Здесь

$$A_n = \iint\limits_G (u_j f^{j(n)} + \gamma_j \varphi^{j(n)})\, dG; \quad a_n = \iint\limits_G (u_j^{(n)} f^{j(n)} + \gamma_j^{(n)} \varphi^{j(n)})\, dG.$$

Величину A_n найдем на основе соотношения взаимности (13), в котором предполагаем, что отмеченные штрихом — собственные функции. Найденную таким образом обобщенную координату окончательно запишем в форме

$$g_n(\tau) = g_n(0)\cos\omega_n\tau + \dot{g}_n(0)\frac{\sin\omega_n\tau}{\omega_n} +$$
$$+ \frac{1}{\omega_n a_n}\left\{\iint\limits_G (\tilde{q}^j u_j^{(n)} + \tilde{m}^j \gamma_j^{(n)})\, dG - \int\limits_g (N^{j(n)} u_j + M^{j(n)}\gamma_j -\right.$$
$$\left. - \tilde{N}^j u_j^{(n)} - \tilde{M}^j \gamma_j^{(n)})\, dg\right\} * \sin\omega_n\tau,$$

где звездочкой обозначена свертка; величины $\tilde{q}^j$, $\tilde{m}^j$, $\tilde{N}^j$, $\tilde{M}^j$ определены выражениями (7), (8).

Таким образом, при заданных граничных и начальных условиях и наличии системы собственных функций искомые обобщенные координаты полностью определяются при любом изменении поверхностных нагрузок, температурного и концентрационного полей.

1. *Айнола Л. Я.* Вариационные принципы и теорема взаимности для динамических задач теории оболочек.— В кн.: Тр. VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. М. : Наука, 1966, с. 9—13.
2. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек.— Киев : Наук. думка, 1978.— 344 с.
3. *Швец Р. Н., Флячок В. М.* Некоторые теоремы теории термоупругости анизотропных оболочек.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 6, с. 527—531.
4. *Швец Р. Н., Флячок В. М.* Уравнения механотермодиффузии анизотропных оболочек с учетом поперечных деформаций.— Мат. методы и физ-мех. поля, 1984, вып. 20, с. 54—61.

Укр. полигр. ин-т
им. Ивана Федорова,

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов

Получено
14.10.82

УДК 539.377

Ю. А. Чернуха

О ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТОНКИХ ПЛАСТИН

К настоящему времени опубликовано большое количество различных вариантов теории пластин и оболочек. Подробный анализ наиболее употребительных из них (применительно к поведению тонкостенных элементов под силовой нагрузкой) содержится в работе [1]; там же обсуждаются возможные подходы к построению таких теорий. В последнее время в связи с запросами практики интенсивно развивается термомеханика тонкостенных элементов [2—4]; в цитируемых монографиях приведена обширная библиография, отражающая состояние проблемы, а также обобщены основные результаты в этой области. В настоящей работе в развитие указанных исследований предлагается вариант теории термонапряженных пластин, позволяющий, в частности, более полно описать эффекты, связанные с объемностью напряженно-деформированного состояния, которые особенно существенны в приконтактных зонах кусочно-однородных пластин, окрестностях включений и т. п.

Рассмотрим пластину, ограниченную плоскостями $z = \pm h$ и цилиндрической поверхностью S. Предполагаем, что к поверхностям пластины $z = \pm h$ приложена только нормальная нагрузка. Введем связанные с компонентами вектора перемещений u_x, u_y, u_z функции:

$$\Phi = L_0(\varphi), \quad \Psi = L_0(\psi), \quad w = L_0(u_z),$$
$$\Phi_* = L_0\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right), \quad \Psi_* = L_0\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right), \quad \omega = L_0\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right); \tag{1}$$

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x},$$
$$L_n(f) = \frac{1}{2h^{n+1}} \int\limits_{-h}^{h} f z^n dz. \tag{2}$$

