

Рассмотрим функцию $\delta T = T - T^{(M)}$. Очевидно, что T и $T^{(M)}$, а вследствие этого и δT удовлетворяют уравнению (1). Поскольку к решениям уравнения (1) применим принцип максимума [7], то максимального значения $|\delta T|$ достигает на границе $x = 0$. Для оценки этого максимального значения рассмотрим функцию

$$V(y) = \left[\frac{1}{h_0} \frac{\partial T^{(M)}}{\partial x} \Big|_{x=0} - (T^{(M)})_{x=0} - t_0 \right] N(y). \quad (20)$$

Подставив сюда $T - \delta T$ вместо $T^{(M)}$ и используя условие (2), получим

$$V(y) = \delta T|_{x=0} N(y) - \frac{1}{h_0} \frac{\partial \delta T}{\partial x} \Big|_{x=0}. \quad (21)$$

Учитывая, что на поверхности $x = 0$ функция δT и ее производная $\frac{\partial \delta T}{\partial x}$ разных знаков, а также то, что [3] $\max_{y \in [-h; h]} |V(y)| > \max_{y \in [-h; h]} |\delta T|$, на основании формулы (21) можно утверждать следующее: функция $V(y)$ позволяет оценить максимальную погрешность $T^{(M)}$ и выбрать тем самым оптимальную величину M для численных расчетов с заданной точностью.

1. Грицько Е. Г. Температурные поля и напряжения в ортотропной полубесконечной пластинке при кусочно-постоянном коэффициенте теплоотдачи с торцевой поверхности.— В кн.: Термомеханические процессы в кусочно-однородных элементах конструкций. Киев: Наук. думка, 1978, с. 173—178.
2. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.— М.: Наука, 1977.— 344 с.
3. Коляно Ю. М., Грицько Е. Г. О применении ортогональных систем функций при расчете температурных полей в локально нагреваемых по торцам пластинках.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 11, с. 100—103.
4. Коляно Ю. М., Прыймак В. И. Обобщенные функции в термоупругости тел с неоднородными граничными условиями теплообмена.— В кн.: Применение методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики.— В кн.: Тр. VII Сов.-Чехосл. семинара, Цахкадзор, 28 сент.— 2 окт. 1981 г. Ереван: Изд-во Ерев. ун-та, 1982, с. 157—163.
5. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках.— Киев: Наук. думка, 1972.— 308 с.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Наука, 1971.— 1108 с.
7. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1966.— 724 с.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики АН УССР, Львов

Получено
29.06.83

УДК 539.3:536.12

Ю. Д. Зозуляк

ОПТИМИЗАЦИЯ УСЛОВИЙ ВЫХОДА НА УСТАНОВИВШИЙСЯ РЕЖИМ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Рассмотрим изотропную оболочку вращения постоянной толщины $2h$, которая находится под воздействием периодической во времени внешней нагрузки, определяемой частотой ω и интенсивностью $f_p = \{p_1, p_2, p_n, m_1, m_2\}$. Примем, что на промежутке времени $0 < \tau \leq \tau_1$ компоненты силовой (p_i) и моментной (m_i) нагрузок являются искомыми функциями координат и времени (функции управления), а для $\tau > \tau_1$ — заданными функциями координат. Представим силовую нагрузку в виде

$$f_p(\alpha, \beta, \tau) = f_p^1(\tau) f_p^2(\alpha, \beta) e^{i\omega\tau} \quad (1)$$

и предположим, что ее амплитуда мало изменяется в пределах периода колебаний, т. е.

$$\left| \frac{df_p^1}{d\tau} \right| \ll \omega |f_p^1|, \quad \left| \frac{d^2 f_p^1}{d\tau^2} \right| \ll \omega^2 |f_p^1|. \quad (2)$$

