

которые при  $Q = 0$  и  $\vec{F} = 0$  являются исходными соотношениями известной задачи Даниловской о тепловых напряжениях в упругом полупространстве при тепловом ударе на поверхности [1], сформулированной относительно функции  $\psi = \sigma_{xx} + \sigma_{zz}$  — суммы нормальных напряжений в направлении осей  $x$  и  $z$ .

1. Коваленко А. Д. Термоупругость.— Киев : Вища шк., 1975.— 216 с.
2. Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Гачкевич А. Р., Чернявская Л. В. Термоупругость электропроводных тел.— Киев : Наук. думка, 1977.— 248 с.

Ин-т прикл. пробл. механики  
и математики АН УССР, Львов

Получено  
19.01.83

УДК 536.12:539.377

В. И. Громовык, С. Т. Стасюк, М. В. Боженко

### О ВЛИЯНИИ ТЕПЛОТДАЧИ НА ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ШАРА

В работе [7] исследовано напряженно-деформированное состояние трансверсально-изотропного полого шара при наличии ползучести. При этом принимались заданными температуры внутренней и внешней поверхностей шара и пренебрегалось учетом теплоотдачи, несмотря на то, что именно теплоотдача является одним из существенных факторов, влияющих на термонапряженное состояние элементов конструкций [1, 4—6]. Настоящая работа посвящена выяснению влияния теплоотдачи, мощности внутренних источников тепла на величину температурных напряжений, возникающих в шаре, выполненном из трансверсально-изотропного материала.

Рассмотрим сплошной шар радиусом  $R_2$ , отнесенный к сферической системе координат  $r, \varphi, \theta$ . Пусть шар нагревается равномерно распределенными по объему  $\vartheta = \frac{4}{3} \pi R_1^3 (R_1 \leq R_2)$  внутренними источниками тепла мощности  $q$ , а теплообмен между поверхностью  $r = R_2$  и внешней средой с температурой  $t_c$  осуществляется согласно закону Ньютона. Для определения температурного поля в шаре имеем уравнение теплопроводности

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dt}{dr} = -Q_0 [1 - S_-(r - R_1)] \quad (1)$$

и граничные условия

$$\frac{dt}{dr} = 0 \text{ при } r = 0, \quad \frac{dt}{dr} = -\frac{\alpha}{\lambda} (t - t_c) \text{ при } r = R_2, \quad (2)$$

где  $Q_0 = q/\lambda$ ;  $S_-(r - R_1)$  — асимметричная единичная функция;  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности вдоль координаты  $r$ ;  $t$  — температура.

Решение уравнения (1) ищем в виде

$$t = C_1 + C_2 r^{-1} - \frac{Q_0}{6} \left[ r^2 - \left( r^2 + 2 \frac{R_1^3}{r} - 3R_1^2 \right) S_-(r - R_1) \right],$$

которое после определения постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  из условий (2) и перехода к безразмерным величинам перепишем в следующей форме:

$$\vartheta = \frac{\rho_0}{\text{Bi}} + \frac{1}{6} \left\{ 3 - 2\rho_0 - \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 + \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 + 2 \frac{\rho_0}{\rho} - 3 \right] S_-(\rho - \rho_0) \right\}. \quad (3)$$

Здесь  $\vartheta = \lambda (t - t_c) / q R_1^2$ ;  $\text{Bi} = 3\alpha R_2 / \lambda$ ;  $\rho_0 = R_1 / R_2$ ;  $\rho = r / R_2$ .

Отметим, что решение (3) можно получить также из формулы (31) работы [3], положив  $\lambda_t^{(2)} = \lambda_t^{(1)} = \lambda$ .

Для определения температурных напряжений, возникающих в шаре, имеем уравнения обобщенного закона Гука

$$\begin{aligned} e_r &= \frac{\sigma_r}{E_r} - \frac{\nu_{r\varphi}}{E_r} (\sigma_\varphi + \sigma_\theta) + \alpha_r t, \\ e_\theta &= \frac{1}{E_\varphi} (\sigma_\theta - \nu_{\theta\varphi} \sigma_\varphi) - \frac{\nu_{r\varphi}}{E_r} \sigma_r + \alpha_\theta t, \\ e_\varphi &= \frac{1}{E_\varphi} (\sigma_\varphi - \nu_{\theta\varphi} \sigma_\theta) - \frac{\nu_{r\varphi}}{E_r} \sigma_r + \alpha_\varphi t, \end{aligned} \quad (4)$$

в которых  $e_r, e_\varphi, e_\theta$  — относительные деформации удлинения по трем взаимно перпендикулярным направлениям  $r, \varphi, \theta$ ;  $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_\theta$  — нормальные напряжения;  $E_\varphi$  — модуль Юнга для направлений в плоскости изотропии;  $E_r$  — модуль Юнга для направлений, перпендикулярных к плоскости изотропии;  $\nu_{r\varphi}, \nu_{\theta\varphi}$  — коэффициенты Пуассона, характеризующие сокращение в направлении одной оси (первый индекс) при растяжении в направлении другой (второй индекс);  $\alpha_r, \alpha_\varphi, \alpha_\theta$  — температурные коэффициенты линейного расширения для направлений  $r, \varphi, \theta$ .

