

где $\omega_1 = \frac{\mu_1 T}{a}$ определяется формулами (15). Тогда функция управления $\varphi_1(t)$ имеет вид

$$\varphi_1(t) = \varphi_0(t) - \frac{v_3 a^2}{\alpha_0 T} \left[\frac{\lambda_{32}}{(\Psi_3, \Psi_3)} \Psi_3(t) - \frac{\lambda_{43} \lambda_{32} - \lambda_{42}}{(\Psi_4, \Psi_4)} \Psi_4(t) \right]. \quad (21)$$

На рис. 2 показано изменение функции $\varphi_1(t)$ на промежутке времени $[0, T]$ при значениях безразмерного параметра $\omega_1 = 10$ (кривая 2) и $\omega_1 = 20$ (кривая 3). Для сравнения приведен график функции $\varphi_0(t)$ (кривая 1), полученной в пренебрежении упругими колебаниями оболочки.

1. Бутковский А. Г., Пустильников Л. М. Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами.— М.: Наука, 1980.— 384 с.

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов

Получено
06.01.83

УДК 539.377

Н. И. Бугрий

**ОПТИМИЗАЦИЯ СИЛОВОЙ НАГРУЗКИ
В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ
С КОНЕЧНОЙ СДВИГОВОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ**

Рассмотрим свободную на краях круговую цилиндрическую оболочку длины $2l$, постоянной толщины $2h$, которая отнесена к смешанной системе координат (z, φ, γ) , где z — осевая координата, отсчитываемая от центрального сечения; φ — кольцевая угловая координата; γ — координата, определяющая положение точки по толщине оболочки. Оболочка подвергается воздействию осесимметричной нормальной силовой нагрузки, определяемой интенсивностью $q_n(z)$. Предполагаем, что функция $q_n(z)$ подчинена ограничениям вида

$$\int_{-h}^h z^i q_n(z) dz = P_i \quad (i = 0, 1). \quad (1)$$

Ставим задачу об определении такого стационарного распределения силовой нагрузки $q_n(z)$, при которой обеспечивается оптимально низкий уровень напряжений. В качестве критерия оптимизации примем функционал энергии упругой деформации оболочки [1]

$$J_1 = \int_{(V)} W dV. \quad (2)$$

Здесь

$$W = \frac{1}{2E} [\sigma_{zz}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 + \sigma_{\gamma\gamma}^2 - 2\nu(\sigma_{zz}\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}\sigma_{\gamma\gamma} + \sigma_{\varphi\varphi}\sigma_{\gamma\gamma}) + 2(1 + \nu)(\sigma_{z\varphi}^2 + \sigma_{\varphi\gamma}^2 + \sigma_{z\gamma}^2)] \quad (3)$$

— плотность энергии деформации оболочки; σ_{ij} ($i, j = z, \varphi, \gamma$) — компоненты тензора напряжений, представленные через перемещения U_1, U_2, U_3 , где индексы 1, 2, 3 соответствуют координатным линиям z, φ, γ соответственно; (V) — область, занимаемая оболочкой; ν — коэффициент Пуассона; E — модуль Юнга.

В предположении линейности закона изменения перемещений по толщине оболочки с учетом осевой симметрии, т. е.

$$U_1 = u_0(z) + u_1(z)\gamma, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = w_0(z) + w_1(z)\gamma, \quad (4)$$

на основе вариационного принципа Лагранжа [2, 3] можно получить следующую систему исходных соотношений для определения функций u_i, w_i ($i = 0, 1$) на срединной поверхности (Σ_0) оболочки:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + 4b_6 \left(\frac{dw}{dx} + \frac{dw_1}{dx} \right) = 0,$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 u_1}{dx^2} + 4b_6 \frac{d\omega_1}{dx} &= \frac{b_1}{a^2} \left(u_1 + a \frac{d\omega}{dx} \right), \\
\frac{d^2 \omega}{dx^2} + \frac{1}{a} \frac{du_1}{dx} - b_8 \omega - \frac{b_9}{a} \left(\omega_1 + a \frac{du}{dx} \right) + b_7 q_0 &= 0, \\
\frac{d^2 \omega_1}{dx^2} - b_8 \left(1 + \frac{3R^2}{h^2} \right) \omega_1 - b_9 \frac{du_1}{dx} - \frac{3R^2 b_9}{h^2 a} \left(\omega + a \frac{du}{dx} \right) + \\
+ \frac{3Rb_7}{h} q_0 &= 0,
\end{aligned} \tag{5}$$