Тогда систему уравнений движения [3] для определения напряженно-деформированного состояния оболочек вращения при заданной внешней нагрузке (1), сформулированную относительно усилий N_1, N_2, S_{12} и моментов M_1, M_2, H_{12} , можно записать так:

$$\begin{aligned} L_1(f_\sigma) &= \rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \rho_2 k_1 \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial \tau^2} - (p_1^1 p_1^2 + k_1 m_1^1 m_1^2) e^{i\omega\tau}, \\ L_2(f_\sigma) &= \rho_1 \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \rho_2 k_2 \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial \tau^2} - (p_2^1 p_2^2 + k_2 m_2^1 m_2^2) e^{i\omega\tau}, \\ L_3(f_\sigma) &= \frac{\rho_2}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(B \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial \tau^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(A \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial \tau^2} \right) \right] - \\ &- \frac{e^{i\omega\tau}}{AB} \left(\frac{m_1^1 \partial B m_1^2}{\partial \alpha} + \frac{m_2^1 \partial A m_2^2}{\partial \beta} \right) + \rho_1 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau^2} - p_n^1 p_n^2 e^{i\omega\tau}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $f_\sigma = \{N_1, N_2, S_{12}, M_1, M_2, H_{12}\}$; $\rho_1 = 2h\rho$; $\rho_2 = \frac{2}{3}h^3\rho$; L_i ($i = \overline{1, 3}$) — известные дифференциальные операторы первого порядка; ρ — плотность материала оболочки; u, v, ω — компоненты перемещений срединной поверхности оболочки; ϑ_1, ϑ_2 — углы поворота ее элемента вокруг касательной к линиям $\beta = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$; A, B — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности; k_1, k_2 — ее главные кривизны.

Функции искомого решения f_σ представим в виде

$$\begin{aligned} f_\sigma &= \tilde{f}_\sigma e^{i\omega\tau}, \quad f_u = \tilde{f}_u e^{i\omega\tau}, \\ \tilde{f}_\sigma &= \{\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \tilde{S}_{12}, \tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \tilde{H}_{12}\}, \quad \tilde{f}_u = \{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\omega}\} \end{aligned} \quad (4)$$

и по аналогии с условием (2) примем, что

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \tilde{f}_\sigma}{\partial \tau} \right| &\ll \omega |\tilde{f}_\sigma|, \quad \left| \frac{\partial^2 \tilde{f}_\sigma}{\partial \tau^2} \right| \ll \omega^2 |\tilde{f}_\sigma|, \\ \left| \frac{\partial \tilde{f}_u}{\partial \tau} \right| &\ll \omega |\tilde{f}_u|, \quad \left| \frac{\partial^2 \tilde{f}_u}{\partial \tau^2} \right| \ll \omega^2 |\tilde{f}_u|. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя выражения (4) в уравнения движения (3), пренебрегая величинами $\partial \tilde{f}_u / \partial \tau$ и $\partial^2 \tilde{f}_u / \partial \tau^2$ по сравнению с $\omega \tilde{f}_u$ и $\omega^2 \tilde{f}_u$, после сокращения на $e^{i\omega\tau}$ получаем приближенную систему уравнений

$$\begin{aligned} L_1(\tilde{f}_\sigma) &= -\rho_1 \omega^2 \tilde{u} - \rho_2 k_1 \omega^2 \tilde{\vartheta}_1 - p_1^1 p_1^2 - k_1 m_1^1 m_1^2, \\ L_2(\tilde{f}_\sigma) &= -\rho_1 \omega^2 \tilde{v} - \rho_2 k_2 \omega^2 \tilde{\vartheta}_2 - p_2^1 p_2^2 - k_2 m_2^1 m_2^2, \\ L_3(\tilde{f}_\sigma) &= -\frac{\rho_2 \omega^2}{AB} \left[\frac{\partial (B \tilde{\vartheta}_1)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (A \tilde{\vartheta}_2)}{\partial \beta} \right] - \\ &- \frac{1}{AB} \left(\frac{m_1^1 \partial B m_1^2}{\partial \alpha} + \frac{m_2^1 \partial A m_2^2}{\partial \beta} \right) - \rho_1 \omega^2 \tilde{\omega} - p_n^1 p_n^2, \end{aligned} \quad (6)$$

решение которой, согласно принятой ранее терминологии для задач электродинамики [2], будем называть квазиустановившимся режимом колебаний.

Системы уравнений (3), (6) необходимо дополнить соответствующего вида начальными и граничными условиями.

Ставится следующая задача оптимизации. Для фиксированных частот колебаний, граничных и начальных условий в течение промежутка времени $0 < \tau \leq \tau_1$ выйти на заданный установившийся режим силового нагружения с помощью таких функций управления p_i, m_i , при которых напряженное состояние оболочки вращения было бы оптимально близким к напряженному состоянию, соответствующему квазиустановившемуся режиму колебаний.

