЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ТИПА ГЕЙЗЕНБЕРГА

Настоящая работа имеет целью определить для уравнения типа Гейзенберга

$$\vec{\mu}_t = \vec{\mu} \times \vec{\mu}_{xx} + \gamma\vec{\mu}_x + \beta(\vec{\mu} \times \vec{n})(\vec{\mu} \cdot \vec{n}) - \alpha\vec{n}(\vec{\mu}_x \cdot \vec{n}), \quad \vec{\mu}, \vec{n} \in \mathbb{R}^3 \tag{1}$$

широкий класс конечно-зонных решений [6, 7], получаемых методом обратной задачи с помощью алгебро-геометрических соображений. По поводу приложений уравнений типа Гейзенберга можно рекомендовать работы [1, 4—6].

Лемма 1. Пусть заданы следующие матричные линейные дифференциальные операторы в пространстве дифференцируемых вектор-функций:

$$X_\lambda = 2i\frac{\partial}{\partial x} - \left(\lambda - \frac{\delta}{\lambda} - \alpha\right)\begin{bmatrix}\mu_3 & 0\\ 0 & -\mu_3\end{bmatrix} - \left(\lambda + \frac{\delta}{\lambda}\right)\begin{bmatrix}0 & \mu\\ \mu^* & 0\end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$T_\lambda = 2i\frac{\partial}{\partial t} - \left(\lambda + \frac{\delta}{\lambda}\right)^2\begin{bmatrix}\mu_3 & 0\\ 0 & -\mu_3\end{bmatrix} - \left(\lambda - \frac{\delta}{\lambda} - \alpha\right)\begin{bmatrix}\nu_3 & 0\\ 0 & -\nu_3\end{bmatrix} -$$

$$- \left(\lambda - \frac{\delta}{\lambda} - \alpha\right)\left(\lambda + \frac{\delta}{\lambda}\right)\begin{bmatrix}0 & \mu\\ \mu^* & 0\end{bmatrix} - \left(\lambda + \frac{\delta}{\lambda}\right)\begin{bmatrix}0 & \nu\\ \nu^* & 0\end{bmatrix}, \tag{3}$$

где $4\delta = \beta - \alpha^2$; $\vec{\nu} = \vec{\mu} \times \vec{\mu}_x + \gamma\vec{\mu} - \alpha(\vec{\mu} \cdot \vec{n})\vec{n}$, причем $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, $\mu^* = \mu_1 - i\mu_2$, $\nu = \nu_1 + i\nu_2$, $\nu^* = \nu_1 - i\nu_2$, $(\vec{n} \cdot \vec{\mu}) = \mu_3$, $(\vec{n} \cdot \vec{\nu}) = \nu_3$, $(\vec{n} \cdot \vec{n}) = (\vec{\mu} \cdot \vec{\mu}) = 1$.

Тогда эти операторы образуют представление типа Лакса (см. [7])

$$[X_\lambda, T_\lambda] = 0, \tag{4}$$

эквивалентное уравнению (1) при всех значениях параметра $\lambda \in \mathbb{C}^1/\{0\}$.

Доказательство проводится прямым выполнением операции коммутирования (4) с учетом произвольности параметра $\lambda \in \mathbb{C}^1/\{0\}$.

Пусть S — матрица монодромии для дифференциального оператора (2) при условии, что вектор $\vec{\mu}(x, t)$ удовлетворяет условию периодичности $\vec{\mu}(x, t) = \vec{\mu}(x + l, t)\ \forall\, x, t \in \mathbb{R}^1, l \in \mathbb{R}^1_+$. Тогда, согласно [2, 4], матрица $S = \| s_{ij} \|$, $i, j = 1, 2$ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned}
2i\frac{\partial h}{\partial x} &= \mu^*\left(\lambda + \frac{\delta}{\lambda}\right)\varphi + \mu\left(\lambda + \frac{\delta}{\lambda}\right)\chi,\\
i\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \left(\lambda - \frac{\delta}{\lambda} - \alpha\right)\varphi\mu_3 + \mu\left(\lambda + \frac{\delta}{\lambda}\right)h,\\
i\frac{\partial \chi}{\partial x} &= \left(\alpha + \frac{\delta}{\lambda} - \lambda\right)\chi\mu_3 + \mu^*\left(\lambda + \frac{\delta}{\lambda}\right)h
\end{aligned} \tag{5}$$