Для функций (1) получены следующие две системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[2\omega - (1 + a_1)(\omega + \Delta\Phi - \alpha_1 T)\right] - \frac{\partial}{\partial y}(\Delta\Psi) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left[2\omega - (1 + a_1)(\omega + \Delta\Phi - \alpha_1 T)\right] + \frac{\partial}{\partial x}(\Delta\Psi) = 0, \tag{3}$$
$$\frac{4}{45} h^4 a_2 \Delta^2 \omega - 2\Delta\Phi + (1 + a_1)(\omega + \Delta\Phi - \alpha_1 T) = G^{-1}P^+ + \frac{1}{6} h^2 \alpha_1 \Delta\Theta_1;$$

$$\Delta(w + \Phi_*) = -(Gh)^{-1} P^-,$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2}{3} h^2 a_2 \Delta (w - \Phi_*) + w + \Phi_* + \frac{1}{3} h G^{-1} P^- + h\alpha_1 \Theta_2\right] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\Psi_* - \frac{1}{3} h^2 \Delta \Psi_*\right) = 0, \tag{4}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{2}{3} h^2 a_2 \Delta (w - \Phi_*) + w + \Phi_* + \frac{1}{3} h G^{-1} P^- + h\alpha_1 \Theta_2\right] -$$
$$- \frac{\partial}{\partial x}\left(\Psi_* - \frac{1}{3} h^2 \Delta \Psi_*\right) = 0.$$

Здесь обозначено: G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; t — температура; α — температурный коэффициент линейного расширения, кроме того:

$$P^\pm = \frac{1}{2}\left[\sigma_z(h) \pm \sigma_z(-h)\right]; \quad \Theta_1 = \int\limits_{-1}^{1} t(\zeta)(1 - 3\zeta^2)\, d\zeta;$$
$$\Theta_2 = \int\limits_{-1}^{1} t(\zeta)\,\zeta d\zeta; \quad \zeta = h^{-1}z; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$
$$T = L_0(t); \quad a_1 = (1 - 2\nu)^{-1}; \quad a_2 = \frac{1}{2}(1 - \nu)^{-1};$$
$$\alpha_1 = (1 + a_1)^{-1}(3a_1 - 1)\,\alpha.$$

Уравнения (3), (4) получены на основании оперативного решения трехмерной задачи термоупругости для слоя, поверхности которого загружены указанным выше образом, и последующего использования условия малости отношения толщины пластины к ее двум другим характерным размерам. Аналогично получены соотношения

$$L_0(u_n) = \frac{\partial\Phi}{\partial n} + \frac{\partial\Psi}{\partial s}, \quad 3L_2(u_n) = L_0(u_n) - \frac{2}{15} h^2 \frac{\partial\omega}{\partial n},$$
$$L_0(u_s) = \frac{\partial\Phi}{\partial s} - \frac{\partial\Psi}{\partial n}, \quad 3L_2(u_s) = L_0(u_s) - \frac{2}{15} h^2 \frac{\partial\omega}{\partial s},$$
$$3L_1(u_z) = h\omega,$$
$$G^{-1}L_0(\sigma_n) = 2\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n} + \frac{\partial\Psi}{\partial s}\right) - (1 - a_1)(\omega + \Delta\Phi - \alpha_1 T) - 2\alpha_1 T,$$

$$3L_2(\sigma_n) = L_0(\sigma_n) - \frac{4}{15} Gh^2 \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2} - (1 - 2a_2)\Delta\omega \right], \tag{5}$$

$$G^{-1} L_0(\tau_{ns}) = 2 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} - \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) + \Delta \Psi,$$

$$3L_2(\tau_{ns}) = L_0(\tau_{ns}) - \frac{4}{15} Gh^2 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \omega}{\partial s} \right),$$

$$6L_1(\tau_{nz}) = Gh \frac{\partial}{\partial n} \left(\alpha_1 \Theta_1 - \frac{8}{15} h^2 a_2 \Delta\omega \right);$$

$$3L_1(u_n) = h \left(\frac{\partial \Phi_*}{\partial n} + \frac{\partial \Psi_*}{\partial s} \right), \quad 3L_1(u_s) = h \left(\frac{\partial \Phi_*}{\partial s} - \frac{\partial \Psi_*}{\partial n} \right),$$

