Для неограниченного упругого тела решение запишется в виде

$$\vec{u} = -\frac{1}{4\pi G}\left\{(\hat{p}\cdot\vec{\nabla})\frac{1}{R} - \frac{E}{4(1+2\nu)}\vec{\nabla}\left[(\hat{p}\cdot\vec{\nabla})\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{R}\right]\right\}, \quad (18)$$

где $R = |\vec{r} - \vec{r}_0|$.

Приведенное решение согласуется с полученным ранее в работах [1, 2].

Отметим, что рассматриваемые решения могут быть использованы при исследовании напряженного состояния в упругих системах, в которых силовые воздействия обусловлены изменением температуры, концентрации примесных частиц и т. п.

1. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости.— М. : Гостехиздат, 1955.— 492 с.
2. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И.* К определению особых решений уравнений теории упругости.— Вопр. механики реал. твердого тела, 1962, вып. 1, с. 95—100.

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов

Получено
04.01.83

УДК 534.26

В. И. Демчук, В. Н. Максимович, Г. В. Пляцко

КОЛЕБАНИЕ КОНЕЧНОЙ ЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В настоящее время достаточно полно изучены вопросы взаимодействия акустических полей с упругими телами канонической формы. Для тел неканонической формы такие задачи изучены сравнительно мало в связи с наличием трудностей при удовлетворении условиям контакта. В данной работе рассмотрена задача о вынужденных колебаниях, вызванных точечным источником давления, круговой конечной цилиндрической оболочки, замкнутой на торцах днищами из упругих пластин, которые упруго соединены с оболочкой, и внутри заполненной идеальной сжимаемой жидкостью.

Решение задачи находится с использованием рядов Фурье и Фурье — Бесселя, для которых обобщены операции дифференцирования на замкнутом промежутке. Обозначим через r, z, θ безразмерные координаты (отнесенные к радиусу оболочки a цилиндрические координаты), в которых ось Oz совмещена с осью цилиндрической оболочки, а плоскость $z = 0$ равноудалена от торцов. Цилиндрическая оболочка (занимающая область $r \leqslant 1, -l \leqslant z \leqslant l$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$) возбуждается гармоническим во времени точечным источником давления

$$P^i = P_0 r^{-1}\delta(r - r_0)\,\delta(z)\,\delta(\theta)\exp(-i\omega\tau), \quad (1)$$

где δ — дельта-функция; r_0 ($r_0 < 1$), $z = 0$, $\theta = 0$ — координаты источника P^i; ω, τ — безразмерные круговая частота и время соответственно. Временной фактор в дальнейшем опускается. Тогда задача об определении поля давления P^e (r, z, θ), рассеянного замкнутой оболочкой, а также компонентов вектора перемещений оболочки u, v, w и нормальных перемещений торцевых пластин, упруго соединенных с оболочкой u_z, сводится к решению следующей системы дифференциальных уравнений [3, 4, 6]:

$$(\Delta + \omega^2)\,P^e = P^i, \quad (2)$$

$$L_{ij}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \delta_{i3}\frac{a^2(1-\nu_0^2)}{Eh\rho c^2}[P^i + P^e]_{r=1} \quad (i, j = 1, 2, 3;\ L_{ij} = L_{ji}), \quad (3)$$

$$\Delta_0^2 u_z - \frac{\rho h}{D}\omega^2 u_z = \frac{a}{D\rho c^2}[P^i + P^e]_{z=l}. \quad (4)$$

Здесь

$$\Delta_0 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}; \quad \Delta = \Delta_0 + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}; \quad L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1-\nu_0}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + F_0;$$

$$F_0 = \frac{1-\nu_0^2}{Eh} c_0^2 m_0^2 \omega^2; \quad L_{12} = \frac{1+\nu_0}{2}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\theta};$$

$$c_0 = \frac{h^2}{12a^2}; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu_0^2)};$$

$$L_{13} = -c_0^2\left(\frac{\partial^3}{\partial z^3} - \frac{1-\nu_0}{2}\frac{\partial^3}{\partial z\partial\theta^2}\right); \quad L_{22} = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1-\nu_0}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + F_0;$$

$$L_{23} = \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{3-\nu_0}{2}c_0^2\frac{\partial^3}{\partial z^2\partial\theta}; \quad L_{33} = c_0^2\left(\nabla^2\nabla^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + 1\right) + 1 + F_0;$$

c — скорость звука в жидкости; m_0 — масса единицы площади срединной поверхности оболочки; ν_0, E, h, ρ — коэффициент Пуассона, модуль Юнга, толщина, плотность материала оболочки. Компоненты вектора перемещений в пластине u_r, u_θ представим в виде [5]

$$u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{\partial\psi}{\partial r}, \tag{5}$$