В соответствии с этим прием в качестве критерия оптимизации функционал

$$I = \int_0^{\tau_1} I_0 d\tau, \quad (7)$$

где

$$I_0 = \frac{1}{2} \iint_{(\Sigma)} \left\langle \frac{1 - \nu^2}{D_0} \left\{ \left[\operatorname{Re} (N_1 - N_1^*) \right]^2 + i \left[\operatorname{Im} (N_1 - N_1^*) \right]^2 + \right. \right. \\ + 2 \left[\operatorname{Re} (S_{12} - S_{12}^*) \right]^2 + 2i \left[\operatorname{Im} (S_{12} - S_{12}^*) \right]^2 + \left. \left. \left[\operatorname{Re} (N_2 - N_2^*) \right]^2 + \right. \right. \\ + i \left. \left. \left[\operatorname{Im} (N_2 - N_2^*) \right]^2 \right\} + \frac{1}{D_1} \left\{ \left[\operatorname{Re} (M_1 - M_1^*) \right]^2 + i \left[\operatorname{Im} (M_1 - M_1^*) \right]^2 + \right. \right. \\ + 2 \left[\operatorname{Re} (H_{12} - H_{12}^*) \right]^2 + 2i \left[\operatorname{Im} (H_{12} - H_{12}^*) \right]^2 + \left. \left. \left[\operatorname{Re} (M_2 - M_2^*) \right]^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + i \left[\operatorname{Im} (M_2 - M_2^*) \right]^2 \right\} \right\rangle AB d\alpha d\beta;$$

$$N_j^* = \bar{N}_j e^{i\omega\tau}; \quad S_{12}^* = \bar{S}_{12} e^{i\omega\tau}; \quad M_j^* = \bar{M}_j e^{i\omega\tau}; \quad H_{12}^* = \bar{H}_{12} e^{i\omega\tau} \quad (j = 1, 2);$$

$D_0 = 2Eh$ — жесткость на растяжение; $D_1 = 2Eh^3/3(1 - \nu^2)$ — изгибная жесткость; ν — коэффициент Пуассона.

Искомые функции управления определяются методами вариационного исчисления [1] из условия минимума функционала (7), заданного на множестве допустимых функций f_σ, f_σ^* , удовлетворяющих соотношениям (3), (6).

В качестве примера приведем решение сформулированной выше задачи для длинной цилиндрической оболочки радиусом R , находящейся в начальный момент времени $\tau = 0$ в состоянии покоя, а на промежутке времени $0 < \tau \leq \tau_1$ нагружаемой равномерно распределенной по поверхности нормальной силовой нагрузкой $p_n = p_n^1(\tau) e^{i\omega\tau}$. При $\tau > \tau_1$ интенсивность силовой нагрузки постоянна и равна p_{n0} . Необходимо определить такой закон изменения функции управления $p_n^1(\tau)$, при котором в течение времени $0 < \tau \leq \tau_1$ напряженное состояние оболочки было бы оптимально близко к напряженному состоянию, найденному в квазиустановившемся приближении.

Для рассматриваемого случая нагружения в условиях плоской деформации имеем $p_1 = p_2 = 0, m_1 = m_2 = 0, S_{12} = 0, H_{12} = 0, \vartheta_2 = 0, u = v = 0, N_2 = \frac{D_0}{R(1 - \nu^2)} \omega$. Системы уравнений (3), (6) сводятся к двум уравнениям:

$$\frac{d^2 N_2}{d\tau^2} + b N_2 - \frac{1}{\rho_1} p_n = 0, \quad (8)$$

$$N_2^* - a p_n = 0, \quad (9)$$

а минимизируемый функционал (7) можно записать в виде

$$I = \frac{1 - \nu^2}{8D_0} \int_0^{\tau_1} \left[(N_2 - N_2^* + \bar{N}_2 - \bar{N}_2^*)^2 - i (N_2 - N_2^* - \bar{N}_2 + \bar{N}_2^*)^2 \right] d\tau. \quad (10)$$

Здесь $a = 1/\rho_1(b - \omega^2)$; $b = D_0/\rho_1 R^2(1 - \nu^2)$. Черточкой сверху обозначены комплексно-сопряженные величины.