$$L_0(u_z) = w, \quad G^{-1} L_0(\tau_{nz}) = \frac{\partial}{\partial n} (w + \Phi_*) + \frac{\partial \Psi_*}{\partial s}, \tag{6}$$

$$3(Gh)^{-1} L_1(\sigma_n) = 2 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \Phi_*}{\partial n} + \frac{\partial \Psi_*}{\partial s} \right) + (1 - 2a_2)\Delta(w - \Phi_*) - h^{-1}\alpha_1\Theta_2,$$

$$3(Gh)^{-1} L_1(\tau_{ns}) = 2 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \Phi_*}{\partial s} - \frac{\partial \Psi_*}{\partial n} \right) + \Delta \Psi_*.$$

Координаты n, s связаны с внешней нормалью и касательной к кривой, образованной пересечением срединной плоскости пластины ($z = 0$) с цилиндрической поверхностью S. Формулы (5), (6) решают вопрос о формулировке граничных условий для уравнений (3), (4) в случае, когда на поверхности S (или ее части) заданы напряжения или перемещения, а также вопрос об условиях сопряжения, когда S — поверхность контакта разнородных пластин.

Как следует из полученных соотношений, рассмотренная задача термоупругости для тонкой пластины распадается на две: симметричную (относительно плоскости $z = 0$ — соотношения (3), (5)) и задачу изгиба (соотношения (4), (6)).

Компоненты вектора перемещений и тензора напряжений выражаются через функции (1) следующими формулами:

$$u_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} + h\zeta \left(\frac{\partial \Phi_*}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_*}{\partial y} \right) + \frac{1}{6} h^2 (1 - 3\zeta^2) \frac{\partial \omega}{\partial x},$$

$$u_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} + h\zeta \left(\frac{\partial \Phi_*}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_*}{\partial x} \right) + \frac{1}{6} h^2 (1 - 3\zeta^2) \frac{\partial \omega}{\partial y},$$

$$u_z = w + h\zeta\omega;$$

$$G^{-1}\sigma_x = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) - (1 - a_1)(\omega + \Delta\Phi - \alpha_1 T) - 2\alpha_1 t +$$
$$+ h\zeta \left[2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi_*}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_*}{\partial y} \right) + (1 - 2a_2)\Delta(w - \Phi_*) \right] +$$
$$+ \frac{1}{3} h^2 (1 - 3\zeta^2) \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - (1 - 2a_2)\Delta\omega \right],$$

$$G^{-1}\sigma_y = 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) - (1 - a_1)(\omega + \Delta\Phi - \alpha_1 T) - 2\alpha_1 t +$$
$$+ h\zeta \left[2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi_*}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_*}{\partial x} \right) + (1 - 2a_2)\Delta(w - \Phi_*) \right] +$$
$$+ \frac{1}{3} h^2 (1 - 3\zeta^2) \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - (1 - 2a_2)\Delta\omega \right], \tag{7}$$

$$G^{-1}\tau_{xy} = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \Delta\Psi + h\zeta \left[2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi_*}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_*}{\partial x} \right) + \Delta\Psi_* \right] +$$
$$+ \frac{1}{3} h^2 (1 - 3\zeta^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right),$$

$$G^{-1}\tau_{xz} = \frac{3}{2}(1 - \zeta^2) \left[\frac{\partial}{\partial x}(w + \Phi_*) + \frac{\partial \Psi_*}{\partial y} \right],$$

$$G^{-1}\tau_{yz} = \frac{3}{2}(1-\zeta^2)\left[\frac{\partial}{\partial y}(w+\Phi_*) - \frac{\partial \Psi_*}{\partial x}\right],$$

$$\sigma_z = P^+ + \zeta P^- + \frac{1}{2}\zeta(1-\zeta^2)P^- -$$

$$-\frac{1}{6}G\left[a_2 h^4 (1-\zeta^2)^2 \Delta^2 \omega + 3\alpha_1 h^2 \Delta\Theta_3\right];$$

$$\Theta_3 = 4\int_{-1}^{\zeta} t(\eta)(\zeta-\eta)\,d\eta - (1+\zeta)^2 \int_{-1}^{1} t(\zeta)\,d\zeta + (2-\zeta)(1+\zeta)^2 \int_{-1}^{1} t(\zeta)\,\zeta d\zeta.$$

