3. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике.— М. : Наука, 1970.— 512 с.
4. *Рвачев В. Л.* Методы алгебры логики в математической физике.— Киев. : Наук. думка, 1974.— 260 с.
5. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения.— Киев : Наук. думка, 1982.— 552 с.
6. *Физические* основы процессов резания металлов / Под ред. В. А. Остафьева.— Киев : Вища шк., 1976.— 136 с.

Ин-т пробл. машиностроения
АН УССР, Харьков

Получено
10.02.83

УДК 539.3

Я. И. Бурак

НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В УПРУГИХ ТЕЛАХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ СИЛОВЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

Изотропное в начальном состоянии однородное линейно-упругое тело находится под воздействием заданных статически приложенных, непрерывно распределенных по объему силовых источников дипольного типа, характеризуемых двухвалентным симметричным тензором $\hat{\tau} = \tau_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j$ ($\vec{e}_i$ — базисные векторы прямоугольной декартовой системы координат $\{x^i\}$). В частности, силовые воздействия, называемые центрами расширения, описываются тензором $\hat{\tau} = \delta_{ij}\tau\vec{e}_i\vec{e}_j$. Случай сосредоточенного силового воздействия, приложенного в точке $\vec{r} = \vec{r}_0$, определяется тензором $\hat{\tau} = \hat{p}\,(\vec{r}_0)\,\delta\,(\vec{r} - \vec{r}_0)$, где $\delta\,(\vec{r}) \equiv \delta\,(x^1, x^2, x^3)$ — дельта-функция.

Силовым воздействиям, распределенным в области тела, можно поставить в соответствие вектор плотности объемных сил

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\cdot\hat{\tau}. \tag{1}$$

Здесь $\vec{\nabla} = \vec{e}_i\,\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ — оператор Гамильтона. Уравнение равновесия, записанное для открытой области тела, примет вид

$$\vec{\nabla}\cdot\hat{\sigma} = \vec{\nabla}\cdot\hat{\tau}. \tag{2}$$

Компоненты тензора напряжений $\hat{\sigma} = \sigma_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j$ представляются через компоненты вектора перемещений $\vec{u} = u_i\vec{e}_i$ известным соотношением линейной теории упругости:

$$\sigma_{ij} = G\left(\frac{\partial u_j}{\partial x^i} + \frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{2\nu}{1-2\nu}\,\delta_{ij}\,\frac{\partial u_k}{\partial x^k}\right) \tag{3}$$

(G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона). При решении рассматриваемой задачи в перемещениях уравнение равновесия (2) принимает вид неоднородного уравнения Ляме

$$\Delta\vec{u} + \frac{1}{1-2\nu}\,\vec{\nabla}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) = \frac{1}{G}\,\vec{\nabla}\cdot\hat{\tau}. \tag{4}$$

Пусть на поверхности тела (Σ) задан вектор внешних усилий $\vec{N}$. Тогда из уравнения равновесия (2) следует граничное условие

$$\vec{\sigma}_n \equiv \vec{n}\cdot\hat{\sigma} = \vec{\tau}_n + \vec{N}. \tag{5}$$

Здесь $\vec{n} = n_i\vec{e}_i$ — внешняя нормаль; $\vec{\tau}_n = \vec{n}\cdot\hat{\tau}$.

Если на поверхности тела не приложены внешние усилия, т. е. $\vec{N} = 0$, то граничное условие (5) запишется так:

$$\vec{\sigma}_n = \vec{\tau}_n. \tag{6}$$

Таким образом, определение напряженно-деформированного состояния упругого тела с распределенными силовыми воздействиями дипольного типа сводится к решению задачи теории упругости (4), (5), а при отсутствии внешней поверхностной нагрузки ($\vec{N} = 0$) — к задаче (4), (6). При найденном векторе перемещения $\vec{u}$ компоненты напряжения σ_{ij} определяются соотношением (3).

Выделим некоторые частные случаи рассматриваемой задачи при $\vec{N} = 0$.

Силовые источники постоянной интенсивности. Пусть силовые источники равномерно распределены в области тела и характеризуются тензором $\hat{\tau} = \hat{\tau}_0$. Из уравнения (4) и граничного условия (6) следует, что тензор напряжений

$$\hat{\sigma} = \hat{\tau}_0, \quad \hat{\tau}_0 = \tau_{ij}^0 \vec{e}_i \vec{e}_j, \tag{7}$$

а компоненты e_{ij} тензора деформаций определяются формулами

$$e_{ij} = \frac{1}{2G}\left(\tau_{ij}^0 - \frac{3\nu}{1+\nu}\,\tau_0 \delta_{ij}\right), \quad \tau_0 \equiv \frac{1}{3}\,\tau_{kk}^0. \tag{8}$$

В частности, если $\hat{\tau}_0 = \tau_0 \delta_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j$, что соответствует равномерно распределенным центрам расширения интенсивности τ_0, то

$$\sigma_{ij} = \tau_0 \delta_{ij}, \quad e_{ij} = (1 - 2\nu)\,\frac{\tau_0}{E}\,\delta_{ij}, \tag{9}$$

где E — модуль Юнга.