по переменной x и уравнениям

$$2i\frac{\partial h}{\partial t} = \left[\left(\lambda - \frac{\delta}{\lambda} - \alpha\right)\left(\lambda + \frac{\delta}{\lambda}\right)\mu^* + \left(\lambda + \frac{\delta}{\lambda}\right)\nu^*\right]\varphi +$$

$$+\left[\left(\lambda-\frac{\delta}{\lambda}-\alpha\right)\left(\lambda+\frac{\delta}{\lambda}\right)\mu+\left(\lambda+\frac{\delta}{\lambda}\right)\nu\right]\chi,$$

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\varphi}{\partial t}&=\left[\left(\lambda+\frac{\delta}{\lambda}\right)^2\mu_3+\left(\lambda-\frac{\delta}{\lambda}-\alpha\right)\nu_3\right]\varphi+\\ &+\left[\left(\lambda-\frac{\delta}{\lambda}-\alpha\right)\left(\lambda+\frac{\delta}{\lambda}\right)\mu+\left(\lambda+\frac{\delta}{\lambda}\right)\nu\right]h,\\ i\frac{\partial\chi}{\partial t}&=-\left[\left(\lambda+\frac{\delta}{\lambda}\right)^2\mu_3+\left(\lambda-\frac{\delta}{\lambda}-\alpha\right)\nu_3\right]\chi+\\ &+\left[\left(\lambda-\frac{\delta}{\lambda}-\alpha\right)\left(\lambda+\frac{\delta}{\lambda}\right)\mu^*+\left(\lambda+\frac{\delta}{\lambda}\right)\nu^*\right]h \end{aligned} \tag{6}$$

по переменной t, причем мы обозначили $h=\frac{1}{2}(s_{11}-s_{22})$, $\varphi=-s_{12}$, $\chi=s_{21}$.

Справедлива очевидная лемма.

Лемма 2. Величина $h^2-\chi\varphi=P(\lambda)$ — инвариант по переменным x, t для систем уравнений (5) и (6).

Сформулируем следующую важную аппроксимационную теорему, характеризующую решения уравнений (5), (6).

Теорема 1. Системы уравнений (5), (6) допускают полиномиальные по параметру λ решения вида

$$h=\sum_{k=0}^{N}h_k(x,t)\lambda^k,\quad \varphi=\sum_{k=0}^{N}\varphi_k(x,t)\lambda^k,\quad \chi=\sum_{k=0}^{N}\chi_k(x,t)\lambda^k \tag{7}$$

тогда и только тогда, когда коэффициенты h_k, φ_k, χ_k, $k=\overline{1,N}$ удовлетворяют специальным совместным системам автономных нелинейных дифференциальных уравнений и справедливы равенства

$$\mu(x,t)=-\varphi_N,\quad \mu^*(x,t)=\chi_N,\quad \mu_3(x,t)=h_N. \tag{8}$$

Если к тому же выполнены соотношения

$$h(0,0,\lambda^*)=h^*(0,0,\lambda),\quad \varphi(0,0,\lambda^*)=-\chi^*(0,0,\lambda), \tag{9}$$

то нелинейные автономные системы уравнений имеют решение при всех x, t и формулы (8) определяют вектор-функцию $\vec{\mu}(x,t)$, являющуюся бесконечно дифференцируемым действительным решением уравнения (1).

На доказательстве теоремы не останавливаемся (см., например, [4]).