Учитывая, что в данном случае  $e_\theta = e_\varphi$ , а  $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$ , из уравнений (4) находим

$$\begin{aligned} \sigma_r &= K_r [(1 - \nu_{\theta\varphi}) e_r + \nu_{r\varphi} \varepsilon e_\varphi - f_1(r)], \\ \sigma_\theta &= \sigma_\varphi = K_\varphi [\nu_{r\varphi} e_r + e_\varphi - f_2(r)], \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} K_\eta &= E_\eta (1 - \nu_{\theta\varphi} - 2\nu_{r\varphi}^2 \varepsilon)^{-1}; \quad \eta = r, \varphi; \\ f_1(r) &= (1 - \nu_{\theta\varphi} + 2\nu_{\theta r} \varepsilon \alpha_0) \alpha_r t; \\ f_2(r) &= (\alpha_\theta + \nu_{r\varphi}) \alpha_\varphi t; \quad \varepsilon = E_\varphi / E_r; \quad \alpha_0 = \alpha_\varphi / \alpha_r. \end{aligned}$$

Относительные деформации удлинения  $e_r$  и  $e_\varphi$  связаны с перемещением  $u$  известными [2] соотношениями:

$$e_r = \frac{du}{dr}, \quad e_\varphi = \frac{u}{r}. \quad (6)$$

Подставляя формулы (5) с учетом (6) в уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0,$$

получаем дифференциальное уравнение для определения перемещения  $u$  в виде

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + 2r \frac{du}{dr} - \omega u = \varphi(r). \quad (7)$$

Здесь

$$\varphi(r) = \frac{r^2}{1 - \nu_{\theta\varphi}} \left\{ \frac{df_1(r)}{dr} + \frac{2}{r} [f_1(r) - \varepsilon f_2(r)] \right\}; \quad \omega = 2\varepsilon \frac{1 - \nu_{r\varphi}}{1 - \nu_{\theta\varphi}}.$$

Общее решение уравнения (7) будет таким:

$$u = A_1 r^{k_1} + A_2 r^{k_2} + \frac{1}{k_2 - k_1} \left[ r^{k_2} \int_0^r \xi^{-k_2-1} \varphi(\xi) d\xi - r^{k_1} \int_0^r \xi^{-k_1-1} \varphi(\xi) d\xi \right], \quad (8)$$

где  $A_j$  ( $j = 1, 2$ ) — постоянные интегрирования;

$$k_j = \frac{1}{2} (-1 \pm \sqrt{1 + 4\omega}). \quad (9)$$

Подставляя выражение (8) в (6), а затем результат в (5) находим

$$\begin{aligned} \sigma_r &= K_r [A_1 m_1 r^{k_1-1} + A_2 m_2 r^{k_2-1} + \Phi_1(r)], \\ \sigma_\varphi &= \sigma_\theta = K_\varphi [A_1 n_1 r^{k_1-1} + A_2 n_2 r^{k_2-1} + \Phi_2(r)], \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$m_j = k_j (1 - \nu_{\theta\varphi}) + 2\varepsilon \nu_{r\varphi}; \quad n_j = 1 + k_j \nu_{r\varphi};$$

$$\Phi_1(r) = \frac{1}{k_2 - k_1} \left[ m_2 r^{k_2-1} \int_0^r \xi^{-k_2-1} \varphi(\xi) d\xi - m_1 r^{k_1-1} \int_0^r \xi^{-k_1-1} \varphi(\xi) d\xi \right] - f_1(r);$$

$$\Phi_2(r) = \frac{1}{k_2 - k_1} \left[ n_2 r^{k_2-1} \int_0^r \xi^{-k_2-1} \varphi(\xi) d\xi - n_1 r^{k_1-1} \int_0^r \xi^{-k_1-1} \varphi(\xi) d\xi \right] - f_2(r).$$