Из необходимого условия экстремума функционала (10), принимая равными нулю значения вариаций допустимых функций на границе области интегрирования, с учетом уравнений (8), (9) и аналогичных им соотношений на комплексно-сопряженные величины получаем

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2} + b \right) \left[a \rho_1 \left(\frac{d^2}{d\tau^2} + b \right) - 1 \right] \operatorname{Re} N_2 = 0, \\ \left(\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right) \operatorname{Im} N_2 = 0. \quad (11)$$

Искомое распределение оптимальной силовой нагрузки определяется на основании уравнений (8), (11) по формулам

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} p_n^1 &= p_{n0} \left[\sin^2 \omega \tau - \cos \omega \tau \left(a_1 \frac{\sqrt{b}}{\omega} \sin \omega \tau - b_1 \cos \omega \tau \right) \right], \\ \operatorname{Im} p_n^1 &= p_{n0} \sin \omega \tau \left[a_1 \frac{\sqrt{b}}{\omega} \sin \omega \tau - (b_1 + \sin \omega \tau) \cos \omega \tau \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где коэффициенты a_1, b_1 найдены из нулевых начальных условий на функцию N_2 и ее первую производную, а также условий, обеспечивающих при $\tau > \tau_1$ установившийся режим колебаний с амплитудой p_{n0} .

Результаты численных исследований по определению оптимальной интенсивности силовой нагрузки при переходном режиме (12) приведены на рис. 1. Сплошная линия соответствует параметрам $\omega \tau_1 = 4, \frac{\sqrt{b}}{\omega} = 5$; штри-

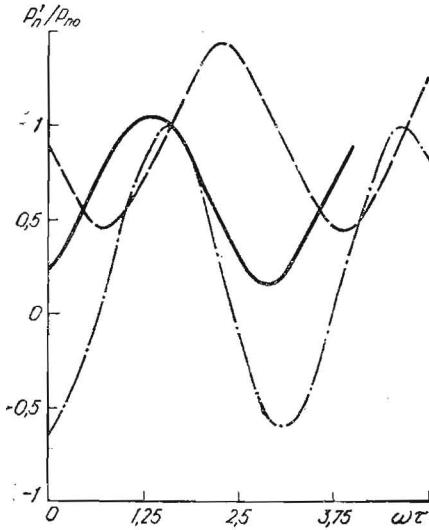


Рис. 1

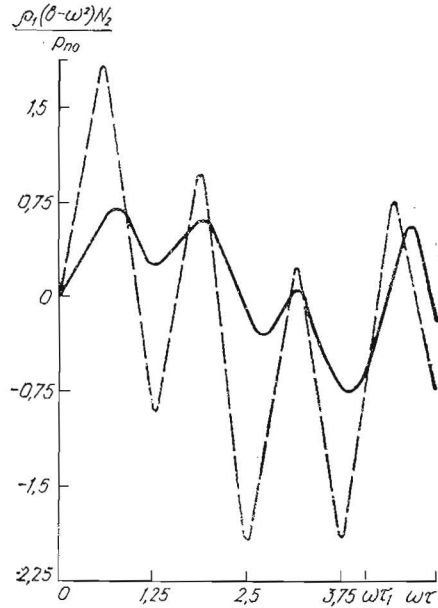


Рис. 2

ховая — $\omega \tau_1 = 5, \frac{\sqrt{b}}{\omega} = 5$; штрихпунктирная — $\omega \tau_1 = 5, \frac{\sqrt{b}}{\omega} = 10$. На рис. 2 показано распределение осевых усилий N_2 для $\omega \tau_1 = 4, \frac{\sqrt{b}}{\omega} = 5$, соответствующих ударному изменению интенсивности силовой нагрузки (штриховая линия) и оптимальному, определяемому формулой (12) (сплошная). Из сравнения приведенных данных видно, что за счет оптимизации переходного режима силового нагружения можно значительно уменьшить динамические эффекты.

1. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление.— М. : Физматгиз, 1961.— 228 с.
2. Подстригац Я. С., Бурак Я. И., Гачкевич А. Р., Чернявская Л. В. Термоупругость электропроводных тел.— Киев : Наук. думка, 1977.— 247 с.
3. Подстригац Я. С., Швец Р. Н. Термоупругость тонких оболочек.— Киев : Наук. думка, 1978.— 344 с.

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов

Получено
19.01.83