а функции $\varphi(r, \theta)$ и $\psi(r, \theta)$ являются решениями дифференциальных уравнений

$$(\Delta_0^2 + k_1^2)\varphi = 0, \quad (\Delta_0 + k_2^2)\psi = 0, \tag{6}$$

где

$$k_1^2 = \frac{c^2}{c_1^2}\omega^2; \quad k_2^2 = c^2 c_2^{-2}\omega^2;$$

$$c_1^2 = E(1-\nu_0)[\rho(1+\nu_0)(1-2\nu_0)]^{-1}; \quad c_2^2 = E[2\rho(1+\nu_0)]^{-1}.$$

Находим неизвестные функции, входящие в уравнения (2) — (6), с учетом симметрии относительно плоскостей $z = 0$ и $\theta = 0$ в виде рядов Фурье и Фурье — Бесселя:

$$u(z, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)\cos n\theta, \quad u_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_{n\nu}\sin\beta_\nu z,$$

$$v(z, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(z)\sin n\theta, \quad v_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} v_{n\nu}\cos\beta_\nu z,$$

$$w(z, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(z)\cos n\theta, \quad w_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_{n\nu}\cos\beta_\nu z,$$

$$u_z(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{zn}(r)\cos n\theta, \quad u_{zn}(r) = \sum_{\mu=0}^{\infty} u_{zn\mu}J_n(\gamma_{\mu n}r),$$

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n J_n(k_1 r)\cos n\theta, \quad \beta_\nu = \frac{\nu\pi}{l}, \tag{7}$$

$$\psi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n J_n(k_2 r)\sin n\theta, \quad P^e(r, z, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^e(r, z)\cos n\theta,$$

$$P_n^e(r, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_{n\nu}^e(r)\cos\beta_\nu z, \quad [P_n^e(r, z)]_{z=l} = \sum_{\mu=0}^{\infty} P_{n\mu}^e J_n(\gamma_{\mu n}r),$$

$$\left[\frac{dP_n^e(r, z)}{dz}\right]_{z=l} = \sum_{\mu=0}^{\infty} P_{n\mu}^* J_n(\gamma_{\mu n}r).$$

Здесь $J_n(\gamma_{\mu n}r)$ — функции Бесселя; $\gamma_{\mu n}$ — корни уравнения $J_n'(\gamma_{\mu n}) = 0$.

Представим в виде рядов Фурье и Фурье — Бесселя функцию

$$P^i(r, z, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} c_{n\nu\mu} J_n(\gamma_{\mu n} r) \cos \beta_\nu z \cos n\theta, \tag{8}$$

где

$$c_{000} P_0 = [2J_0(\gamma_{\mu 0}) \pi l]^{-1}; \quad c_{n\nu\mu} = P_0 J_n(\gamma_{\mu n} r_0)(-1)^\nu (\pi l)^{-1}.$$

Подставим функции, записанные в виде (7), в уравнения (2) — (6). Однако ряды здесь дважды и больше дифференцировать почленно по z и r нельзя. Поэтому рассмотрим вопрос о представлении таких производных в виде рядов Фурье и Фурье — Бесселя. Предположим, что четная функция $f(z)$ и нечетная $\varphi(z)$, а также их производные могут быть разложены в ряд Фурье на отрезке $[-l, l]$

$$f^{(2k)}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{2k} \cos \beta_\nu z, \quad \varphi^{(2k)}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu^{2k} \sin \beta_\nu z, \tag{9}$$

$$f^{(2k+1)}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{2k+1} \sin \beta_\nu z, \quad \varphi^{(2k-1)}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu^{2k-1} \cos \beta_\nu z.$$