В качестве примера рассмотрим находящуюся в условиях плоской деформации бесконечную пластину, изготовленную из двух пластин одинаковой толщины, но различных по физико-механическим свойствам. Ось Oy направим по линии контакта. Пусть левая и правая пластины (полуплоскости) нагреты до различных постоянных температур t^- и t^+; здесь и далее индекс «—» относит рассматриваемую величину к левой полуплоскости, а «+» — к правой.

Для определения напряженно-деформированного состояния описанной кусочно-однородной пластины необходимо найти решения системы уравнений (3), удовлетворяющие следующим граничным условиям и условиям сопряжения.

На основании соотношений (5) имеем: при $x = \pm\infty$ (края свободны)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi^\pm}{\partial x} + \frac{\partial \Psi^\pm}{\partial y}\right) - \alpha_1^\pm T^\pm - \frac{1}{2}(1-a_1^\pm)(\omega^\pm + \Delta\Phi^\pm - \alpha_1^\pm T^\pm) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi^\pm}{\partial y} - \frac{\partial \Psi^\pm}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\Delta\Psi^\pm = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega^\pm}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 \omega^\pm}{\partial x^3} = 0;$$

при $x = 0$ (непрерывность напряжений σ_x, τ_{xy}, τ_{xz} и вектора перемещений)

$$\frac{\partial \Phi^-}{\partial x} + \frac{\partial \Psi^-}{\partial y} = \frac{\partial \Phi^+}{\partial x} + \frac{\partial \Psi^+}{\partial y}, \quad \frac{\partial \omega^-}{\partial x} = \frac{\partial \omega^+}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \Phi^-}{\partial y} - \frac{\partial \Psi^-}{\partial x} = \frac{\partial \Phi^+}{\partial y} - \frac{\partial \Psi^+}{\partial x}, \quad \omega^- = \omega^+,$$

$$G^- a_2^- \frac{\partial^2 \omega^-}{\partial x^2} = G^+ a_2^+ \frac{\partial^2 \omega^+}{\partial x^2}, \quad G^- a_2^- \frac{\partial^3 \omega^-}{\partial x^3} = G^+ a_2^+ \frac{\partial^3 \omega^+}{\partial x^3}.$$

Кроме того, требуется, чтобы в любом сечении $y = \mathrm{const}$ главный вектор всех усилий был равен нулю. Отметим, что выше не выписаны те из условий сопряжения, которые в рассматриваемом случае (плоская деформация) удовлетворются автоматически.

Не останавливаясь на деталях получения решения описанной задачи, приведем окончательные формулы для напряжений:

$$\sigma_x^+ = \frac{\sqrt{5}}{2}\sigma_0 B(1-3\zeta^2)e^{-\lambda x}\left[(1-b)\cos\lambda x - (1+3b)\sin\lambda x\right],$$

$$\sigma_x^- = \frac{\sqrt{5}}{2}\sigma_0 B(1-3\zeta^2)e^{\lambda x}\left[(1-b)\cos\lambda x - (3+b)\sin\lambda x\right],$$

$$\sigma_y^\pm = \mp\sigma_0 - \nu^\pm \sigma_x^\pm, \quad \tau_{xy}^\pm = \tau_{xz}^\pm = \tau_{yz}^\pm = 0, \tag{8}$$

$$\sigma_z^+ = -\frac{15}{8}\sigma_0 B(1-\zeta^2)^2 e^{-\lambda x}\left[(1+3b)\cos\lambda x - (1-b)\sin\lambda x\right],$$

$$\sigma_z^- = \frac{15}{8}\sigma_0 B(1-\zeta^2)^2 e^{\lambda x}\left[(3+b)\cos\lambda x + (1-b)\sin\lambda x\right];$$

$$\sigma_0 = \frac{E^+E^-}{E^+ + E^-}(\alpha^+T^+ - \alpha^-T^-), \quad b = \frac{1-\nu^-}{1-\nu^+}\frac{G^+}{G^-},$$

$$B = (1-\nu^+)^{-1}(1+6b+b^2)^{-1}\left(1+\frac{G^+}{G^-}\right), \quad \lambda^4 = \frac{45}{4}h^{-4}, \tag{9}$$