и краевых условий на контуре (Γ_0) поверхности (Σ_0) :

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega_1(\pm l_0)}{dx} = 0, \quad a \frac{d\omega(\pm l_0)}{dx} + u_1(\pm l_0) &= 0, \\
\frac{du_1(\pm l_0)}{dx} + 4b_6 \omega_1(\pm l_0) = 0, \quad \frac{du(\pm l_0)}{dx} + 4b_6 [\omega(\pm l_0) + \omega_1(\pm l_0)] &= 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $u_0 = uR$; $\omega_0 = \omega R$; $az = xR$; $Rl_0 = al$; $q_n = q_0 E$; R — радиус средней поверхности (Σ_0) ;

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{3R^2}{a^2 h^2 b_8}; \quad b_6 = \frac{\nu}{4a(1-\nu)}; \quad b_7 = \frac{R(1+\nu)}{ha^2}; \\
b_8 &= \frac{2(1-\nu)}{a^2(1-2\nu)}; \quad b_9 = \frac{2\nu}{a(1-2\nu)}; \quad a^4 = \frac{3R^2(1-\nu^2)}{4h^2}.
\end{aligned}$$

Отметим, что первое из уравнений (5) с учетом последнего условия (6) дает

$$\frac{du}{dx} + 4b_6(\omega + \omega_1) = 0. \tag{7}$$

Используя уравнение (7), соотношения (5) можно привести к виду

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 u_1}{dx^2} + 4b_6 \frac{d\omega_1}{dx} &= \frac{b_1}{a^2} \left(u_1 + a \frac{d\omega}{dx} \right), \\
\frac{d^2 \omega_1}{dx^2} - a_1 \frac{d^2 \omega}{dx^2} - a_2 \omega_1 + a_3 \omega - a_4 \frac{du_1}{dx} &= 0, \\
\frac{d^2 \omega}{dx^2} + \frac{1}{a} \frac{du_1}{dx} - \frac{2}{a^2(1-\nu)} (\omega + \nu \omega_1) + b_7 q_0 &= 0,
\end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{3R}{h}; \quad a_2 = b_8 + \frac{6R(R-\nu h)}{h^2 a^2(1-\nu)}; \\
a_3 &= \frac{6R(h-R\nu)}{a^2 h^2(1-\nu)}; \quad a_4 = b_9 + a_1.
\end{aligned}$$

При этом напряжения представляются через функции u_1 , ω , ω_1 по формулам

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz} &= \frac{3}{2h} M_1 \frac{\gamma}{h^2}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2h} \left(N_2 + 3M_2 \frac{\gamma}{h^2} \right), \\
\sigma_{z\varphi} &= \sigma_{\varphi\gamma} = 0, \\
\sigma_{\gamma\gamma} &= \frac{1}{2h} \left[Q_{\gamma\gamma}^{(1)} + 3\nu(M_1 + M_2) \frac{\gamma}{h^2} \right], \quad \sigma_{\nu z} = \frac{1}{2h} \left(Q_1 + 3M_{\nu z}^{(1)} \frac{\gamma}{h^2} \right).
\end{aligned} \tag{9}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
N_2 &= \int_{-h}^h \sigma_{\varphi\varphi} d\gamma; \quad M_1 = \int_{-h}^h \left(1 + \frac{\gamma}{R} \right) \gamma \sigma_{zz} d\gamma; \\
M_2 &= \int_{-h}^h \sigma_{\varphi\varphi} \gamma d\gamma; \quad Q_1 = \int_{-h}^h \left(1 + \frac{\gamma}{R} \right) \sigma_{\nu z} d\gamma; \\
Q_{\gamma\gamma}^{(1)} &= \int_{-h}^h \left(1 + \frac{\gamma}{R} \right) \sigma_{\gamma\gamma} d\gamma; \quad M_{\nu z}^{(1)} = \int_{-h}^h \left(1 + \frac{\gamma}{R} \right) \gamma \sigma_{\nu z} d\gamma.
\end{aligned}$$

Функции $N_2, M_1, M_2, M_{\gamma z}^{(1)}, Q_{\gamma\gamma}^{(1)}, Q_1$ определяются через компоненты перемещений по формулам

$$\begin{aligned} N_2 &= \frac{D_0}{1-\nu^2} (\omega + \nu\omega_1), \quad M_1 = \frac{D_1 a^3 (1-\nu) b_8}{2R} \left(\frac{du_1}{dx} + 4b_8\omega_1 \right), \\ M_2 &= \frac{D_1 a^2 (1-\nu) b_8}{2R} \left(\omega_1 + 4b_8 a^2 \frac{du_1}{dx} \right), \quad M_{\gamma z}^{(1)} = \frac{D_1 a (1-\nu)}{2R} \frac{d\omega_1}{dx}, \quad (10) \\ Q_{\gamma\gamma}^{(1)} &= \frac{D_0}{1-\nu^2} (\omega_1 + \nu\omega), \quad Q_1 = \frac{D_0}{2(1+\nu)} \left(u_1 + a \frac{d\omega}{dx} \right), \end{aligned}$$

где $D_0 = 2Eh$; $D_1 = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$.