Коэффициенты a_ν^{2k}, a_ν^{2k+1}, b_ν^{2k}, b_ν^{2k-1} определяются по формулам [1]

$$\begin{aligned} a_\nu^{2k} &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f^{(2k)}(z) \cos \beta_\nu z dz \quad & b_\nu^{2k} &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} \varphi^{2k}(z) \sin \beta_\nu z dz, \\ a_\nu^{2k+1} &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f^{(2k+1)}(z) \sin \beta_\nu z dz, \quad & b_\nu^{2k-1} &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} \varphi^{(2k-1)}(z) \cos \beta_\nu z dz. \end{aligned} \tag{10}$$

Интегрируя выражения (10) по частям и учитывая четность и нечетность производных от $f(z)$ и $\varphi(z)$, находим

$$\begin{aligned} a_\nu^{2k} &= \sum_{m=0}^{k-1} \left[(-1)^m (-1)^\nu \frac{2}{l} \beta_\nu^{2m} f^{(2k-2m-1)}(l) \right] + (-1)^k \beta_\nu^{2k} a_\nu^0, \\ b_\nu^{2k-1} &= \sum_{m=0}^{k-1} \left[(1)^{m+1} (-1)^\nu \frac{2}{l} \beta_\nu^{2m} \varphi^{(2k-2m-2)}(l) \right] + (-1)^{k+1} \beta_\nu^{2k-1} b_\nu^0, \\ a_\nu^{2k+1} &= -\beta_\nu a_\nu^{2k}; \quad b_\nu^{2k} = -\beta_\nu b_\nu^{2k-1}. \end{aligned} \tag{11}$$

Аналогично, если функцию $\Delta_0^k u_{zn}(r)$ представим на отрезке [0,1] в виде ряда Фурье — Бесселя, т. е.

$$\Delta_0^k u_{zn}(r) = \sum_{\mu=0}^{\infty} b_{n\mu}^k J_n(\gamma_{\mu n} r), \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{12}$$

то интегрированием по частям выражений, определяющих коэффициенты рядов Фурье — Бесселя [2]

$$b_{n\mu}^k = \varepsilon_{n\mu} \int_0^1 \Delta_0^k u_{zn}(r) J_n(\gamma_{\mu n} r) r dr,$$

получим такие значения коэффициентов при $k = 1, 2$:

$$b_{n\mu}^1 = \varepsilon_{n\mu} u'_{zn} J_n(\gamma_{\mu n}) - \gamma_{\mu n}^2 b_{n\mu}^0, \tag{13}$$

$$b_{n\mu}^2 = \varepsilon_{n\mu} J_n(\gamma_{\mu n}) [\Delta_0 u'_{zn} - \gamma_{\mu n}^2 u'_{zn}] - \gamma_{\mu n}^4 b_{n\mu}^0,$$

где

$$u'_{zn} = \left[\frac{\partial u_{zn}(r)}{\partial r} \right]_{r=1}; \quad \Delta_0 u'_{zn} = \left[\frac{d}{dr} \Delta_0 u_{zn}(r) \right]_{r=1};$$

$$\varepsilon_{n0} = 2, \quad \varepsilon_{n\mu} = 2\gamma_{\mu n} [(\gamma_{\mu n}^2 - n^2) J_n^2(\gamma_{\mu n})]^{-1}; \quad \mu \geqslant 1.$$

Используя разложения (7), (9) и (12), решения дифференциальных уравнений (2) — (6) записываем в виде

$$P^e_{n\nu}(r) = h_{n\nu} J_n(\varkappa r) + \sum_{\mu=0}^{\infty} (d_{n\nu\mu} - d^*_{n\nu\mu} P^*_{n\mu}) J_n(\gamma_{\mu n} r),$$

$$A^i_{n\nu} u_{n\nu} + B^i_{n\nu} v_{n\nu} + C^i_{n\nu} w_{n\nu} = H^i_{n\nu}, \quad i = 1,\ 2,\ 3,$$

$$u_{rn}(r) = \varphi_n k_1 J'_n(k_1 r) + \frac{n}{r} \psi_n J_n(k_2 r), \tag{14}$$

