жение σ_y затухает вдоль оси X тем быстрее, чем больше расстояние между источниками тепла. Величина напряжений σ_x вдоль оси X на порядок меньше напряжения σ_y.

1. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Операционное исчисление.— М. : Высш. шк., 1975.— 407 с.
2. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках.— Киев : Наук. думка, 1972.— 308 с.
3. *Снеддон Н.* Преобразование Фурье.— М. : Изд-во иностр. лит., 1955.— 668 с.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики АН УССР, Львов

Получено 07.12.82

УДК 539.377

А. Н. Кулик

ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛОСЫ-ПЛАСТИНКИ, НАГРЕВАЕМОЙ ДВИЖУЩИМСЯ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА

В работе [3] определено установившееся температурное поле тонкой полосы-пластинки, нагреваемой источником тепла постоянной мощности, движущимся с постоянной скоростью вдоль средней линии полосы. В работе [2] определены температурные напряжения в полосе-пластинке, нагреваемой неподвижными постоянной мощности источниками тепла. Неустановившиеся температурные напряжения в полосе-пластинке, обусловленные последовательно включаемыми парами неподвижных источников тепла постоянной мощности, определены в работе [1]. В упомянутых работах применялся метод интегральных преобразований. В настоящей работе также используется этот метод для определения температурных напряжений, обусловленных движущимся по заданному закону источником тепла, мощность которого является известной функцией времени.

Если торцы $y = 0$, $y = l$ полосы-пластинки теплоизолированы, то ее температурное поле будет таким же, как и поле бесконечной пластинки, нагреваемой источниками тепла, расположенными соответствующим образом. Пусть в начальный момент времени включается и начинает движение от точки (x_0, y_0) согласно закону

$$x(\tau) = x_0 + \int_0^\tau V_x(\xi)\,d\xi, \quad y(\tau) = y_0 + \int_0^\tau V_y(\xi)\,d\xi$$

сосредоточенный источник тепла мощностью $q(\tau)$. Температура t_c внешней среды и коэффициент теплоотдачи α_z с боковых поверхностей $z = \pm\delta$ принимаются постоянными. Для определения температурного поля T имеем уравнение

$$\Delta\vartheta - \varkappa^2\vartheta - \frac{1}{a}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau} = -\frac{1}{2\delta\lambda}F(x, y, \tau) \tag{1}$$

и начальное условие $\vartheta|_{\tau=0} = 0$. Здесь

$$\varkappa^2 = \frac{\alpha_z}{\lambda\delta}; \quad \vartheta = T - t_c; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$F(x, y, \tau) = q(\tau)\,\delta(x - x(\tau))\Big\{\delta(y - y(\tau)) + \delta(y + y(\tau)) + \sum_{k=1}^{\infty}[\delta(y + y(\tau) + 2kl) + \delta(y + y(\tau) - 2kl) + \delta(y - y(\tau) + 2kl) + \delta(y - y(\tau) - 2kl)]\Big\}.$$

Применяя преобразование Лапласа по времени τ и Фурье по координатам x и y, получаем

$$\tilde{\vartheta} = \frac{a}{2\delta\lambda}[s + a(\varkappa^2 + \xi^2 + \eta^2)]^{-1}\tilde{F}(\xi, \eta, s). \tag{2}$$

Применяя к (2) обратные преобразования Лапласа и Фурье и используя теоремы о свертках, находим

$$\bar{\vartheta} = Q\int\limits_0^\tau \overline{\delta(x - x(\tau - \tau_0))}\, q(\tau - \tau_0)\exp[-(\varkappa^2 + \xi^2)a\tau_0]\left\{\exp\left(-\frac{y_-^2}{4a\tau_0}\right) + \right.$$

$$+\exp\left(-\frac{y_+^2}{4a\tau_0}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{(y_- + 2kl)^2}{4a\tau_0}\right) + \exp\left(-\frac{(y_- - 2kl)^2}{4a\tau_0}\right) + \right.$$

$$\left.\left. + \exp\left(-\frac{(y_+ + 2kl)^2}{4a\tau_0}\right) + \exp\left(-\frac{(y_+ - 2kl)^2}{4a\tau_0}\right)\right]\right\}\frac{d\tau_0}{\sqrt{2a\tau_0}}, \qquad (3)$$

$$y_\pm = y \pm y(\tau - \tau_0); \qquad Q = \frac{a}{2\lambda\delta\sqrt{2\pi}}.$$