Пусть $\xi_j(x,t)$, $j=\overline{1,N}$ — нули полинома $\varphi(x,t,\lambda)$. Они удовлетворяют согласно уравнениям (5), (6) таким:

$$i\frac{\partial\xi_j}{\partial x}=\frac{(\xi_j^2+\delta)\sqrt{P(\xi_j)}}{\xi_j\prod\limits_{i\neq j}(\xi_j-\xi_i)}, \tag{10}$$

$$i\frac{\partial\xi_j}{\partial t}=\frac{-(\xi_j^2+\delta)\sqrt{P(\xi_j)}}{\xi_j\prod\limits_{i\neq j}(\xi_j-\xi_i)}\left(\sum_{i\neq j}^{N}\xi_i+\frac{1}{2}p_{2N-1}-\gamma-\alpha|\mu|^2+\delta\xi_j^{-1}\right), \tag{11}$$

где $P(\lambda)=h^2-\chi\varphi=\sum\limits_{k=0}^{2N}p_k\lambda^k$, причем согласно лемме 2 числа p_k, $k=\overline{1,2N}$ — суть действительные числа, независимые от x, t и $p_{2N}=1$ (согласно (8)). Из уравнений (5), (6) для функции $\mu_3(x,t)$ находим также уравнения

$$\begin{aligned}(\operatorname{arc\,th}\mu_3)_x&=\operatorname{Im}\left[\sum_{j=1}^{N}\xi_j(x,t)\right],\\ (\operatorname{arc\,th}\mu_3)_t&=\operatorname{Im}\left[-\sum_{i<j}^{N}\xi_i\xi_j+\left(\gamma-\alpha\mu_3^2-\frac{1}{2}p_{2N-1}\right)\sum_{j=1}^{N}\xi_j\right].\end{aligned} \tag{12}$$

Кроме того, полезны следующие формулы для функции $\varphi_0(x,t)$:

$$\varphi_0=(-1)^{N+1}\prod_{j=1}^{N}\xi_j\mu; \tag{13}$$

$$i\frac{\partial}{\partial x}\ln\varphi_0=-\alpha\mu_3,\quad i\frac{\partial}{\partial t}\ln\varphi_0=-\alpha\nu_3,$$

$$\nu_3=\gamma\mu_3-\alpha\mu_3+\frac{1}{2}(1-\mu_3^2)\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{N}\xi_j, \tag{14}$$

$$i\frac{\partial}{\partial x}\ln\varphi_0=\delta\mu_3\left[i\,\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{N}\xi_j^{-1}+\mu_3^{-2}\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{N}\xi_j^{-1}+\frac{1}{2}p_1\mu_3^{-2}\prod_{j=1}^{N}\xi_j^{-2}\right];$$

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\ln\varphi_0&=\delta^2\mu_3\sum_{i<j}^{N}\xi_i^{-1}\xi_j^{-1}+2\delta\mu_3+\delta\sum_{j=1}^{N}\xi_j^{-1}\nu_3+\frac{g}{2}\delta^2\mu_3^{-1}\prod_{j=1}^{N}\xi_j^{-2}+\\ &+\frac{\delta}{\mu_3}\left[\gamma-\alpha\mu_3^2-\frac{1}{2}p_{2N-1}-\sum_{j=1}^{N}\xi_j\right]\left[\frac{p_1}{2}+(1-\mu_3^2)\prod_{j=1}^{N}\xi_j^2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{N}\xi_j^{-1}\right], \\ g=g(x,t)&=p_2-\left[\frac{p_1}{2}+(1-\mu_3^2)\prod_{j=1}^{N}\xi_j^2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{N}\xi_k^{-1}\right]^2\mu_3^{-2}\prod_{j=1}^{N}\xi_j^{-2}-\\ &-(1-\mu_3^2)\prod_{j=1}^{N}\xi_j^2\left[2\,\mathrm{Re}\sum_{k<j}^{N}\xi_k^{-1}\xi_j^{-1}+\left|\sum_{j=1}^{N}\xi_j^{-1}\right|^2\right], \end{aligned} \tag{15}$$