$$u_{\theta n}(r) = -\frac{n}{r} \varphi_n J_n(k_1 r) - \psi_n k_2 J'_n(k_2 r),$$

$$u_{zn\mu} = b_1 u'_{zn} + b_2 (\Delta_0 u'_{zn}) + b_3 P_{n\mu} + b_4.$$

Здесь

$$\varkappa^2 = \omega^2 - \beta^2_\nu; \quad d_{n\nu\mu} = \varepsilon_n \varepsilon_\nu \varepsilon_\mu c_{n\nu\mu} (\varkappa^2 - \gamma^2_{\mu n})^{-1};$$

$$\varepsilon_n = \varepsilon_\nu = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n,\ \nu = 0, \\ 1, & n,\ \nu \geqslant 1; \end{cases} \qquad \varepsilon_\mu = \begin{cases} \frac{1}{J_0(\gamma_{\mu 0})}, & \mu = 0, \\ 1, & \mu \geqslant 1; \end{cases}$$

$$d^*_{n\nu\mu} = \frac{(-1)^\nu 2}{l(\varkappa^2 - \gamma^2_{\mu n})}; \quad A^1_{n\nu} = -\beta^2_\nu - \frac{n}{2}(1 - \nu_0) + F_0;$$

$$B^1_{n\nu} = -\frac{n\beta_\nu (1 + \nu_0)}{2}; \quad C^1_{n\nu} = \frac{c_0^2 \beta_\nu n^2 (1 - \nu_0)}{2} - \nu_0 \beta_\nu - c_0^2 \beta^3_\nu;$$

$$A^2_{n\nu} = B^1_{n\nu}; \quad B^2_{n\nu} = F_0 - n^2 - \beta^2_\nu \frac{1 - \nu_0}{2};$$

$$C^2_{n\nu} = -n - c_0^2 n \beta^2_\nu (3 - \nu_0) 2^{-1};$$

$$A^3_{n\nu} = \nu_0 \beta_\nu + c_0^2 \beta^3_\nu - c_0^2 \beta_\nu n^2 (1 - \nu_0) 2^{-1};$$

$$B^3_{n\nu} = n + c_0^2 n \beta^2_\nu (3 - \nu_0) 2^{-1};$$

$$C^3_{n\nu} = c_0^2 \beta^4_\nu + 2c_0^2 n^2 \beta^2_\nu + c_0^2 n^4 - 2c_0^2 n^2 + c_0^2 + 1 + F_0;$$

$$H^1_{n\nu} = (-1)^\nu 2\beta_\nu l^{-1} (u_n + c_0^2 w'_n);$$

$$H^2_{n\nu} = \frac{(-1)^\nu 2}{l} \left[-\frac{n(1 + \nu_0)}{2} u_n + \frac{1 - \nu_0}{2} v'_n + \frac{c_0^2 n^2 (3 - \nu_0)}{2} w'_n \right];$$

$$H^3_{n\nu} = \frac{(-1)^\nu 2}{l} [-\nu_0 u_n - c_0^2 \beta^2_\nu v'_n + c_0^2 (1 - \nu_0) X_n] +$$

$$+ \frac{a^2 (1 - \nu_0^2)}{Eh\rho c^2} [P^i_{n\nu}(r) + P^e_{n\nu}(r)]_{r=1};$$

$$X_n = \frac{1}{1 - \nu_0} \left[u''_n + \frac{n^2 (1 - \nu_0)}{2} u_n + \frac{n(3 - \nu_0)}{2} v'_n - w'''_n + 2n^2 w''_n \right];$$

$$b_1 = \varepsilon_{n\mu} \gamma^2_{\mu n} J_n(\gamma_{\mu n}) c^{*-1}; \quad b_2 = \varepsilon_{n\mu} J_n(\gamma_{\mu n}) c^{*-1};$$

$$b_3 = -a [D\rho c^2 c^*]^{-1}; \quad b_4 = -b_3 \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu\mu} (-1)^\nu;$$

$$c^* = \gamma^4_{\mu n} - \frac{\rho h \omega^2}{D}; \quad u_n = [u_n(z)]_{z=l};$$

$$u''_n = \left[\frac{d^2}{dz^2} u_n(z) \right]_{z=l}; \quad v'_n = \left[\frac{d}{dz} v_n(z) \right]_{z=l};$$

$$w'_n = \left[\frac{d}{dz} w_n(z) \right]_{z=l}; \quad w'''_n = \left[\frac{d^3}{dz^3} w_n(z) \right]_{z=l}.$$