где E — модуль Юнга. Отметим, что по классической теории пластин в рассматриваемой системе отличным от нуля будет только напряжение σ_y, причем

$$\sigma_y^+ = -\sigma_0, \quad \sigma_y^- = \sigma_0. \tag{10}$$

Полученное решение дает возможность рассмотреть некоторые частные случаи.

1. Равномерно нагретая кусочно-однородная пластина; напряжения в ней определяются формулами (8) и (9) при $T^+ = T^- = T$.

2. Равномерно нагретая полубесконечная пластина, край которой $x = 0$ жестко защемлен. Для этого случая соотношения (8), (9) при $G^- = \infty$, $\alpha^- = 0$ дают

$$\begin{gathered}\sigma_x = -\frac{\sqrt{5}\,\sigma_0}{2(1-\nu)}(1-3\zeta^2)\,e^{-\lambda x}\sin\lambda x,\\ \sigma_z = -\frac{15\sigma_0}{8(1-\nu)}(1-\zeta^2)^2\,e^{-\lambda x}\cos\lambda x,\\ \sigma_y = -(\sigma_0+\nu\sigma_x), \quad \sigma_0 = E\alpha T.\end{gathered} \tag{11}$$

3. Однородная пластина, температура которой кусочно-постоянна. Полагая в формулах (8) и (9) $G^- = G^+$, $\nu^- = \nu^+$, $\alpha^- = \alpha^+$, получаем

$$\begin{gathered}\sigma_x^\pm = -\frac{\sqrt{5}\,\sigma_0}{2(1-\nu)}(1-3\zeta^2)\,e^{\mp\lambda x}\sin\lambda x,\\ \sigma_z^\pm = \mp\frac{15\sigma_0}{8(1-\nu)}(1-\zeta^2)^2\,e^{\mp\lambda x}\cos\lambda x,\\ \sigma_y^\pm = \mp\sigma_0 - \nu\sigma_x^\pm, \quad \sigma_0 = E\alpha(T^+ - T^-).\end{gathered} \tag{12}$$

Полученные решения имеют быстроизменяющиеся слагаемые (типа погранслоя), что связано с малым коэффициентом при старших производных в третьем из уравнений (3); при удалении от зоны возмущения эти слагаемые затухают тем быстрее, чем тоньше пластина (λ обратно пропорционально h), и на расстоянии нескольких толщин решение практически совпадает с классическим.

Во всех рассмотренных случаях в зоне возмущения (приконтактная зона, окрестность защемленного края, область резкого изменения температуры) напряженное состояние пластины имеет объемный характер — все три главных напряжения отличны от нуля. Причем, как следует из формул (11), (12), максимальное (по модулю) значение напряжения σ_z в несколько раз превосходит величину σ_0, являющуюся основой при расчетах на прочность по классической теории. Отметим также, что указанное значение напряжения σ_z не зависит от толщины пластины; однако напомним, что все соотношения (3) — (7) предложенного варианта теории термонапряженных пластин получены в предположении малости отношения толщины пластины к двум ее другим характерным размерам.

1. *Ворович И. И.* Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек.— В кн.: Материалы I Всесоюз. шк. по теории и числ. методам расчета оболочек и пластин. Тбилиси : Изд-во Тбил. ун-та, 1975, с. 51—144.
2. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках.— Киев : Наук. думка, 1972.— 308 с.
3. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М., Семерак М. М.* Температурные поля и напряжения в элементах электровакуумных приборов.— Киев : Наук. думка, 1981.— 342 с.
4. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек.— Киев : Наук. думка, 1978.— 344 с.

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов

Получено
12.01.83