Функционал (2) с учетом (9) после интегрирования по ϕ и γ принимает вид

$$\begin{aligned} J_1 [u_1, \omega, \omega_1] &= \frac{\pi R^2}{D_0 a} \int_{-l_0}^{l_0} \left[N_2^2 - Q_{\gamma\gamma}^{(1)2} - 2\nu N_2 Q_{\gamma\gamma}^{(1)} + \frac{3(1-\nu^2)}{h^2} (M_1^2 + M_2^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{6(1+\nu)}{h^2} (M_{\gamma z}^{(1)2} - \nu M_1 M_2) + 2(1+\nu) Q_1^2 \right] dx. \quad (11) \end{aligned}$$

Поставленную ранее задачу об отыскании оптимальной по напряжениям внешней нагрузки можно сформулировать так: найти экстремали функционала (11) на множестве функций $u_1, \omega, \omega_1, q_0$, удовлетворяющих условиям (1), (6), (8). Сформулированную вариационную задачу можно привести к задаче на безусловный экстремум для функционала [4]

$$\begin{aligned} J_1^* [u_1, \omega, \omega_1] &= \frac{\pi R^2}{D_0 a} \int_{-l_0}^{l_0} \left\{ N_2^2 + Q_{\gamma\gamma}^{(1)2} - 2\nu N_2 Q_{\gamma\gamma}^{(1)} + \frac{3(1-\nu^2)}{h^2} (M_1^2 + M_2^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{6(1+\nu)}{h^2} (M_{\gamma z}^{(1)2} - \nu M_1 M_2) + 2(1+\nu) Q_1^2 + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_1(x) \left(\frac{d^2\omega_1}{dx^2} - a_1 \frac{d^2\omega}{dx^2} - a_2\omega_1 + a_3\omega - a_4 \frac{du_1}{dx} \right) + \lambda_2(x) \left[\frac{d^2u_1}{dx^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4b_8 \frac{d\omega_1}{dx} - \frac{b_1}{a^2} \left(u_1 + a \frac{d\omega}{dx} \right) \right] + (\lambda_1^0 + \lambda_2^0 x) (\omega + \nu\omega_1) \right\} dx, \quad (12) \end{aligned}$$

где $\lambda_i(x), \lambda_i^0$ ($i = 0, 1$) — множители Лагранжа; $q_0(x)$ определяется через компоненты перемещений последним из соотношений (8).

Экстремали функционала (12) с учетом (5), (6) удовлетворяют следующей системе уравнений в области (Σ_0):

$$\begin{aligned} \frac{d^2\lambda_1}{dx^2} - a_2\lambda_1 - 4b_8 \frac{d\lambda_2}{dx} + \nu(\lambda_1^0 + \lambda_2^0 x) + 4q_0 &= 0, \\ a_1 \frac{d^2\lambda_1}{dx^2} - a_3\lambda_1 - \frac{b_1}{a} \frac{d\lambda_2}{dx} - (\lambda_1^0 + \lambda_2^0 x) - b_2 q_0 &= 0, \\ \frac{d^2\lambda_2}{dx^2} - \frac{b_1}{a_2} \lambda_2 + a_4 \frac{d\lambda_1}{dx} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Соответствующие экстремальные граничные условия на краях оболочки имеют вид

$$\frac{d\lambda_1(\pm l_0)}{dx} = 0, \quad \frac{d\lambda_2(\pm l_0)}{dx} - a_{10}\lambda_1(\pm l_0) = 0. \quad (14)$$

Здесь

$$b_2 = \frac{4R}{h}; \quad a_{10} = \frac{a_1}{a} - a_4.$$

При этом считалось, что функция $\omega(x)$ принимает фиксированное значение при $x = \pm l_0$.

Соотношения (8), (13) и условия (1), (6), (14) составляют замкнутую систему уравнений и краевых условий для определения оптимальной нагрузки $q_n(z)$ и напряженного состояния в оболочке, которое она вызывает.