Допустим, что поверхность шара свободна от напряжения, т. е.  $\sigma_r = 0$  при  $r = R_2$ . Учитывая также, что  $u = 0$  при  $r = 0$ , постоянные интегрирования  $A_1, A_2$  находим в виде

$$A_1 = -\Phi_1(R_1) m_1^{-1} R_2^{1-k_1}, \quad A_2 = 0. \quad (11)$$

Подставив выражения (11) в (10) с учетом (3), после перехода к безразмерным величинам найдем следующие формулы для определения напряжений:

$$\sigma_r^* = \Phi_1(\rho) - \Phi_1(1) \rho^{k_1-1}, \quad (12)$$

$$\sigma_\varphi^* = \Phi_2(\rho) - \frac{n_1}{m_1} \Phi_1(1) \rho^{k_1-1}.$$

Здесь введены обозначения:

$$\sigma_\eta^* = \frac{\sigma_\eta}{K_\eta \alpha_r t_c}; \quad \Phi_1(\rho) = \frac{1}{k_2 - k_1} (M_2 - M_1) - P(1 - \nu_{\theta\varphi}) (\theta \text{Ki} + 1);$$

$$\Phi_2(\rho) = \frac{1}{k_2 - k_1} (N_2 - N_1) - Q(1 - \nu_{\theta\varphi}) (\theta \text{Ki} + 1),$$

$$\begin{aligned} M_j &= m_j B_j, \quad N_j = n_j B_j, \quad B_j = P(\theta \text{Ki} + 1) + [(1 + k_j)P - 2\epsilon Q] \times \\ &\times \left\langle \frac{1}{1 - k_j} + \text{Ki} \left\{ \frac{\rho_0}{\text{Bi}(1 - k_j)} + \frac{1}{6} \left[ \frac{3}{1 - k_j} - \frac{2\rho_0}{1 - k_j} - \frac{\rho^2}{\rho_0^2(3 - k_j)} + \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. \rho^{k_1-1} \left( \frac{\rho^{3-k_j} - \rho_0^{3-k_j}}{\rho_0(3 - k_j)} + 2\rho_0 \frac{\rho^{2-k_j} - \rho_0^{2-k_j}}{2 - k_j} - 3 \frac{\rho^{1-k_j} - \rho_0^{1-k_j}}{1 - k_j} \right) S_-(\rho - \rho_0) \right] \right\} \right\rangle, \\ P &= (1 - \nu_{\theta\varphi} + 2\nu_{\theta r} \epsilon \alpha_0) (1 - \nu_{\theta\varphi})^{-1}, \quad \text{Ki} = qR_1^2 / \lambda t_c, \\ Q &= (\alpha_0 + \nu_{r\varphi}) (1 - \nu_{\theta\varphi})^{-1}. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда на поверхности  $r = R_1$  ( $R_1 < R_2$ ) полого шара поддерживается постоянная температура  $t_1$ , а с поверхности  $r = R_2$  осуществляется конвективный теплообмен с внешней средой температуры  $t_c$  по закону Ньютона. Условия (2) теперь принимают вид

$$t = t_1 \text{ при } r = R_1, \quad \frac{dt}{dr} = -\frac{\alpha}{\lambda} (t - t_c) \text{ при } r = R_2. \quad (13)$$

Интегрируя однородное уравнение, соответствующее уравнению (1), и определяя постоянные интегрирования из граничных условий (13), находим выражение для определения температурного поля в шаре, которое в безразмерных величинах записываем в виде

$$\vartheta = 1 - \frac{\text{Bi}(1 - \vartheta_c)}{\text{Bi}(1 - \rho_0) + \rho_0} \left( 1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right). \quad (14)$$

Здесь  $\vartheta = t/t_1$ ;  $\vartheta_c = t_c/t_1$ ;  $\text{Bi} = \alpha R_2 / \lambda$ .

Перейдя к пределу в выражении (14) при  $\text{Bi} \rightarrow \infty$ , получим решение задачи теплопроводности для случая, когда на поверхности  $r = R_2$  поддерживается постоянная температура, равная температуре внешней среды. Возникающие в шаре температурные напряжения определяются соотношениями (10). При этом общее решение уравнения (7) ищем в области  $R_1 \leq r \leq R_2$ .

В случае, когда на поверхности  $r = R_1$  задано равномерно распределенное давление  $\sigma_0$ , а внешняя поверхность шара свободна от нагрузки, то для

определения постоянных  $A_1$  и  $A_2$  получаем выражения

$$A_1 = R_2^{1-k_1} \frac{\Phi_1(R_2) \rho_0^{k_2-1} - \Phi_1(R_1) - \sigma^*}{m_1 (\rho_0^{k_1-1} - \rho_0^{k_2-1})}, \quad (15)$$

$$A_2 = R_2^{1-k_2} \frac{\Phi_1(R_2) \rho_0^{k_1-1} - \Phi_1(R_1) - \sigma^*}{m_2 (\rho_0^{k_2-1} - \rho_0^{k_1-1})}.$$

Здесь  $\sigma^* = \sigma_0/K_i$ .