где формулы (14) записаны при $\delta=0$, $\alpha\neq0$, а (15) — при $\alpha=0$, $\delta\neq0$. Эти частные случаи допускают наиболее эффективный анализ решений исходного уравнения (1). Именно в случае $\alpha=0$, $\delta\neq0$ из уравнений (12) прямым интегрированием находится в явном виде функция $\mu_3(x,t)$, а из формул (13) и (15) — функция $\mu(x,t)$. Здесь мы предположили, что системы уравнений (10), (11) для функций $\xi_j(x,t)$, $j=\overline{1,N}$ могут быть проинтегрированы в квадратурах. Покажем это, пользуясь методами алгебраической геометрии на римановых поверхностях алгебраических функций.

Пусть Γ — риманова поверхность функции $\sqrt{P(\lambda)}$, $P(\pm i\sqrt{\delta})\neq0$, $\lim\limits_{\lambda\to0}\lambda^{2N}P(\lambda^{-1})=1$. Алгебраический род этой поверхности равен числу $N-1$. Заметим также, что число $\xi_N=-i\sqrt{\delta}$ является решением уравнений (10), (11) при любых $\xi_k(x,t)$, $k=\overline{1,N-1}$. Редуцированная система уравнений (10), (11) примет тогда вид

$$i\frac{\partial\xi_j}{\partial x}=\frac{(\xi_i-i\sqrt{\delta})\sqrt{P(\xi_j)}}{\xi_j\prod\limits_{i\neq j}(\xi_j-\xi_i)}, \tag{16}$$

$$i\frac{\partial\xi_j}{\partial t}=\frac{(i\sqrt{\delta}-\xi_j)\sqrt{P(\xi_j)}}{\xi_j\prod\limits_{i\neq j}(\xi_j-\xi_i)}\left[\sum_{i\neq j}^{N-1}\xi_i+\frac{1}{2}p_{2N-1}-i\sqrt{\delta}-\gamma+\delta\xi_j^{-1}\right], \tag{17}$$

$$j=\overline{1,N-1}.$$

Начальные условия $\xi_{j0}=\xi_j(0,0)\in\Gamma$, $j=\overline{1,N-1}$ для этих систем, рассматриваемых на поверхности Γ, выбираются так, что выполняется тождественно соотношение $\sum\limits_{k=0}^{N}h_k(0,0)\,\xi_{j0}^k=\sqrt{P(\xi_{j0})}$. Пусть $\tilde{\omega}_j(\lambda)$, $j=\overline{1,N-1}$ — абелевы интегралы третьего рода на Γ:

$$\tilde{\omega}_j(\lambda)=\sum_{k=1}^{N-1}c_{jk}\int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{\xi^{N-k}d\xi}{(\xi-i\sqrt{\delta})\sqrt{P(\xi)}},\quad\lambda_0\in\Gamma,$$

нормированные условием

$$\oint_{a_j}d\tilde{\omega}_k(\lambda)=\delta_{kj},\qquad k,\ j=\overline{1,N-1}, \tag{18}$$

где a_j, $j=\overline{1,N-1}$, a — базис одномерной группы гомологий многообразия Γ. Условия (18) однозначно определяют коэффициенты c_{jk}, j, $k=\overline{1,N-1}$, что следует из анализа работы [3]. Построим дополнительно еще один абелев интеграл третьего рода на Γ:

$$\tilde{\omega}(\lambda)=\sum_{k=1}^{N-1} c_k \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\xi^{N-k} d\xi}{(\xi-i\sqrt{\delta})\sqrt{P(\xi)}}, \tag{19}$$

нормированный условиями

$$\oint_{a_j} d\tilde{\omega}(\lambda)=0, \quad j=\overline{1, N-1}, \quad \oint_{a} d\tilde{\omega}(\lambda)=1, \tag{20}$$