Изотропные силовые источники. Принимаем, что $\hat{\tau} = \tau \delta_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j$, т. е. силовые воздействия соответствуют неравномерно распределенным центрам расширения. В этом случае уравнение (4) и граничное условие (6) запишутся так:

$$\Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\nu}\,\vec{\nabla}\,(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = \frac{1}{G}\,\vec{\nabla}\tau, \tag{10}$$

$$\vec{\sigma}_n|_{(\Sigma)} = \tau \vec{n}. \tag{11}$$

Вектор перемещения представим суммой двух слагаемых:

$$\vec{u} = \vec{u}^{(0)} + \vec{u}^{(1)}, \quad \vec{u}^{(0)} = \vec{\nabla}\varphi, \tag{12}$$

где функция φ является частным решением уравнения

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2G}\,\frac{1-2\nu}{1-\nu}\,\tau, \tag{13}$$

а слагаемое $\vec{u}^{(1)}$ находится из решения краевой задачи

$$\Delta \vec{u}^{(1)} + \frac{1}{1-2\nu}\,\vec{\nabla}\,(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}^{(1)}) = 0, \tag{14}$$

$$\vec{\sigma}_n^{(1)}|_{(\Sigma)} = \tau \vec{n} - \vec{\sigma}_n^{(0)}. \tag{15}$$

Здесь $\vec{\sigma}_n^{(i)}$ ($i = 0, 1$) — составляющие вектора напряжений $\vec{\sigma}_n$, соответствующие $\vec{u}^{(i)}$.

Сосредоточенное силовое воздействие. Полагая в (4), (6) $\hat{\tau} = \hat{p}\,(\vec{r}_0) \times \delta\,(\vec{r} - \vec{r}_0)$, где $\vec{r} = \vec{r}_0$ — внутренняя точка области тела, получаем

$$\Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\nu}\,\vec{\nabla}\,(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = \frac{1}{G}\,(\hat{p} \cdot \vec{\nabla})\,\delta\,(\vec{r} - \vec{r}_0), \tag{16}$$

$$\vec{\sigma}_n|_{(\Sigma)} = 0. \tag{17}$$

Для неограниченного упругого тела решение запишется в виде

$$\vec{u} = -\frac{1}{4\pi G}\left\{(\hat{p}\cdot\vec{\nabla})\frac{1}{R} - \frac{E}{4(1+2\nu)}\vec{\nabla}\left[(\hat{p}\cdot\vec{\nabla})\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{R}\right]\right\}, \qquad (18)$$

где $R = |\vec{r} - \vec{r}_0|$.

Приведенное решение согласуется с полученным ранее в работах [1, 2].

Отметим, что рассматриваемые решения могут быть использованы при исследовании напряженного состояния в упругих системах, в которых силовые воздействия обусловлены изменением температуры, концентрации примесных частиц и т. п.

1. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости.— М. : Гостехиздат, 1955.— 492 с.
2. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И.* К определению особых решений уравнений теории упругости.— Вопр. механики реал. твердого тела, 1962, вып. 1, с. 95—100.

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов

Получено
04.01.83

УДК 534.26

В. И. Демчук, В. Н. Максимович, Г. В. Пляцко

КОЛЕБАНИЕ КОНЕЧНОЙ ЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В настоящее время достаточно полно изучены вопросы взаимодействия акустических полей с упругими телами канонической формы. Для тел неканонической формы такие задачи изучены сравнительно мало в связи с наличием трудностей при удовлетворении условиям контакта. В данной работе рассмотрена задача о вынужденных колебаниях, вызванных точечным источником давления, круговой конечной цилиндрической оболочки, замкнутой на торцах днищами из упругих пластин, которые упруго соединены с оболочкой, и внутри заполненной идеальной сжимаемой жидкостью.

Решение задачи находится с использованием рядов Фурье и Фурье — Бесселя, для которых обобщены операции дифференцирования на замкнутом промежутке. Обозначим через r, z, θ безразмерные координаты (отнесенные к радиусу оболочки a цилиндрические координаты), в которых ось Oz совмещена с осью цилиндрической оболочки, а плоскость $z = 0$ равноудалена от торцов. Цилиндрическая оболочка (занимающая область $r \leqslant 1, -l \leqslant z \leqslant l$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$) возбуждается гармоническим во времени точечным источником давления

$$P^i = P_0 r^{-1}\delta(r - r_0)\,\delta(z)\,\delta(\theta)\exp(-i\omega\tau), \qquad (1)$$

где δ — дельта-функция; r_0 $(r_0 < 1)$, $z = 0$, $\theta = 0$ — координаты источника P^i; ω, τ — безразмерные круговая частота и время соответственно. Временной фактор в дальнейшем опускается. Тогда задача об определении поля давления $P^e(r, z, \theta)$, рассеянного замкнутой оболочкой, а также компонентов вектора перемещений оболочки u, v, w и нормальных перемещений торцевых пластин, упруго соединенных с оболочкой u_z, сводится к решению следующей системы дифференциальных уравнений [3, 4, 6]:

$$(\Delta + \omega^2) P^e = P^i, \qquad (2)$$

$$L_{ij}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \delta_{i3}\frac{a^2(1-\nu_0^2)}{Eh\rho c^2}[P^i + P^e]_{r=1} \quad (i, j = 1, 2, 3;\ L_{ij} = L_{ji}), \qquad (3)$$

$$\Delta_0^2 u_z - \frac{\rho h}{D}\omega^2 u_z = \frac{a}{D\rho c^2}[P^i + P^e]_{z=l}. \qquad (4)$$