Полную замкнутую систему для определения неизвестных коэффициентов $u_{n\nu}$, $v_{n\nu}$, $w_{n\nu}$, $h_{n\nu}$, $P_{n\mu}$, $P^{*}_{n\mu}$, u'_{zn}, $\Delta_0 u'_{zn}$, φ_n, ψ_n, v'_n, u_n, w'_n, X_n получим, если воспользуемся условиями контакта жидкости с оболочкой и пластинами, а также условиями сопряжения пластин с оболочкой:

$$\frac{a}{\rho c^2\omega^2}\frac{\partial}{\partial r}(P^i + P^e) = w, \quad r = 1, \quad z \leqslant \pm l,$$
$$\frac{a}{\rho c^2\omega^2}\frac{\partial}{\partial z}(P^i + P^e) = u_z, \quad z = l, \quad r \leqslant 1, \tag{15}$$

$$u_z = u, \quad v = u_\theta, \quad w = u_r, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad r = 1, \quad z = l,$$

$$Q^* = Q_r, \quad S^* = S_\theta, \quad N_1 = N_r, \quad M_1 = M_r, \quad r = 1, \quad z = l,$$

где

$$Q_r = \frac{E}{1-\nu_0^2}\left[\frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_0\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\right)\right];$$

$$S_\theta = \frac{E}{2(1+\nu_0)}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right);$$

$$M_r = -\frac{Eh^3}{1-\nu_0^2}\left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \nu_0\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2}\right)\right];$$

$$N_r = -\frac{Eh^3}{1-\nu_0^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}(\Delta_0 u_z) + (1-\nu_0)\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right)\right];$$

$$Q^* = Q_1 + \frac{1}{a}\frac{\partial M_{12}}{\partial z};$$

$$S^* = S_1 + \frac{2}{a}M_{12}; \quad Q_1 = \frac{1}{a}\left(\frac{\partial M_{21}}{\partial \theta} - \frac{\partial M_1}{\partial z}\right);$$

$$M_{12} = \frac{Eh^3}{12a^2(1+\nu_0)}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial z\partial\theta}\right);$$

$$M_{21} = -\frac{Eh^3}{24a^2(1+\nu_0)}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial z} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial\theta}\right);$$

$$S_1 = \frac{Eh}{2a(1+\nu_0)}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{h^2}{12a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial\theta}\right);$$

$$M_1 = -\frac{Eh^3}{12a^2(1-\nu_0^2)}\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \nu_0\frac{\partial v}{\partial \theta} - \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \nu_0\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)w\right];$$

$$N_1 = \frac{Eh}{a(1-\nu_0^2)}\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \nu_0\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w\right) - \frac{h^2}{12a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right].$$

Подставляя решения (14) в граничные условия (15) и приравнивая соответствующие неизвестные коэффициенты этих рядов, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для их определения. Отметим, что предложенный метод может быть эффективно использован при решении аналогичных задач гидроакустики, когда для жидкости и ограничивающей ее упругой оболочки или ее частей применим метод рядов.

1. *Будак Б. М., Фомин С. В.* Кратные интегралы и ряды.— М. : Наука, 1967.— 607 с.
2. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций.— М. : Изд-во иностр. лит., 1949.— Т. 1. 798 с.
3. *Векслер И. Д.* Рассеяние импульсов на упругих цилиндрах.— Таллин : Валгус, 1980.— 180 с.
4. *Власов В. З.* Избранные труды.— М. : Изд-во АН СССР, 1962.— Т. 1. 528 с.
5. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах.— Киев : Наук. думка, 1981.— 284 с.
6. *Мэтсавээр Я. А., Векслер И. Д., Стулов Я. С.* Дифракция акустических импульсов на упругих телах.— М. : Наука, 1979.— 226 с.

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов

Получено
25.10.82