Если источник тепла в момент времени τ_* выключается, то следует положить

$$q(\tau) = q_0(\tau)[S_+(\tau) - S_+(\tau - \tau_*)].$$

Напряжения определим по известным формулам

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(U - \Phi), \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(U - \Phi), \qquad (4)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(U - \Phi),$$

где функция U удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Delta U = 0, \qquad (5)$$

а функция Φ есть частное решение уравнения

$$\Delta\Phi = \alpha_t E\vartheta. \qquad (6)$$

Применив к уравнениям (5), (6) преобразование Фурье, найдем

$$\frac{d^4\bar{U}}{dy^4} - 2\xi^2\frac{d^2\bar{U}}{dy^2} + \xi^4\bar{U} = 0, \qquad (7)$$

$$\frac{d^2\bar{\Phi}}{dy^2} - \xi^2\bar{\Phi} = \alpha_t E\bar{\vartheta}(\xi, y, \tau). \qquad (8)$$

После применения преобразования Фурье к формулам (4) получим

$$\bar{\sigma}_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(U - \bar{\Phi}), \quad \bar{\sigma}_{yy} = -\xi^2(\bar{U} - \bar{\Phi}),$$

$$\bar{\sigma}_{xy} = i\xi\frac{\partial}{\partial y}(\bar{U} - \bar{\Phi}). \qquad (9)$$

Частное решение уравнения (8) возьмем в виде

$$\bar{\Phi} = -\frac{\alpha_t EQ\sqrt{\pi}}{4|\xi|}\int\limits_0^\tau \overline{\delta(x - x(\tau - \tau_0))}\, q(\tau - \tau_0)\, e^{-a\tau_0\varkappa^2}\Psi(\xi, y, \tau_0)\, d\tau_0, \qquad (10)$$

где

$$\Psi(\xi, y, \tau_0) = \omega(\xi, y, \tau_0) + \omega(\xi, -y, \tau_0) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}[\omega(\xi, y + 2kl, \tau_0) + \omega(\xi, y - 2kl, \tau_0) + \omega(\xi, -y + 2kl, \tau_0) +$$

$$+\omega(\xi, -y - 2kl, \tau_0)]; \quad \omega(\xi, y, \tau_0) = e^{|\xi|y_-}\operatorname{erfc}\left(\frac{y_-}{2\sqrt{a\tau_0}} + |\xi|\sqrt{a\tau_0}\right) +$$

$$+ e^{|\xi|y_+}\operatorname{erfc}\left(\frac{y_+}{2\sqrt{a\tau_0}} + |\xi|\sqrt{a\tau_0}\right).$$

Постоянные, входящие в решение уравнения (7), определим, удовлетворив трансформированным по Фурье условиям отсутствия напряжений на торцах полосы-пластинки:

$$\bar{\sigma}_{yy}|_{y=0} = -\xi^2(\bar{U}-\bar{\Phi})_{y=0} = 0, \quad \bar{\sigma}_{yy}|_{y=l} = -\xi^2(\bar{U}-\bar{\Phi})_{y=l} = 0,$$

$$\bar{\sigma}_{xy}|_{y=0} = i\xi\frac{\partial}{\partial y}(\bar{U}-\bar{\Phi})|_{y=0} = 0, \quad \bar{\sigma}_{xy}|_{y=l} = i\xi\frac{\partial}{\partial y}(\bar{U}-\bar{\Phi})|_{y=l} = 0.$$

Подставив найденные значения постоянных в соотношения, определяющие трансформированные компоненты напряжения $\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\sigma}_{yy}$, $\bar{\sigma}_{xy}$, найдем

$$\bar{\sigma}_{xx} = \frac{1}{\Delta^*}\left\{e^{|\xi|y}\left[U_1(|\xi|, y)\bar{\Phi}|_{y=0} + U_2(|\xi|, y)\bar{\Phi}|_{y=l} + U_3(|\xi|, y)\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial y}\bigg|_{y=l}\right] + \right.$$

$$\left. + e^{-|\xi|y}\left[U_1(-|\xi|, y)\bar{\Phi}|_{y=0} + U_2(-|\xi|, y)\bar{\Phi}|_{y=l} + U_3(-|\xi|, y)\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial y}\bigg|_{y=l}\right]\right\} -$$

$$-\frac{\partial^2\bar{\Phi}}{\partial y^2}, \qquad \Delta^* = 4(\mathrm{sh}^2|\xi|l - \xi^2 l^2); \tag{11}$$