где контур a лежит на верхнем листе поверхности Γ и охватывает точку $\lambda=(i\sqrt{\delta})^{+}\in\Gamma$. Поверхность Γ реализуем в виде двулистной поверхности наложения комплексной плоскости $\mathbb{C}^1$ с разрезами, соответствующими точкам ветвления функции $\sqrt{P(\lambda)}$. Из построений видно, что справедливы равенства

$$\omega_j(\lambda)=\tilde{\omega}_j(\lambda)-k_j\tilde{\omega}(\lambda), \qquad j=\overline{1, N-1}. \tag{21}$$

Здесь $\omega_j(\lambda)$, $j=\overline{1, N-1}$ — базис абелевых нормированных интегралов первого рода на поверхности Γ, а числа k_j, $j=\overline{1, N-1}$ легко вычисляются из условий (20):

$$k_j=\oint_a d\tilde{\omega}_j(\lambda).$$

Исследуем теперь отображение Абеля $\nu: \Gamma^{N-1}\to\mathbb{C}^{N-1}$,

$$\nu_j(x, t)=\sum_{k=1}^{N-1}\omega_j(\xi_k(x, t)), \quad j=\overline{1, N-1},$$

где функции $\xi_k(x, t,)$ $k=\overline{1, N-1}$ удовлетворяют уравнениям (16). Из соотношения (21) находим

$$\sum_{k=1}^{N-1}\omega_j(\xi_k(x, t))=-i(c_{j1}x-k_jc_1x)+i\left[c_{j1}\left(\frac{1}{2}p_{2N-1}-\gamma-i\sqrt{\delta}\right)-c_{j2}\right]t+$$
$$+\delta c_{jN-1}f(t)(-1)^{N+2}+\sum_{k=1}^{N-1}\omega_j(\xi_k(0, 0)), \tag{22}$$

где функция $f(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{df(t)}{dt}=\prod_{j=1}^{N-1}\xi_k^{-1}(x, t)=\prod_{j=1}^{N}\xi_k^{-1}(0, t). \tag{23}$$

Выражение (22) означает, что функции $\xi_j(x, t)$, $j=\overline{1, N-1}$ решают стандартную проблему обращения Якоби для абелевых интегралов первого рода на поверхности Γ. Ее решение проведем с помощью ϑ-функций Римана, следуя методу работы [3].

Пусть (δ_{ij}, B_{ij}), $i, j=\overline{1, N-1}$ — матрица периодов базиса $\omega_j(\lambda)$, $j=\overline{1, N-1}$ на Γ. Построим по этому базису ϑ-функцию Римана

$$\vartheta(\vec{u})=\sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^{N-1}}\exp\{\pi i(B\vec{m}, \vec{m})+2\pi i(\vec{m}, \vec{u})\}.$$

Здесь $\mathbb{Z}^{N-1}\subset\mathbb{R}^{N-1}$ — пространство целочисленных векторов в $\mathbb{R}^{N-1}$; $\vec{u}\in\mathbb{C}^{N-1}$; $(\vec{u}, \vec{m})=\sum_{k=1}^{N-1}u_jm_j$; $\vec{u}=(u_1, u_2, \ldots, u_{N-1})$. Тогда для выражений $\sum_{k=1}^{N-1}\xi_k(x, t)$ и $\sum_{k=1}^{N-1}\xi_k^2(x, t)$ находим

$$\sum_{k=1}^{N-1}\xi_k(x, t)=i\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{\vartheta(\vec{\alpha}x+\vec{\beta}t+\vec{\eta}+\vec{\varepsilon})}{\vartheta(\vec{\alpha}x+\vec{\beta}t+\vec{\eta}-\vec{\varepsilon})}+\sum_{j=1}^{N-1}\oint_{a_j}\lambda d\omega_j(\lambda),$$

$$\sum_{k=1}^{N-1} \xi_k^2(x, t) = -i \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\vartheta(\vec{\alpha}x + \vec{\beta}t + \vec{\eta} + \vec{\varepsilon})}{\vartheta(\vec{\alpha}x + \vec{\beta}t + \vec{\eta} - \vec{\varepsilon})} +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln [\vartheta(\vec{\alpha}x + \vec{\beta}t + \vec{\eta} + \vec{\varepsilon})\, \vartheta(\vec{\alpha}x + \vec{\beta}t + \vec{\eta} - \vec{\varepsilon})] + \sum_{j=1}^{N-1} \oint_{a_j} \lambda^2 d\omega_j(\lambda),$$