Подставляя выражения (15) в (10) с учетом (14), после перехода к безразмерным величинам для определения напряжений находим формулы

$$\sigma_r^* = D_1 m_1 \rho^{k_1-1} + D_2 m_2 \rho^{k_2-1} + \Phi_1(\rho), \quad (16)$$

$$\sigma_\varphi^* = \sigma_\theta^* = D_1 n_1 \rho^{k_1-1} + D_2 n_2 \rho^{k_2-1} + \Phi_2(\rho),$$

где

$$\sigma_\eta^* = \frac{\sigma_\eta}{K_r t_i \alpha_r} (\eta = 0, r, \varphi, \theta); \quad D_1 = \frac{\Phi_1(1) \rho_0^{k_2-1} - \Phi_1(\rho_0) - \sigma_0^*}{m_1 (\rho_0^{k_1-1} - \rho_0^{k_2-1})};$$

$$D_2 = \frac{\Phi_1(1) \rho_0^{k_1-1} - \Phi_1(\rho_0) - \sigma_0^*}{m_2 (\rho_0^{k_2-1} - \rho_0^{k_1-1})}; \quad \Phi_1(\rho) = \frac{M_2 - M_1}{k_2 - k_1} - \vartheta \alpha_r^* (1 - \nu_{\theta\varphi});$$

$$\Phi_2(\rho) = \frac{N_2 - N_1}{k_2 - k_1} - \vartheta \alpha_\varphi^* (1 - \nu_{\theta\varphi}); \quad M_j = m_j \{ \alpha_r^* (\vartheta - \rho^{k_j-1} \rho_0^{1-k_j}) +$$

$$+ [\alpha_r^* (1 + k_j) - 2\varepsilon \alpha_\varphi^*] \Omega_j \}; \quad N_j = n_j \{ \alpha_r^* (\vartheta - \rho^{k_j-1} \rho_0^{1-k_j}) +$$

$$+ [\alpha_r^* (1 + k_j) - 2\varepsilon \alpha_\varphi^*] \Omega_j \}; \quad \Omega_j = \frac{(1 - \vartheta_0) (1 - \rho^{k_j-1} \rho_0^{1-k_j})}{1 - k_j} -$$

$$+ \frac{\vartheta_0 \rho_0 (1 - \rho^{k_j} \rho_0^{-k_j})}{\rho k_j} (j = 1, 2); \quad \vartheta_0 = \frac{\text{Bi} (1 - \vartheta_c)}{\text{Bi} (1 - \rho_0) + \rho_0};$$

$$\alpha_r^* = \frac{1 - \nu_{\theta\varphi} + 2\nu_{r\varphi} \varepsilon \alpha_0}{1 - \nu_{\theta\varphi}}; \quad \alpha_\varphi^* = \frac{\nu_{r\varphi} + \alpha_0}{1 - \nu_{\theta\varphi}}.$$

По формулам (12), (16) проведен численный анализ для случая, когда шар выполнен из трансверсально-изотропного материала 25Cr20Ni, для которого [7]  $E_r = 17,7 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $E_\varphi = 20,3 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\alpha_r = \alpha_\varphi = \alpha_\theta = 1,7 \cdot 10^{-5}$  1/°С,  $\nu_{r\varphi} = \nu_{\theta\varphi} = 0,3$ . При этом принято  $\rho_0 = 0,5$ ,  $\sigma_0^* = 0$ ,  $\vartheta_c = 1/3$ .

На рис. 1, 2 приведены изменения радиальных и меридиональных температурных напряжений вдоль радиуса шара для  $\text{Bi} = 1$  и относительной мощности источников  $K_i = 0,01; 0,4; 1$  (кривые 1—3) при нагреве сплошного шара равномерно распределенными по объему  $v = \frac{4}{3} \pi R_i^3$  внутренними источниками

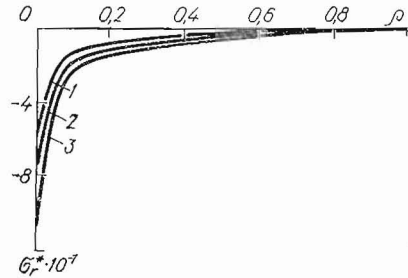


Рис. 1.