$$\bar{\sigma}_{yy} = \frac{1}{\Delta^*}\left\{e^{|\xi|y}\left[V_1(|\xi|, y)\bar{\Phi}|_{y=0} + V_2(|\xi|, y)\bar{\Phi}|_{y=l} + V_3(|\xi|, y)\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial y}\bigg|_{y=l}\right] + \right.$$

$$\left. + e^{-|\xi|y}\left[V_1(-|\xi|, y)\bar{\Phi}|_{y=0} + V_2(|\xi|, y)\bar{\Phi}|_{y=l} + V_3(-|\xi|, y)\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial y}\bigg|_{y=l}\right]\right\} +$$

$$+\xi^2\bar{\Phi}; \tag{12}$$

$$\bar{\sigma}_{xy} = \frac{i}{\Delta^*}\left\{e^{|\xi|y}\left[W_1(|\xi|, y)\bar{\Phi}|_{y=0} + W_2(|\xi|, y)\bar{\Phi}|_{y=l} + W_3(|\xi|, y)\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial y}\bigg|_{y=l}\right] + \right.$$

$$\left. + e^{-|\xi|y}\left[W_1(-|\xi|, y)\bar{\Phi}|_{y=0} + W_2(-|\xi|, y)\bar{\Phi}|_{y=l} + W_3(|\xi|, y)\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial y}\bigg|_{y=l}\right]\right\} -$$

$$-i\xi\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial y}, \tag{13}$$

где

$$U_1(|\xi|, y) = \xi^2[1 + (2l+y)|\xi| - 2l(l-y)\xi^2 - e^{-2l|\xi|} - y|\xi|e^{-2l|\xi|}];$$

$$U_2(|\xi|, y) = \xi^2[-1 + |\xi|(l-y)e^{l|\xi|} + e^{-l|\xi|} - |\xi|(3l-y)e^{-l|\xi|} - 2ly\xi^2e^{-l|\xi|}];$$

$$U_3(|\xi|, y) = |\xi|[-(l-y)|\xi|e^{l|\xi|} + 4\,\mathrm{sh}\,l|\xi| - |\xi|(3l+y)e^{-l|\xi|} - 2ly\xi^2e^{-l|\xi|}];$$

$$V_1(|\xi|, y) = \xi^2[1 + |\xi|(2l-y) + 2l\xi^2(l-y) + |\xi|ye^{-2l|\xi|} - e^{-2l|\xi|}];$$

$$V_2(|\xi|, y) = -\xi^2[2\,\mathrm{sh}\,l|\xi| + (l-y)|\xi|e^{l|\xi|} + |\xi|(l+y)e^{-l|\xi|} - 2yl\xi^2e^{-l|\xi|}];$$

$$V_3(|\xi|, y) = 2\xi^2[(l-y)\,\mathrm{sh}\,l|\xi| + ly|\xi|e^{-l|\xi|}];$$

$$W_1(|\xi|, y) = -\xi^3[2l(l-y)|\xi| + ye^{-2l|\xi|} - y];$$

$$W_2(|\xi|, y) = 2\xi^3[(l-y)\,\mathrm{sh}\,l|\xi| - ly|\xi|e^{-l|\xi|}];$$

$$W_3(|\xi|, y) = \xi[2\,\mathrm{sh}\,l|\xi| - (l-y)|\xi|e^{l|\xi|} + (l+y)|\xi|e^{-l|\xi|} - 2ly\xi^2e^{-l|\xi|}].$$

Подставляя в выражения (11) — (13) значение $\bar{\Phi}$ из формулы (10) и выполняя обратное преобразование Фурье, получаем

$$\sigma_{xx} = -\frac{\alpha_t EQ}{4\sqrt{\pi}}\int_0^\tau\int_0^\infty q(\tau-\tau_0)e^{-a\tau_0\varkappa^2}\left[X(\xi, y, \tau_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}(\xi, y, \tau_0)\right]\cos\xi(x - x(\tau-\tau_0))\frac{d\xi}{\xi}d\tau_0,$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{\alpha_t EQ}{4\sqrt{\pi}}\int_0^\tau\int_0^\infty q(\tau-\tau_0)e^{-a\tau_0\varkappa^2}[Y(\xi, y, \tau_0) +$$

$$+\xi^2\Psi(\xi, y, \tau_0)]\cos\xi(x - x(\tau-\tau_0))\frac{d\xi}{\xi}d\tau_0, \tag{14}$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\alpha_t EQ}{4\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau}\int_0^{\infty} q(\tau-\tau_0) e^{-a\tau_0 \varkappa^2} \Big[Z(\xi, y, \tau_0) -$$

$$- \xi \frac{\partial \Psi}{\partial y}(\xi, y, \tau_0) \Big] \sin \xi (x - x(\tau-\tau_0)) \frac{d\xi}{\xi} d\tau_0,$$