где

$$\alpha_j = -ic_{j1}; \quad \beta_j = i\left[\left(\frac{1}{2} p_{2N-1} - \gamma - i\sqrt{\delta}\right) c_{j1} - c_{j2}\right] + \delta c_{j1}(-1)^N f(t)\, t^{-1};$$

$$\varepsilon_j = \omega_j(\infty^+); \quad \eta_j = \sum_{k=1}^{N-1} \omega_j(\xi_{k0}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} B_{jk} - \frac{j}{2}; \quad j = \overline{1, N-1}.$$

Аналогичные выражения можно записать также для других симметрических функций от $\xi_j(x, t)$, $j = \overline{1, N-1}$, что вместе с формулами (12) — (15) ведет к явному интегрированию уравнения (1). Полученные решения называются конечно-зонными и в силу свойств ϑ-функции будут почти периодическими функциями переменных x, t. Окончательный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2. Пусть заданы попарно разные произвольные комплексные числа $e_j \in \mathbb{C}^1$, $j = \overline{1, 2N}$, $\xi_{j0} = \xi_j(0, 0)$, $j = \overline{1, N-1}$ и число $\xi_{N0} = -i\sqrt{\delta}$, которые удовлетворяют тождественно следующему соотношению:

$$\prod_{j=1}^{2N} (z - e_j) - |\mu(0, 0)|^2 \prod_{j=1}^{N} (z - \xi_{j0}^*)(z - \xi_{j0}) = h^2(z), \quad z \in \mathbb{C}^1,$$

где $h(z)$ — полином степени N с действительными коэффициентами, причем $h_N = \mu_3(0, 0)$. Тогда функции $\mu_3(x, t)$, $\mu(x, t)$, определенные изложенным выше алгоритмом, задают гладкое почти периодическое конечно-зонное решение уравнения (1) с помощью квадратур и стандартных ϑ-функций Римана.

Отметим, что аналогичные эффективные результаты получили также Р. Бикбаев, А. И. Бобенко и А. Р. Итс (Сб. научных трудов ЛОМИ, 1983), которые развивали подход работы [6] в сочетании с матричной задачей Римана. С помощью редукции гиперэллиптической римановой поверхности Г к рациональной класс полученных решений можно существенно расширить, включая в него и быстроубывающие солитонные решения.

1. *Боголюбов Н. Н. (мл.), Садовников Б. И.* Некоторые вопросы статистической механики.— М. : Высш. шк., 1975.— 318 с.
2. *Боголюбов Н. Н. (мл.), Самойленко В. Г., Прикарпатский А. К.* Почти периодические и солитонные решения нелинейных уравнений.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1982, № 4, с. 5—9.
3. *Зверович Э. И.* Краевые задачи теории аналитических функций.— Успехи мат. наук, 1971, 26, вып. 1, с. 113—179.
4. *Котляров В. П.* Конечно-зонные решения уравнения Гейзенберга.— В кн.: Сборник научных трудов Физико-технического института низких температур АН УССР. Киев : Наук. думка, 1981, с. 50—67.
5. *Ландау Л. Д.* Избранные труды.— М. : Наука, 1965.— Т. 3. 340 с.
6. *Матвеев В. Б., Итс А. Р.* Алгебро-геометрическое интегрирование уравнения МНШ.— Сб. науч. тр. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР, 1981, № 101, с. 64—76.
7. *Теория* солитонов : Метод обратной задачи /Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П. и др.— М. : Наука, 1980.— 320 с.

Мат. ин-т им. В. А. Стеклова АН СССР, Москва
Ин-т прикл. пробл. механики и математики
АН УССР, Львов

Получено
12.01.83