Общее решение системы (13) имеет вид

$$\lambda_1(x) = e^{sx} [(\alpha C_1 + \beta C_2) \cos rx + (\alpha C_2 - \beta C_1) \sin rx] + \\ + e^{-sx} [(\beta C_4 - \alpha C_3) \cos rx - (\alpha C_4 + \beta C_3) \sin rx] - a_5 (\lambda_1^0 + \lambda_2^0 x),$$

$$\lambda_2(x) = e^{sx} (C_1 \cos rx - C_2 \sin rx) + e^{-sx} (C_3 \cos rx + C_4 \sin rx) - a_6 \lambda_2^0,$$

$$q_0(x) = e^{sx} [(a_7 C_1 + a_8 C_2) \cos rx + (a_7 C_2 - a_8 C_1) \sin rx] + \\ + e^{-sx} [(a_8 C_4 - a_7 C_3) \cos rx - (a_7 C_4 + a_8 C_3) \sin rx] - a_9 (\lambda_1^0 + \lambda_2^0 x),$$

где $s = \sqrt{\frac{b_0^2 + g_0^2}{2}}$; $r = \sqrt{\frac{b_0^2 - g_0^2}{2}}$; $b_0^4 = \frac{b_1 b_3}{a^2 b_2}$;

$$g_0^2 = \frac{a^2 b_3 + b_1 b_2 - b_4 a_4 a}{2 a^2 b_2}; \quad b_3 = a_3 + \frac{a_2 R}{h};$$

$$b_4 = b_1 + \frac{4 a R b_6}{h}; \quad b_5 = 1 - \frac{\nu R}{h}; \quad a_5 = \frac{b_5}{b_3};$$

$$a_6 = \frac{a_4 b_3 a^2}{b_1 b_3}; \quad \alpha = \frac{(b_1 - b_0^2 a^2) s}{a^2 b_0^2 a_4}; \quad \beta = -\frac{(b_1 + b_0^2 a^2) r}{a^2 b_0^2 a_4};$$

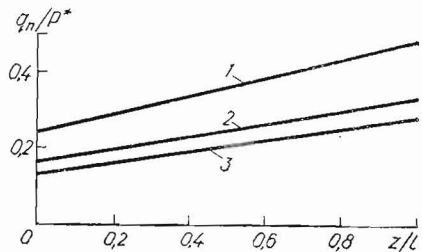
$$a_9 = \frac{a_5 a_2 + \nu}{4}; \quad a_7 = \frac{\alpha (a_2 - g_0^2) + 2s (2b_6 + r\beta)}{4};$$

$$a_8 = \frac{\beta (a_2 - g_0^2) + 2r (2b_6 - s\alpha)}{4}.$$

Неизвестные постоянные C_i ($i = \overline{1, 4}$), λ_1^0 , λ_2^0 определяются из условий (1), (14). Используя после этого соотношения (6), (8) — (10), можно найти напряженное состояние в оболочке, которое вызывает нагрузка $q_n(z)$.

На ЭВМ ЕС-1022 был проведен численный анализ полученного решения при $\nu = 0,3$; $\frac{R}{h} = 20, 40, 60$; $l_0 = 0,5a$; $\alpha_1 = \frac{1}{3}$ ($P_1 = \alpha_1 P_0 l_0$). Результаты расчета приведены в виде графиков на рис. 1, где кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям $\frac{R}{h} = 20, 40, 60$;

$P^* = \frac{P_0 a}{R}$. Из рисунка видно, что для рассматриваемых условий закрепления краев распределение силовой нагрузки в осевом направлении практически определяется линейным законом. При этом градиентность силовой нагрузки возрастает с уменьшением параметра $\frac{R}{h}$.



Отметим, что оптимальная нагрузка, полученная при тех же условиях в рамках классической теории Кирхгофа — Лява, имеет несколько большую градиентность, чем нагрузка $q_n(z)$. Для сравниваемых расчетных моделей максимальные значения кольцевых напряжений, которые являются определяющими, различаются в пределах 1 %.

1. Григорюк Э. И., Подстригач Я. С., Бурак Я. И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин.— Киев: Наук. думка, 1979.— 364 с.
2. Огибалов П. М., Колтунов М. А. Оболочки и пластины.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1969.— 695 с.
3. Подстригач Я. С., Швеиц Р. Н. Термоупругость тонких оболочек.— Киев: Наук. думка, 1978.— 344 с.
4. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.— М.: Наука, 1969.— 364 с.

Львов. ун-т

Получено
31.03.83