где

$$X(\xi, y, \tau_0) = \frac{1}{\Delta^*} \Big\{ e^{\xi y} \Big[U_1(\xi, y) \Psi(\xi, 0, \tau_0) + U_2(\xi, y) \Psi(\xi, l, \tau_0) +$$

$$+ U_3(\xi, y) \frac{\partial \Psi}{\partial y}(\xi, y, \tau_0)|_{y=l} \Big] + e^{-\xi y} \Big[U_1(-\xi, y) \Psi(\xi, 0, \tau_0) +$$

$$+ U_2(-\xi, y) \Psi(\xi, l, \tau_0) + U_3(-\xi, y) \frac{\partial \Psi(\xi, y, \tau_0)}{\partial y} \Big|_{y=l} \Big] \Big\};$$

$$Y(\xi, y, \tau_0) = \frac{1}{\Delta^*} \Big\{ e^{\xi y} \Big[V_1(\xi, y) \Psi(\xi, 0, \tau_0) + V_2(\xi, y) \Psi(\xi, l, \tau_0) +$$

$$+ V_3(\xi, y) \frac{\partial \Psi}{\partial y}(\xi, y, \tau_0)|_{y=l} \Big] + e^{-\xi y} \Big[V_1(-\xi, y) \Psi(\xi, 0, \tau_0) +$$

$$+ V_2(-\xi, y) \Psi(\xi, l, \tau_0) + V_3(-\xi, y) \frac{\partial \Psi}{\partial y}(\xi, y, \tau_0)|_{y=l} \Big] \Big\};$$

$$Z(\xi, y, \tau_0) = \frac{1}{\Delta^*} \Big\{ e^{\xi y} \Big[W_1(\xi, y) \Psi(\xi, 0, \tau_0) + W_2(\xi, y) \Psi(\xi, l, \tau_0) +$$

$$+ W_3(\xi, y) \frac{\partial \Psi}{\partial y}(\xi, y, \tau_0)|_{y=l} \Big] + e^{-\xi y} \Big[W_1(-\xi, y) \Psi(\xi, 0, \tau_0) +$$

$$+ W_2(-\xi, y) \Psi(\xi, l, \tau_0) + W_3(\xi, y) \frac{\partial \Psi}{\partial y}(\xi, y, \tau_0)|_{y=l} \Big] \Big\}.$$

Если источник тепла неподвижен, то интеграл по τ_0 в формулах (14) берется по частям. Устремляя l к бесконечности, получаем после выполнения интегрирования формулы для определения напряжений в полубесконечной пластинке.

1. *Коляно Ю. М., Громовык В. И.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в полосе-пластинке, обусловленные сосредоточенными источниками тепла.— Физ. и хим. обраб. материалов, 1974, № 6, с. 25—30.
2. *Коляно Ю. М., Пакула Е. А.* Температурные напряжения в нагреваемой источниками тепла полосе-пластинке с теплоотдачей.— Прикл. механика, 1967, 3, № 3, с. 77—87.
3. *Подстригач Я. С.* Приближенное определение нестационарных температурных полей в тонких пластинках и оболочках.— Тепловые напряжения в элементах турбомашин, 1961, вып. 1, с. 34—40.

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов

Получено
31.01.83

УДК 539.3

В. Л. Рвачев, Л. В. Курпа, Е. А. Федотова

СТРУКТУРА РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЛАСТИН СО СМЕШАННЫМИ УСЛОВИЯМИ ЗАКРЕПЛЕНИЯ

Пусть пластина Ω свободно оперта на участке контура $\partial\Omega_1$ и свободна на $\partial\Omega_2$. Согласно классической теории пластин [6], основанной на гипотезах Кирхгофа, функция прогибов $W(x)$, $x \in (x_1, x_2)$, в этом случае должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$W(x)|_{\partial\Omega_1} = 0, \tag{1}$$

$$M_n = -D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}\right)\Big|_{\partial\Omega_1} = 0, \tag{2}$$