тепла. Из графиков видно, что радиальные напряжения по всему объему шара сжимающие, а меридиональные меняют знак и в приповерхностных слоях они растягивающие. Максимального значения напряжения достигают в центре шара, т. е. при  $\rho = 0$ , причем меридиональные превышают радиальные более чем в 2 раза.

Зависимости максимальных радиальных (сплошные линии) и меридиональных (штриховые) напряжений от величины  $\text{Bi}$  для значений  $K_i = 0,01; 0,1; 0,4; 0,7; 1$  (кривые 1—5) изображены на рис. 3. В рассмотренных случаях величина  $\text{Bi} > 20$  практически не оказывает влияния на величину напряжений. Уменьшение величины  $\text{Bi}$  приводит к резкому возрастанию напряжений в шаре.

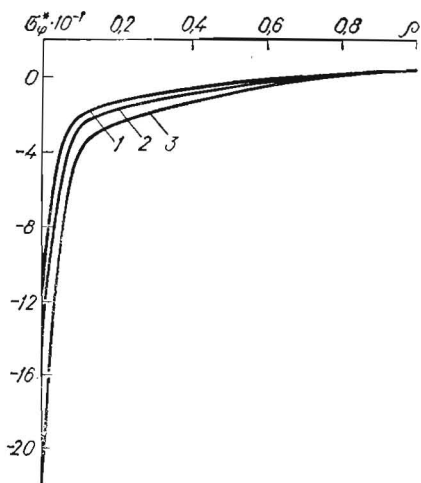


Рис. 2

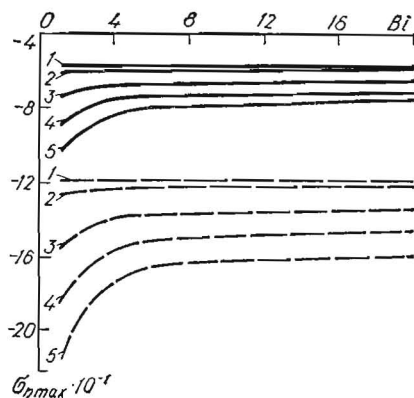


Рис. 3

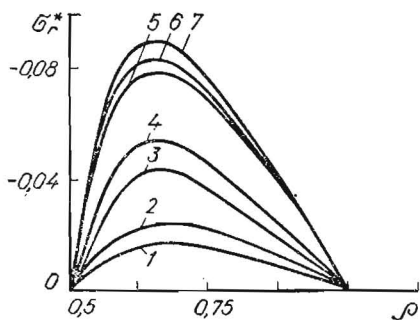


Рис. 4

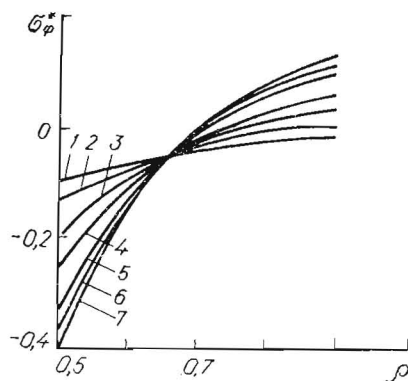


Рис. 5

Графики изменения температурных напряжений, возникающих в полем шаре, представлены на рис. 4, 5. Исследованы зависимости радиальных и меридиональных напряжений от безразмерного радиуса для различных значений  $Bi = 0; 0,1; 0,5; 1; 5; 10; \infty$  (кривые 1—7). Полученные зависимости качественно согласуются с результатами, приведенными в работе [7].

1. Громовык В. И. Об учете теплоотдачи в локально нагреваемых термоупругих пластинках из композитных материалов.— Механика композит. материалов, 1979, № 6, с. 1027—1030.
2. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела.— М.: Наука, 1977.— 416 с.
3. Махоркин И. Н. Термоупругость кусочно-однородных сферических тел.— В кн.: Математические методы в термомеханике. Киев: Наук. думка, 1978, с. 163—172.
4. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках.— Киев: Наук. думка, 1972.— 308 с.
5. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М., Громовык В. И., Лозбень В. Л. Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи.— Киев: Наук. думка, 1977.— 160 с.
6. Швец Р. Н., Раврик М. С. Исследование концентрационных напряжений цилиндрической оболочки типа Тимошенко, обусловленных процессом термодиффузии.— В кн.: Композиционные материалы и новые конструкции. Киев: Наук. думка, 1977, с. 46—54.
7. Foshiaki H. Relief of thermal stresses in a transversely anisotropic hollow sphere trough creep.— Trans. Jap. Soc. Mech. Eng., 1972, 33, N 315, p. 2743—2748.

Ин-т прикл. пробл. механики  
и математики АН УССР, Львов

Получено  
14.02.83